
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DOMINGOS PISANELLI

Sulla definizione di funzionale analitico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
15 (1960), n.1, p. 40–42.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_40_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sulla definizione di funzionale analitico.

Nota di DOMINGOS PISANELLI (a S. Paulo)

Sunto. - *Si semplifica la definizione di funzionale analitico in un aperto dello spazio delle funzioni analitiche munito della topologia di TILLMANN.*

Sia φ l'insieme delle funzioni analitiche (y, M) definite in insiemi aperti M non vuoti e diversi dalla sfera complessa S , nulle all' ∞ (se $\infty \in M$). φ munito della topologia di FANTAPPIÉ [1] verrà indicato φ_F .

Secondo FANTAPPIÉ un funzionale F definito in un aperto Ω di φ_F si chiama analitico se soddisfa alle condizioni:

I) $F[(y_x M_x)]$ è una funzione analitica di α quando (y_x, M_x) è un'applicazione analitica di α (linea analitica) con valori in φ_F .

II) Se $(y, M_0) \in \Omega$ è un prolungamento di $(y, M_1) \in \Omega$ si ha $F[(y, M_0)] = F[(y, M_1)]$ [1].

Abbiamo dimostrato nella nostra tesi di dottorato [2] che la seconda condizione è una conseguenza della prima.

Più tardi è stata introdotta in φ , dal TILLMANN [3], una topologia con certi intornoi fondamentali V_ε , che oltre molti vantaggi rende lo spazio S separato.

Vogliamo dimostrare in questa nota che la seconda condizione che definisce un funzionale analitico è ancora conseguenza della prima se $(y, M_1) \in V_\varepsilon(y, m_0) \subset \Omega$.

Dopo aver redatto questa dimostrazione lo stesso TILLMANN ci ha comunicato un'altra dimostrazione del teorema [4].

Ricordiamo quale è la topologia del TILLMANN [3]:

Sia $(y_0, M_0) \in \varphi$. Diremo intorno $V_\varepsilon(y_0, M_0)$ l'insieme degli elementi $(y, M) \in \varphi$ per cui si ha:

$$(1) \quad \begin{aligned} \delta(t, \mathfrak{C}M) &< \varepsilon & (t \in \mathfrak{C}M_0) \quad (*) \\ \delta(t, \mathfrak{C}M_0) &< \varepsilon & (t \in \mathfrak{C}M) \end{aligned}$$

(*) δ = distanza sferica.

$$(2) \quad \begin{aligned} \delta(t, \mathfrak{C}M) &\geq \varepsilon & (t \in \mathfrak{C}M_0) \\ \delta(t, \mathfrak{C}M_0) &\geq \varepsilon & (t \in \mathfrak{C}M) \end{aligned} \quad \Rightarrow |y(t) - y_0(t)| < \varepsilon.$$

φ munito di questa topologia sarà indicato con φ_T .

DEFINIZIONE. - Si chiama applicazione analitica definita in O aperto in S , con valori in φ_T , un'applicazione per cui esiste:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{(y_\alpha, M_\alpha) - (y_{\alpha_0}, M_{\alpha_0})}{\alpha - \alpha_0} \quad (V_{\alpha_0} \subset O)$$

LEMMA. - Siano (y, M_0) e (y, M_1) con $M_0 \supset M_1$. Se $(y, M_1) \in V_\varepsilon(y, M_0)$ esistono un'applicazione analitica $(y_\alpha, M)_\alpha$ (α complesso) e due numeri α_0 e α_1 per cui $(y_\alpha, M_\alpha) \in V_\varepsilon(y, M_0)$ (α complesso), $(y_{\alpha_0}, M_{\alpha_0}) = (y, M_0)$ e $(y_{\alpha_1}, M_{\alpha_1}) = (y, M_1)$.

