
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIERANITA RIZZONELLI

Risoluzione delle equazioni del tipo “Faltung” con la trasformata di Laplace, senza ipotesi sul comportamento all’infinito.

*Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
15 (1960), n.1, p. 10–19.*

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_10_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_10_0)

L’utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l’utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Risoluzione delle equazioni del tipo « Faltung » con la trasformata di Laplace, senza ipotesi sul comportamento all'infinito.

Nota di PIERANITA RIZZONELLI (a Milano)

Sunto. - Si estendono dei teoremi di esistenza ed unicità della soluzione di equazioni del tipo « Faltung » senza condizioni asintotiche, per $t \rightarrow +\infty$, per le funzioni assegnate e per la soluzione. Si considera anche il caso di equazioni concernenti composizioni secondo varietà lineari.

Summary. - Some existence and uniqueness theorems of the solution of equations of « Faltung » type are extended without imposing asymptotic conditions, for $t \rightarrow +\infty$, on the data and on the solution. The case of equations regarding compositions on linear manifolds is also considered.

Nell'applicare il metodo della trasformazione di LAPLACE per ottenere dei teoremi di esistenza e unicità della soluzione di sistemi di equazioni integro-differenziali del tipo « Faltung » ⁽¹⁾ si fanno delle ipotesi sul comportamento asintotico, per $t \rightarrow +\infty$, delle funzioni che, con ulteriori considerazioni, si possono eliminare.

Tale eliminazione è l'oggetto della presente nota. In essa mi varrò di un accorgimento analogo a quello introdotto da L. AMERIO ⁽²⁾ per eliminare le ipotesi sul comportamento asintotico delle

⁽¹⁾ P. RIZZONELLI, *Estensione del teorema del Dini sulle funzioni implicite alle equazioni integro-differenziali del tipo « Faltung »*, « Rendic. dell'Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, Classe di Scienze », Vol. 92 (1957), pp. 117-131.

⁽²⁾ L. AMERIO, *Sull'applicazione della trasformata di Laplace all'integrazione di equazioni a derivate parziali senza alcun vincolo sul comportamento all'infinito della soluzione*, « Rendic. del Circolo Matematico di Palermo », Tomo LXIII (1940-41).

L. AMERIO, *Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico*, « Rendic. dell'Accademia Naz. dei Lincei », note I, II e III; Vol V fasc 6, Vol VI fasc. 1, Vol VI fasc. 2 (1948).

G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace Transformation*, Band III, Verlag Birkhäuser Basel (1956), pp. 261-262.

soluzioni di equazioni differenziali trattate con la trasformata di LAPLACE.

1. Si consideri un sistema di m equazioni integrali

$$(1) \quad f_i(X(t), Y(t)) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

in cui $X(t)$ è un vettore assegnato, $X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$, e $Y(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_m(t)\}$ è il vettore incognito. Per le componenti $X_j(t)$ del vettore $X(t)$ si fanno le ipotesi che siano integrabili secondo LEBESGUE nell'intervallo limitato $0 \leq t \leq T$, ed esistono perciò le trasformate

$$(2) \quad x_j(p) = \int_0^T e^{-pt} X_j(t) dt \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

La (1) si ottiene sostituendo i prodotti integrali ai prodotti algebrici nel sistema

$$(3) \quad f_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

avendo indicato con $f_i(x, y)$ m funzioni analitiche delle $n+m$ variabili $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, nulle nel punto $x = y = 0$ e tali che risulti diverso da zero, nell'origine, il determinante jacobiano delle f_i rispetto alle componenti y_k del vettore y , sia cioè

$$(4) \quad \left[\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right]_{x=0, y=0} \neq 0.$$

Il sistema (3) è allora, come ben noto, univocamente risolubile rispetto alle y_k in un intorno della radice $(0, 0)$ e le m funzioni analitiche che si ottengono sono rappresentate da m serie di potenze:

$$(5) \quad y_k(x) = \sum_{\nu} b_{\nu}^{(k)} x^{\nu} \quad (b_0^{(k)} = 0) \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

(³) Nella (5) si è posto, con notazione consueta, x^{ν} per indicare il prodotto $x_1^{\nu_1} \cdot x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$ e $\nu = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$ è un vettore a componenti intere non negative.

