Bollettino Unione Matematica Italiana

Enrico Resegotti

Sulla classe limite della funzione e^{1/z^n} per $z \to 0$ lungo un arco regolare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.1, p. 43–46.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_43_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

Sulla classe limite della funzione $e^{\frac{1}{z^n}}$ per $z \to 0$ lungo un arco regolare.

Nota di ENRICO RESEGOTTI (a Torino)

Sunto. - *L'autore considera le classi limiti della funzione* $w = e^{\frac{1}{z^n}}$ *(n intero positivo) per* $z \to 0$ *lungo un arco regolare, e verifica che se si fa tendere* z *a zero lungo una curva avente in* $z = 0$ *lo stesso* E_{n+1} *di un arco di linea* $|w| =$ costante *si ha una classe limite dipendente da tale* E_{n+1}.

Summary. - *The Author considers the limits classes of the function* $w = e^{\frac{1}{z^n}}$ *(*n *entire positive) when* $z \to 0$ *along a regular arc, and verifies that if* z *approaches zero along a curve having in* $z = 0$ *the same* E_{n+1} *of a line* $|w| =$ constant *a limit class depending on this* E_{n+1} *is obtained.*

1. G. VIVANTI (¹) considera una funzione $w = f(z)$ di variabile complessa, monogena, uniforme, avente nell'origine un punto singolare essenziale isolato.

Posto $z = x + iy$, fa l'ipotesi che il modulo di w abbia la forma $F\left[\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\right]$, con F funzione uniforme e P e Q funzioni regolari nell'intorno dell'origine e tali che le curve di equazione cartesiana:

$$Q(x, y) - cP(x, y) = 0 \tag{1}$$

abbiano tangente fissa nell'origine.

Il VIVANTI osserva che, se si fa tendere z a zero lungo una delle curve (1), la classe limite di w varia da curva a curva, dipendendo, pertanto, dalla loro curvatura, e suffraga l'osservazione con l'esempio della funzione $w = e^{\frac{k}{z}}$.

Nella presente nota, riferendoci all'esempio più generale della funzione $w = e^{\frac{1}{z^n}}$ (n intero positivo), e operando il passaggio al limite lungo un arco regolare uscente dall'origine, preciseremo che la classe limite dipende ordinariamente dall'elemento del 1° ordine, mentre dipende dall'elemento curvilineo di ordine $n + 1$ solamente quando questo appartiene pure ad una linea $|w| =$ *costante.*

(¹) G. VIVANTI, *Osservazioni sui punti singolari essenziali,* « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », Tomo III. Anno 1889. Pagg. 223-229. *Teoria delle funzioni analitiche,* Hoepli. Milano, 1901. Pagg. 144-146.

2. Posto

(2) $$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

e

(3) $$w = Re^{i\theta}$$

si ha:

(4) $$R = e^{\rho^{-n}\cos n\varphi}$$

(5) $$\theta = -\frac{\sin n\varphi}{\rho^n}.$$

Si consideri nel piano della variabile z una curva C regolare uscente da $z = 0$ e di equazione polare:

(6) $$\varphi = \alpha_0 + \alpha_1\rho + \alpha_2\rho^2 + \dots.$$

Ci proponiamo di far tendere z a zero lungo C, ossia di far tendere ρ a zero, essendo φ espresso dalla (6).

Esaminiamo anzitutto il caso più generale in cui $\cos n\alpha_0 \neq 0$.

In tal caso:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\cos n\varphi}{\rho^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \cos n\alpha_0 > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad \cos n\alpha_0 < 0, \end{cases}$$

corrispondentemente:

$$\lim_{\rho\to 0} R = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \cos n\alpha_0 > 0 \\ 0 & \text{se} \quad \cos n\alpha_0 < 0; \end{cases}$$

il limite di θ (che sarà generalmente $\pm\infty$) non interessa più poichè si può già concludere che:

$$\lim_{\rho\to 0} w = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad \cos n\alpha_0 > 0 \\ 0 & \text{se} \quad \cos n\alpha_0 < 0. \end{cases}$$

Quindi se si divide l'angolo giro in $2n$ parti eguali, il limite di w è zero se α_0 cade in uno degli intervalli $\left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{2n}, \frac{7\pi}{2n}\right)$, ..., $\left(\frac{(4n-3)\pi}{2n}, \frac{(4n-1)\pi}{2n}\right)$, è invece infinito se α_0 cade in $\left(\frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{2n}, \frac{9\pi}{2n}\right)$, ..., $\left(\frac{(4n-1)\pi}{2n} : \frac{\pi}{2n}\right)$.

