
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICO BOMBIERI

**Un collegamento tra un teorema di K.
Prachar e un teorema di G. Ricci sulle
differenze di numeri primi consecutivi.**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
15 (1960), n.1, p. 30–33.*

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_30_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_30_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Un collegamento tra un teorema di K. Prachar e un teorema di G. Ricci sulle differenze di numeri primi consecutivi.

Nota di ENRICO BOMBIERI (a Milano)

Sunto. - In questa nota si ricava, come corollario di un teorema di G. RICCI sulle differenze di numeri primi consecutivi, un significativo risultato (Teorema A) complementare di uno di K. PRACHAR.

Summary. - In this short note, as corollary of a G. RICCI's theorem on the difference between consecutive prime numbers, we give an interesting result (Theorem A) which is corresponding to one of K. PRACHAR.

1. Il problema.

Sia $2, 3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots$ la successione dei numeri primi. Il comportamento delle differenze $p_{n+1} - p_n$ tra numeri primi consecutivi è stato oggetto di numerosi studi anche recenti; tra i vari problemi che si presentano su questo argomento considereremo in questa breve Nota il seguente:

PROBLEMA.

Determinare due funzioni $f_1(x), f_2(x)$ monotone non decrescenti tali che:

(1) per « quasi tutte » le differenze di numeri primi consecutivi è

$$f_1(p_n) \leq p_{n+1} - p_n \leq f_2(p_n).$$

Con maggior precisione (tenendo conto del Primzahlsatz): tali che, posto $d_n = p_{n+1} - p_n$ e fissato $0 < \delta < 1$, sia

$$(2) \quad \sum_{\substack{f_1(p_n) \leq d_n \leq f_2(p_n) \\ (1-\delta)N \leq p_n \leq N}} 1 \sim \sum_{(1-\delta)N \leq p_n \leq N} 1 \sim \delta N / \log N.$$

È tuttavia più conveniente per la trattazione considerare in luogo della prima somma in (2) un'altra analoga, e pertanto la relazione asintotica seguente

$$(3) \quad \sum_{\substack{f_1(N) \leq p_n \leq f_2(N) \\ (1-\delta)N \leq p_n \leq N}} 1 = D_\delta(N; f_1, f_2) \sim \delta N / \log N.$$

Infatti se le funzioni $f_i(x)$ verificano le condizioni

$$f_i(p_n) \sim f_i(N) \quad \text{per} \quad (1 - \delta)N \leq p_n \leq N \quad \text{e} \quad N \rightarrow +\infty,$$

(e questo avviene se le $f_i(x)$ sono, ad es., dell'ordine di una potenza finita di $\log x$) è evidente che le (1), (2) e (3) sono equivalenti tra loro.

2. I risultati.

TEOREMA A: (G. RICCI [4], K. PRACHAR [3]):

Sia $g(x)$ monotona, crescente a $+\infty$ (lentamente quanto si vuole); allora per « quasi tutte » le differenze $p_{n+1} - p_n$ si ha:

$$(4) \quad \frac{\log p_n}{g(p_n)} \leq p_{n+1} - p_n \leq g(p_n) \log p_n,$$

« quasi tutte » nel senso precisato dalla (2) e dalla (3).

La disuguaglianza a sinistra è un caso particolare di un teorema di K. PRACHAR (vedi [3], Satz 6.1, pp. 163-164). Essa è esplicitamente stabilita nell'opera citata nell'osservazione a pag. 164.

Per dimostrare la disuguaglianza a destra usiamo il seguente

TEOREMA B: (G. RICCI [4], Teorema VI oppure Teorema XIV):

Sia $\varepsilon > 0$, $0 < \delta \leq 1$; allora per $N \geq N_0(\varepsilon, \delta)$ risulta

$$(5) \quad D_\delta \left(N; 0, \frac{1}{\varepsilon} \log N \right) \geq (1 - \varepsilon) \delta N / \log N.$$

Sia $g(N)$ monotona, crescente a $+\infty$, lentamente quanto si vuole, e determiniamo il minimo $N_1 = N_1(\varepsilon, \delta; g)$ tale che sia

$$N_1 \geq N_0(\varepsilon, \delta) \quad \text{e} \quad g(N_1) \geq 1/\varepsilon.$$