Mostreremo che, nelle ipotesi enunciate, il sistema integrale (1) ammette, per $0 \leq t \leq T$, una ed una sola soluzione $Y(t)$ data dal vettore di componenti

$$(6) \quad Y_k(t) = \sum_{\nu} b_{\nu}^{(k)} X^{*\nu}(t) \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Nella (6) i coefficienti $b_{\nu}^{(k)}$ sono gli stessi che compaiono nella (5) e le serie convergono, quasi ovunque, nell'intervallo $0 \leq t \leq T$.

Si prolunghi la definizione del vettore $X(t)$ per $t > T$ in modo che le funzioni $X_j(t)$ risultino assolutamente trasformabili secondo LAPLACE, nell'intervallo $0 \leq t < \infty$: possiamo ad esempio porre

$$\bar{X}_j(t) = \begin{cases} X_j(t) & \text{per } t \leq T \\ 0 & \text{per } t > T \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ed indicheremo con $\bar{X}(t) = \{\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)\}$ il nuovo vettore definito in $0 \leq t < \infty$ ed ovviamente trasformabile in valore assoluto. Allora il sistema di equazioni integrali

$$f_i(\bar{X}(t), \bar{Y}(t)) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

che si ottiene ancora dalla (3), con le consuete sostituzioni, ammette per un teorema già dimostrato ⁽⁵⁾, nell'intervallo $0 \leq t < \infty$, escluso al più un insieme di misura nulla, una ed una sola soluzione $\bar{Y}(t) = \{\bar{Y}_1(t), \bar{Y}_2(t), \dots, \bar{Y}_m(t)\}$ assolutamente trasformabile, di componenti

$$\bar{Y}_k(t) = \sum_{\nu} b_{\nu}^{(k)} \bar{X}^{*\nu}(t), \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

le serie essendo quasi ovunque convergenti in $0 \leq t < \infty$.

È evidente che per $t \leq T$ le funzioni $\bar{Y}_k(t)$ e $Y_k(t)$, queste ultime definite dalla (6), ($k = 1, 2, \dots, m$) coincidono essendo $\bar{X}_j(t) = X_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Pertanto, per $0 \leq t \leq T$, una soluzione del sistema (1) esiste ed è data dalla (6).

Tale soluzione è anche unica.

⁽⁴⁾ La scrittura $X^{*\nu}(t)$ va interpretata nel modo seguente: $X^{*\nu}(t) = X_1^{*\nu_1} * X_2^{*\nu_2} * \dots * X_n^{*\nu_n}(t)$, con la convenzione di non scrivere quei fattori cui compete esponente $\nu_j = 0$.

⁽⁵⁾ Vedi loc. citato in ⁽⁴⁾.

Supponiamo infatti che $Y^0(t) = \{Y_1^0(t), Y_2^0(t), \dots, Y_m^0(t)\}$ sia una ulteriore soluzione del sistema (1) per $0 \leq t \leq T$. Prolunghiamo per $t > T$ le definizioni dei vettori $X(t)$ e $Y^0(t)$ ponendo

$$X(t) = \bar{X}(t) \quad \text{per } 0 \leq t < \infty$$

e inoltre

$$Y^0(t) = 0 \quad \text{per } t > T.$$

Avremo allora, quasi ovunque in $0 \leq t < \infty$, per un teorema di AMERIO ⁽⁶⁾,

$$f_i(\bar{X}(t), Y^0(t)) = U_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

essendo le $U_i(t)$ delle funzioni assolutamente trasformabili, nulle per $0 \leq t \leq T$.