Sia $x_0 \in \mathfrak{C}M_0$ e $\delta_1 = \text{mass } \delta(x_0, x)$ ($x \in M_1$). Sia S_δ la sfera chiusa di raggio δ e centro x_0 ed $M_\delta = M_0 \cap \mathfrak{C}S_\delta \cup M_1$. Si avrà

$$M_0 \cap \mathfrak{C}S_\delta \cup M_1 = M_0$$

$$M_0 \cap \mathfrak{C}S_{\delta_1} \cup M_1 = M_1.$$

L'applicazione

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} (y, M_1) \leftarrow \delta_1 \leq R(\alpha) \\ (y, M_{\bar{\alpha}}) \leftarrow 0 \leq R(\alpha) \leq \delta_1 \\ (y, M_0) \leftarrow R(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

è analitica nel piano complesso perchè dato $V_\sigma(y_{\bar{\alpha}}, M_{\bar{\alpha}})$ si ha:

$$|\alpha - \bar{\alpha}| < \sigma \Rightarrow R(\alpha - \bar{\alpha}) < \sigma \Rightarrow \begin{aligned} \delta(x, S_{R(\alpha)}) &< \sigma & (x \in S_{R(\bar{\alpha})}) \\ \delta(x, S_{R(\bar{\alpha})}) &< \sigma & (x \in S_{R(\alpha)}) \end{aligned}$$

donde

$$|\alpha - \bar{\alpha}| < \sigma \Rightarrow \begin{aligned} \delta(x, \mathfrak{C}M_{R(\alpha)}) &< \sigma & (x \in \mathfrak{C}M_{R(\alpha)}) \\ \delta(x, \mathfrak{C}M_{R(\alpha)}) &< \sigma & (x \in \mathfrak{C}M_{R(\alpha)}) \end{aligned}$$

ed ancora

$$\alpha \neq \bar{\alpha} \Rightarrow \left| \frac{y_{\alpha}(t) - y_{\bar{\alpha}}(t)}{\alpha - \bar{\alpha}} \right| = 0 < \sigma \quad (t \in M_{R(\alpha)} \cap M_{R(\bar{\alpha})}).$$

Essendo $M_0 \supset M_{\alpha} \supset M_1$, si avrà:

$$\delta(x, \mathbb{C}M_0) < \varepsilon \quad (x \in \mathbb{C}M_1)$$

e
$$\delta(x, \mathbb{C}M_0) < \varepsilon \quad (x \in \mathbb{C}M_{R(\alpha)}) \quad \text{dove}$$

$$y(M_{\alpha}) \in V_{\varepsilon}(y, M_0) \quad (\alpha \text{ complesso}) \text{ c. v. d.}$$

TEOREMA. — Se F è un funzionale definito in un aperto Ω , per cui $F[(y_{\alpha}, M_{\alpha})]$ è una funzione analitica in $\varphi^{-1}(\Omega)$ se $\varphi = (y_{\alpha}, M_{\alpha})$ è un'applicazione analitica con valori in φ_T , si avrà $F[(y, M_0)] = F[(y, M_1)]$ se (y, M_0) è un prolungamento di (y, M_1) e $(y, M_1) \in V_{\varepsilon}(y, M_0) \subset \Omega$.

Infatti sia (y_{α}, M_{α}) l'applicazione analitica del lemma precedente. Si avrà che $f(\alpha) = F[(y_{\alpha}, M_{\alpha})]$ è analitica nel piano complesso. Siccome $f(\alpha) = \text{costante}$ per $R(\alpha) \leq 0$, si avrà $f(\alpha) = \text{costante}$ per qualsiasi α , donde il teorema.

BIBLIOGRAFIA

- [1] PAUL LEVY-FRANCO PELLEGRINO, *Problèmes concrets d'Analyse Fonctionnelle*, Gauthier Villars (1951).
- [2] DOMINGOS PISANELLI, *Alguns Funcionais Analíticos e seus campos de definição*, «Boletim da Sociedade de Matematica de S. Paulo», vol. 9, fasc. 1° e 2°.
- [3] H. G. TILLMANN, *Die Fortsetzung Analytischer Funktionale* «Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg», Band 21, Heft. 3-4.
- [4] H. G. TILLMANN, *Zur Definition der analytischer Funktionale*, «Archiv der Mathematik, Vol. X (1959), Fasc. 1.