Allora per la (5) è a maggior ragione:

$$D_\delta(N; 0, g(N) \log N) \geq (1 - \varepsilon) \delta N / \log N \quad \text{per} \quad N \geq N_1.$$

Per l'arbitrarietà di ε ne segue

$$(6) \quad D_\delta(N; 0, g(N) \log N) \geq \delta N / \log N - o(\delta N / \log N).$$

Ma ora per il « Primzahlsatz » :

$$(7) \quad D_{\delta}(N; 0, g(N) \log N) \leq D_{\delta}(N; 0, \infty) = \delta N / \log N + o(\delta N / \log N)$$

e dalla (6) e dalla (7) si ottiene

$$D_{\delta}(N; 0, g(N) \log N) \sim \delta N / \log N, \text{ cioè la (3).}$$

3. Brevi richiami e osservazioni di inquadramento.

Del problema sopra indicato si sono occupati anche altri autori. Per quanto riguarda la disuguaglianza a sinistra del teorema A. WALFISZ [6] ha dimostrato:

$$p_{n+1} - p_n > \log p_n / (\log \log \log p_n)^2$$

per « quasi tutte » le differenze $p_{n+1} - p_n$. Il risultato di K. PRACHAR è tuttavia più preciso.

Sulla disuguaglianza a destra del teorema A occorre ricordare che: ammettendo la validità dell'ipotesi di RIEMANN, H. CRAMÉR [1] ha dimostrato:

TEOREMA C:

Se $h = N^{\alpha}(\log N)^{\beta}$, $0 \leq \alpha < 1/2$, $\beta \geq 0$, è:

$$\sum_{\substack{d_n > h \\ p_n \leq N}} d_n = O(N \log^3 N / (h \log h))$$

e A. SELBERG [5] ha migliorato questo risultato con:

$$(8) \quad \sum_{\substack{d_n < h \\ p_n \leq N}} d_n = O(N \log^2 N / h)$$

(sempre però ammettendo l'ipotesi di RIEMANN).

Come corollario del teorema di A. SELBERG si ricava:

(9) per « quasi tutte » le differenze $p_{n+1} - p_n$ si ha

$$p_{n+1} - p_n < g(p_n) \log^2 p_n,$$

dove $g(x)$ è monotona, crescente a $+\infty$ (lentamente quanto si vuole), ma sempre ammettendo l'ipotesi di RIEMANN.

Occorre tuttavia osservare che la (8) è una affermazione molto più forte del teorema A per ciò che riguarda il numero delle differenze « molto grandi » e questo giustifica che si richieda l'ipotesi di RIEMANN nella dimostrazione del teorema di A. SELBERG.

Il teorema A sarebbe il « migliore possibile » se, per ogni $H > 1$ (grande a piacere) valesse :

$$(10) \quad D_{\delta}(N; (1/H) \log N, H \log N) < \rho \delta N / \log N,$$

con un $\rho = \rho(H) < 1$ e ogni $N \geq N_2(H, \delta)$; ma non siamo in grado di decidere sulla validità o meno della (10). Vale però la pena di ricordare, in questo ordine di idee, il seguente teorema :

TEOREMA D : (G. RICCI [4], Teorema X, osservazioni) :

Siano μ e λ due costanti, $0 \leq \mu < \lambda \leq +\infty$, tali che

$$D_{\delta}(N; \mu \log N, \lambda \log N) \sim \delta N / \log N.$$

Allora necessariamente è :

$$\mu \leq 15/16, \quad \lambda \geq \mu + 1/8.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. CRAMÉR, *On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers*, « Acta Arith. », 2 (1936), 23-46.
- [2] LOO-KENG HUA, *Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie*, « Enzykl. der Math. Wissen. », Bd. 12, Heft 13, Teil 1.
- [3] K. PRACHAR, *Primzahlverteilung*, Berlin (1957), oppure *Über ein Resultat von A. Walfisz*, « Mh. für Math. », 58 (1954), 114-116.
- [4] G. RICCI, *Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi*, « Riv. Mat. Univ. Parma », 5 (1954), 3-54.
- [5] A. SELBERG, *On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes*, « Arch. Math. Naturvid. », 47 (1943), 87-105.
- [6] A. WALFISZ, *Isolierte Primzahlen* (in lingua russa), « Doklady Akad. Nauk SSSR », 90 (1953), 711-713.