Le funzioni $f_i(x, y) - u_i = \Phi_i(x, y, u)$, avendo posto $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ sono ancora analitiche, nulle nell'origine ed inoltre risulta

$$\left[\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right]_{x=0, y=0, u=0} = \left[\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right]_{x=0, y=0} \neq 0.$$

Pertanto il sistema

$$\Phi_i(x, y, u) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

è univocamente risolvibile, rispetto alle componenti y_k del vettore y , nell'intorno dell'origine ed ammette la soluzione analitica

$$y_k(x, u) = \sum_{m, n} c_{m, n}^{(k)} x^m u^n \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Ciascuna funzione $y_k(x, u)$ si può anche scrivere come somma di $m + 1$ funzioni analitiche: una dipendente solo dalle n variabili $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x$ e le altre funzioni delle $n + m$ variabili x , e $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} = u$.

Si avrà allora

$$y_k(x, u) = \varphi_k(x) + \sum_1^m u_i g_{i, k}(x, u).$$

⁽⁶⁾ L. AMERIO, *Su alcune questioni relative alla trasformazione di Laplace*, « Rendic. dell'Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, Classe di Scienze », Vol. LXXVI, 7° della serie III, fasc. II (1942-43).

Ma per $u = 0$ (cioè per $u_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$)) $\Phi_i(x, y, 0) \equiv f_i(x, y)$ e pertanto le $y_k(x, 0) = \varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) coincidono con le funzioni $y_k(x)$ date dalla (5).

Sarà quindi

$$y_k(x, u) = \sum_{\nu} b_{\nu}^{(k)} x^{\nu} + \sum_1^m u_i \sum_{r,s} \beta_{r,s}^{(i,k)} x^r u^s.$$

In virtù di teoremi già dimostrati possiamo affermare che il sistema di equazioni integrali

$$f_i(\bar{X}(t), Y^0(t)) - U_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ammette nell'intervallo $0 \mid - \infty$ una ed una sola soluzione assolutamente trasformabile, di componenti

$$\begin{aligned} Y_k^0(t) &= \sum_{\nu} b_{\nu}^{(k)} \bar{X}^{*\nu}(t) + \sum_1^m U_i(t) * \sum_{r,s} \beta_{r,s}^{(i,k)} \bar{X}^{*r} * U^{*s}(t) = \\ &= \bar{Y}_k(t) + \sum_1^m U_i * W_{i,k}(t). \end{aligned}$$

Si osservi che, come si è già notato, per $0 \leq t \leq T$, $\bar{Y}_k(t) \equiv Y_k(t)$ e inoltre $U_i(t) = 0$. Perciò per $0 \leq t \leq T$ risulta

$$\sum_1^m U_i * W_{i,k}(t) = 0 \quad \text{quasi ovunque}$$

e quindi

$$Y_k^0(t) = Y_k(t).$$

La tesi è così provata.

Per quanto riguarda i sistemi di equazioni integro-differenziali, nella dimostrazione del teorema di esistenza e di unicità della soluzione ci si riporta al caso di un sistema di equazioni integrali. Pertanto quello che si è ora detto per questi sistemi continua a valere anche nel caso di sistemi di equazioni integro-differenziali.

2. Analizziamo ora le equazioni integrali, non lineari, del tipo «Faltung» nelle quali si considerano composizioni secondo varietà lineari (7).

(7) P. RIZZONELLI, *Sulla risoluzione delle equazioni integrali concernenti composizioni secondo varietà lineari*, « Bollettino U. M. I. », Anno XIV, n. 3, pp. 327-337 (1959).

Si tenga presente che nella nota qui citata, in accordo con una correzione apportata in seguito, un vettore è detto positivo o negativo a seconda che sia positiva o negativa la minima delle sue componenti.

Per maggior chiarezza di esposizione ci riferiremo ad un'equazione in cui le funzioni assegnate sono solamente due.

Sia $X(\eta_1, \dots, \eta_k) = X(\eta)$ una funzione definita nel dominio rettangolare Γ ($0 \leq \eta_j \leq \Gamma_j$; $j = 1, \dots, k$) dello spazio σ a k dimensioni e $Y(t_1, \dots, t_N) = Y(t)$ una funzione definita nel dominio T ($0 \leq t_i \leq T_i$, $i = 1, \dots, N$) dello spazio τ ad N dimensioni con $k < N$. Con t ed η si sono indicati i vettori colonna $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix}$ e $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_k \end{bmatrix}$.