Si può dunque intanto affermare che *in generale* il limite di w dipende solo dall'elemento del 1° ordine della curva C (e nemmeno strettamente).

3. Passiamo ora all'esame del caso in cui $\cos n\alpha_0 = 0$.

Allora α_0 può avere uno dei valori:

$$\alpha_0^{(k)} = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$$

corrispondenti alle semirette che delimitano i settori in cui il limite di w è alternativamente zero e infinito.

In tal caso, se $\alpha_1 \neq 0$ si ha:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\cos n\varphi}{\rho^n} = \lim_{\rho \to 0} \frac{-\sin n\varphi}{\rho^{n-1}} \frac{d\varphi}{d\rho} = \begin{cases} \left.\begin{array}{l} +\infty \text{ se } \alpha_1 \sin n\alpha_0 = (-1)^k \alpha_1 < 0 \\ -\infty \text{ se } \alpha_1 \sin n\alpha_0 = (-1)^k \alpha_1 > 0 \end{array}\right\} n > 1 \\ (-1)^{k+1}\alpha_1 \text{ se } n = 1. \end{cases}$$

Ne segue che se $n > 1$ il limite di R è ancora infinito o zero, e così pure il limite di w.

Se $\alpha_1 = 0$ si può riprendere il calcolo con successive derivazioni e si trova che se $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0$ e $\alpha_r \neq 0$ si ha:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\cos n\varphi}{\rho^n} = \begin{cases} \left.\begin{array}{l} +\infty \quad \text{se} \quad (-1)^k \alpha_r < 0 \\ -\infty \quad \text{se} \quad (-1)^k \alpha_r > 0 \end{array}\right\} r < n \\ (-1)^{k+1} n\alpha_n \quad \text{se} \quad r \geq n \end{cases}$$

Per $r < n$ segue ancora che il limite di R è infinito o zero, e così pure il limite di w. Per $r \geq n$, ossia quando la curva (6) è del tipo:

$$\varphi = \alpha_0^{(k)} + \alpha_n \rho^n + \ldots, \tag{7}$$

si ha

$$\lim_{\rho \to 0} R = e^{(-1)^{k+1} n\alpha_n} \qquad (\text{non escludendosi } \alpha_n = 0)$$

$$\lim_{\rho \to 0} \theta = \pm\infty$$

e la classe limite è rappresentata sul piano w dai punti di una circonferenza con centro nell'origine (e raggio dipendente da α_n).

Siccome d'altra parte le linee $R = \text{costante} = e^c$ sono rappresentate dall'equazione:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\varphi\right) = c\rho^n \tag{8}$$

ossia

$$\varphi = \alpha_0{}^{(k)} + \frac{(-1)^{k+1}}{n} \arcsin c\rho^n,$$

risulta che in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine ciascuna linea $R = e^c$ si compone di $2n$ archi di equazioni [2]:

$$\varphi = \alpha_0{}^{(k)} + \frac{(-1)^{k+1}c}{n} \rho^n + \dots \qquad (k = 0, 1, \dots, 2n-1). \tag{9}$$

Le curve (7) per cui $\alpha_n = \frac{(-1)^{k+1}}{n} c$ risultano perciò caratterizzate dall'avere nell'origine lo stesso E_{n+1} di uno degli archi (9) di linea $R =$ costante [3].

(2) Le linee (8) sono algebriche, di ordine $2n$, con un punto n-plo nell'origine: gli n rami lineari passanti per detto punto si ottengono accoppiando gli archi (9) che corrispondono a valori differenti di π di $\alpha_0{}^{(k)}$, ossia a semirette tangenti opposte.

Per notizie sulle linee (8) cfr:

G Loria, *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte*, Teubner, Leipzig, 1902. Pagg. 394-403, passim.

(3) Si noti che due curve (6) aventi in comune $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ hanno un contatto di ordine $(r+1)$.

Lo si verifica, tenendo presenti le condizioni di contatto di due curve sotto la forma $y = y(x)$, e in conseguenza delle seguenti relazioni, ottenute mediante facili calcoli:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = tg\alpha_0 = g_1(\alpha_0)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{2\alpha_1}{\cos^3\alpha_0} = g_2(\alpha_0, \alpha_1)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = \frac{8\alpha_1{}^2 \sin\alpha_0 \cos^2\alpha_0 + 6\alpha_2 \cos\alpha_0 + 12\,\alpha_1{}^2 \sin\alpha_0}{\cos^5\alpha_0} = g_3(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$$

e analogamente

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 = g_n(\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}).$$