Sia $A = [a_{r,s}]$ una matrice reale di ordine $[N, k]$ a elementi $a_{r,s} \geq 0$ e non avente colonne nulle. Fissato in τ un punto t si consideri la varietà lineare V , passante per t , e di equazione vettoriale

$$\xi = t - A\eta,$$

avendo indicato con ξ il vettore colonna $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}$.

Le funzioni $X(\eta)$ e $Y(t)$ siano integrabili secondo LEBESGUE rispettivamente nei domini Γ e T . Esisteranno perciò le trasformate (a dominio di integrazione limitato)

$$(7) \quad \begin{aligned} y(p) &= \int_T e^{-pt} Y(t) dT = \mathcal{L}_T(Y) \\ x(q) &= \int_\Gamma e^{-q\eta} X(\eta) d\Gamma = \mathcal{L}_\Gamma(X), \end{aligned}$$

avendo indicato con p il vettore riga complesso $p = [p_1, \dots, p_N]$ e con q il vettore riga $q = pA$.

Sia

$$(8) \quad f(x, y, z) = \sum_{m,n,r} a_{m,n,r} x^m y^n z^r \quad (m \geq 0, n + r \geq 1)$$

una funzione analitica delle variabili x, y, z , per la quale risulti $f(x, 0, 0) \equiv 0$ ed $f_z(0, 0, 0) \neq 0$. Allora, per il teorema del DINI sulle funzioni implicite, l'equazione

$$f(x, y, z) = 0$$

è univocamente risolubile, rispetto a z , in un intorno dell'origine e si ha

$$(9) \quad z(x, y) = \sum_{\mu, \nu} b_{\mu, \nu} x^\mu y^\nu \quad (\mu \geq 0, \nu \geq 1);$$

risulta pertanto $z(x, 0) \equiv 0$.

Alla (8) associamo, in T , l'equazione integrale

$$(10) \quad f(X, Y, Z)(t) = \sum_{m,n,r} a_{m,n,r} \{ (X^{*m})_V^*(Y^{*n}) \} * Z^{*r}(t) = 0$$

nella funzione incognita $Z(t)$. Nella (10) si è indicato con X^{*m} la m -esima potenza del prodotto integrale calcolata in Γ , con Y^{*n} la n -esima potenza del prodotto integrale calcolata in T e con

$$(X_V^* Y)(t) = \int_{\Gamma_t} X(\eta) Y(t - A\eta) d\sigma$$

il prodotto di composizione secondo la varietà lineare V . Con Γ si è poi indicato l'insieme definito dalle limitazioni

$$(11) \quad 0 \leq t_j - \sum_1^k a_{jh} \eta_h, \quad 0 \leq \eta_h \leq \Gamma_h.$$

Nelle ipotesi poste l'equazione integrale (10) ammette, nel dominio T , una ed una sola soluzione data dalla funzione

$$(12) \quad Z(t) = \sum_{\mu, \nu} b_{\mu, \nu} (X^{*\mu})_V^* (Y^{*\nu})(t) \quad (\mu \geq 0, \nu \geq 1).$$

La serie (12) converge quasi ovunque in T e i coefficienti che in essa compaiono sono gli stessi della (9).

Infatti si prolunghino le definizioni delle funzioni $X(\eta)$ e $Y(t)$, al di fuori dei domini Γ e T , per $\eta_j \geq 0$ e $t_i \geq 0$ ($j = 1, \dots, k$; $i = 1, \dots, N$), ponendo

$$\bar{X}(\eta) = \begin{cases} X(\eta) & \text{per } \eta \in \Gamma \\ 0 & \text{per } \eta \notin \Gamma \end{cases}$$

e inoltre

$$\bar{Y}(t) = \begin{cases} Y(t) & \text{per } t \in T \\ 0 & \text{per } t \notin T. \end{cases}$$

Le funzioni $\bar{X}(\eta)$ e $\bar{Y}(t)$ sono ovviamente assolutamente trasformabili e risulta

$$\mathcal{L}(\bar{Y}) = \int_{\tau'} e^{-\rho\tau} \bar{Y}(t) d\tau = \mathcal{L}_T(Y)$$

$$\mathcal{L}(\bar{X}) = \int_{\sigma'} e^{-q\sigma} \bar{X}(\eta) d\sigma = \mathcal{L}_\Gamma(X)$$

$$\bar{X}_V^* \bar{Y} = \int_{\Gamma_t'} \bar{X}(\eta) \bar{Y}(t - A\eta) d\sigma$$

essendo τ' e σ' i domini illimitati definiti rispettivamente dalle limitazioni $t_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, N$) e $\eta_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, k$). Si è indicato poi con Γ'_t il dominio definito dalle limitazioni

$$(13) \quad 0 \leq t_j - \sum_1^k a_{jh} \eta_h.$$

È ovviamente $\Gamma'_t \supseteq \Gamma_t$. Segue inoltre dalle (11) e (13) $\Gamma_t = \Gamma'_t \cap \Gamma$ e quindi, essendo $\bar{X}(\eta) = 0$ per $\eta \notin \Gamma$, nell'integrale potremo considerare solo i punti $\eta \in \Gamma$: risulterà allora

$$\begin{aligned} (\bar{X}_V^* \bar{Y})(t) &= \int_{\Gamma_t} \bar{X}(\eta) \bar{Y}(t - A\eta) d\sigma = \\ &= \int_{\Gamma_t} X(\eta) \bar{Y}(t - A\eta) d\sigma. \end{aligned}$$

Se poi è $t \in T$, ed $\eta \in \Gamma_t$, risulta $t - A\eta \in T$, e quindi

$$(\bar{X}_V^* \bar{Y})(t) = \int_{\Gamma_t} X(\eta) Y(t - A\eta) d\sigma = (X_V^* Y)(t).$$

L'equazione

$$f(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})(t) = 0 \quad (t \in \tau')$$

che si ottiene ancora dalla (8) con le consuete sostituzioni ammette, in virtù di un teorema già dimostrato ⁽⁸⁾, una ed una sola soluzione

$$(14) \quad \bar{Z}(t) = \sum_{\mu, \nu} b_{\mu, \nu} (\bar{X}^{*\mu})_V^* (\bar{Y}^{*\nu})(t) \quad (\mu \geq 0, \nu \geq 1)$$

assolutamente trasformabile e la serie (14) converge quasi ovunque in τ' .

Ma, per $\eta \in \Gamma$, è $X(\eta) \equiv \bar{X}(\eta)$ e per $t \in T$ è $Y(t) \equiv \bar{Y}(t)$ ed inoltre in T si ha, come già osservato,

$$(\bar{X}^{*\mu})_V^* (\bar{Y}^{*\nu})(t) = (X^{*\mu})_V^* (Y^{*\nu})(t).$$

Perciò, per $t \in T$ le funzioni $\bar{Z}(t)$, data dalla (14), e $Z(t)$ definita dalla (12) coincidono. Una soluzione dell'equazione (10) pertanto esiste ed è data dalla (12).

⁽⁸⁾ Vedi loc. citato in (7).

La soluzione è inoltre unica.

Supponiamo infatti che sia $Z^0(t)$ un'ulteriore soluzione dell'equazione (10) nel dominio T . Prolunghiamo ancora le definizioni di $X(\eta)$ per $\eta \notin \Gamma$ e di $Y(t)$ e $Z^0(t)$ per $t \notin T$ ponendo

$$X(\eta) = \bar{X}(\eta) \quad \text{in } \sigma'$$

$$Y(t) = \bar{Y}(t) \quad \text{in } \tau'$$

$$Z^0(t) = 0 \quad \text{per } t \notin T.$$

Sarà

$$f(\bar{X}, \bar{Y}, Z^0)(t) = U(t)$$

quasi ovunque in τ' , essendo $U(t)$ una funzione nulla (quasi ovunque) in T .

La funzione $f(x, y, z) - u = \Phi(x, y, z, u)$ è ancora analitica; risulta inoltre $\Phi(x, 0, 0, 0) \equiv 0$ e $\Phi_x(0, 0, 0, 0) \neq 0$.

Pertanto l'equazione

$$\Phi(x, y, z, u) = 0$$

è univocamente risolvibile, rispetto a z , nell'intorno dell'origine e la soluzione, analitica, si può porre nella forma

$$z(x, y, u) = \varphi(x, y) + u \{ g(x, y, u) + h(x) \}$$

essendo φ , g , ed h funzioni analitiche ed inoltre $g(x, 0, 0) \equiv 0$.

Ma, per $u = 0$, è $\Phi(x, y, z, 0) \equiv f(x, y, z)$ e quindi $z(x, y, 0) \equiv \varphi(x, y)$ coincide con la funzione $z(x, y)$ data dalla (9).

Sarà allora

$$z(x, y, u) = \sum_{\mu, \nu} b_{\mu, \nu} x^\mu y^\nu + u \sum_{p, r, s} c_{p, r, s} x^p y^r u^s + u \sum_n d_n x^n$$

$$(\nu \geq 1, r + s \geq 1).$$

In virtù di un teorema già menzionato possiamo affermare che l'equazione integrale

$$f(\bar{X}, \bar{Y}, Z^0)(t) - U(t) = 0$$

ammette, in τ' , una ed una sola soluzione assolutamente trasformabile

$$\begin{aligned} Z^0(t) &= \sum_{\mu, \nu} b_{\mu, \nu} (\bar{X}^{*\mu})_V^* (\bar{Y}^{*\nu})(t) + U * \sum_{p, r, s} c_{p, r, s} (\bar{X}^{*r})_V^* (\bar{Y}^{*s} * U^{*s})(t) \\ &+ (\sum_n d_n \bar{X}^{*n})_V^* U(t) = \\ &= \bar{Z}(t) + U * G(t) + (H_V^* U)(t). \end{aligned}$$

È facile constatare che per $t \in T$ si ha

$$Z^0(t) = Z(t).$$

Infatti, in T , $\bar{Z}(t) = Z(t)$ e inoltre è, quasi ovunque, $U(t) = 0$. Perciò risulta quasi ovunque in T

$$U * G(t) = 0$$

$$(H_V^* U)(t) = 0.$$

La tesi è pertanto dimostrata.

Nel caso di una generica equazione integrale o di sistemi di equazioni integrali concernenti composizioni secondo varietà lineari, si può dimostrare che continuano a valere teoremi di esistenza e di unicità per la soluzione pur prescindendo da condizioni asintotiche per le funzioni assegnate.

Ci riferiamo ora agli enunciati dei teoremi di cui ai paragrafi 2 e 3 del lavoro citato in (?) e supponiamo che le funzioni $X_k(\gamma^{(k)})$ ($k = 1, 2, \dots, l$) e $Y_h(t)$ ($h = 1, \dots, m$) che ivi compaiono siano definite rispettivamente nei domini Γ_k ($k = 1, \dots, l$) e T .

Con Γ_k si è indicato un dominio rettangolare appartenente allo spazio σ_k ad α_k dimensioni e definito dalle limitazioni: $0 \leq \eta_i \leq \Gamma_{k,i}$ ($i = 1, 2, \dots, \alpha_k$). Con T si è indicato un dominio rettangolare appartenente a τ e definito dalle disuguaglianze $0 \leq t_j \leq T_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$).

Inoltre si suppone che le funzioni $X_k(\gamma^{(k)})$ e $Y_h(t)$ siano integrabili, secondo LEBESGUE, rispettivamente nei domini limitati Γ_k e T . Con procedimento del tutto analogo a quello sopra esposto si dimostra che, nelle nuove ipotesi formulate, gli enunciati dei paragrafi 2 e 3 del lavoro (?) sono ancora verificate e pertanto, nel dominio $T \in \tau$, esiste ed è unica la soluzione dell'equazione integrale e del sistema di equazioni integrali ivi considerati.