Adriano Barlotti

La determinazione del gruppo delle proiettività di una retta in sè in alcuni particolari piani grafici finiti non desarguesiani.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 543–547.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_543_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

La determinazione del gruppo delle proiettività di una retta in sè in alcuni particolari piani grafici finiti non desarguesiani.

Nota di ADRIANO BARLOTTI (a Firenze)

Sunto. - *Si dimostra che, nel piano di Hughes di ordine 9, nel piano di traslazione (eccezionale) di ordine 9 e nel piano duale di quest'ultimo, il gruppo delle proiettività di una retta in sè coincide con il gruppo totale delle sostituzioni sui punti della retta.*

Si aggiunge poi l'esempio di un piano finito di traslazione di ordine 16 nel quale il gruppo delle proiettività di una retta in sè è almeno il gruppo alterno delle sostituzioni sui punti della retta.

Summary. - *We prove that on the Hughes plane of order 9, on the (exceptional) translation plane of order 9 and on its dual plane the projectivity group of a line is isomorphic to the symmetric group of the permutations of the points of the line.*

We add then the example of a finite translation plane of order 16 for which the projectivity group of a line is at least the alternating group of the permutations on the points of the line.

1. In un qualunque piano grafico (irriducibile) (1) si dice che una punteggiata e un fascio di rette (i cui sostegni non si appartengano) sono riferiti in una *prospettività* quando ad ogni punto della punteggiata si fa corrispondere la retta del fascio che lo contiene. Il prodotto di due di queste prospettività porta ad una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di due forme della stessa specie alla quale si dà ancora il nome di prospettività; infine si chiama *proiettività* la corrispondenza biunivoca che nasce fra gli elementi di due forme come prodotto di un numero finito qualsiasi di prospettività.

E' noto che, poste queste definizioni, in un qualsiasi piano grafico vale il seguente teorema:

Date due punteggiate r *ed* r'*, e fissati tre punti distinti*, A, B, C, *sulla prima di esse e tre punti pure distinti* A', B', C' *sulla seconda, esiste sempre almeno una proiettività fra la* r *e la* r' *che porta* A *in* A', B *in* B' *e* C *in* C'.

Nell'enunciato precedente le parole « *almeno una* » possono essere sostituite con l'espressione « *una ed una sola* » allora e al-

(1) Per la nozione di piano grafico (o proiettivo) si vedano, p. es., G. PICKERT [4], B. SEGRE [6] o G. ZAPPA [8].

lora soltanto che nel piano valga la proposizione configurazionale nota con il nome di « *Teorema di Pappo Pascal* » [2]. Nel caso contrario si presenta il problema di studiare l'insieme delle proiettività che portano la terna A, B, C in A', B', C', problema che si riconduce subito all'altro consistente nel *determinare il gruppo delle proiettività di una retta in sè.*

In questo lavoro esaminiamo la questione per il caso di alcuni piani finiti, e mostriamo come il gruppo delle proiettività di una retta in sè coincida con il gruppo totale delle sostituzioni sui punti della retta tanto nel caso del piano di HUGHES di ordine 9 (cfr. n. 3) come in quello del piano di traslazione eccezionale (*Ausnahmeebene* di ANDRÉ) (cfr. n. 4). La stessa proprietà vale naturalmente anche per il piano duale del piano eccezionale, e quindi per tutti i piani non desarguesiani d'ordine 9 che si conoscono. Si ottiene così un esempio di piani dello stesso ordine non isomorfi per i quali il gruppo delle proiettività di una retta in sè è il medesimo.

Si aggiunge infine (n. 5) l'esempio di un piano di traslazione di ordine 16 nel quale il gruppo in questione è almeno il gruppo alterno delle sostituzioni sui punti di una retta.

2. Poichè in generale un piano grafico non è dotato di simmetria nei confronti di tutti i suoi elementi, può a prima vista sembrare che la struttura del gruppo delle proiettività di una retta in sè possa variare quando si considerino rette diverse del medesimo piano. Ciò invece non accade. Infatti se r ed s sono due rette qualsiansi di un piano grafico, e indichiamo con G_r e con G_s i gruppi delle proiettività della retta r e della retta s in sè, si mostra facilmente che *i gruppi* G_r *e* G_s *risultano isomorfi.*

Infatti sia S un punto non appartenente nè ad r nè ad s, e indichiamo con σ la prospettività, di centro S, della r sulla s. Ad una proiettività ω di G_r facciamo corrispondere in G_s la proiettività $\sigma^{-1}\omega\sigma$. La corrispondenza che nasce in tal modo fra gli elementi di G_r e quelli di G_s è biunivoca, e poichè conserva l'operazione di prodotto, ne segue l'asserto.

E' quindi sufficiente, per risolvere il nostro problema, determinare il gruppo G_r per una particolare retta del piano.

3. Consideriamo il sistema completo di quadrati latini mutuamente ortogonali riportato in [4] alla pag. 293. Tale sistema rap-

(2) Cfr., p. es. G. PICKERT [4], pag. 139.

presenta un piano affine che, completato con l'aggiunta della retta impropria, r, diviene il piano di HUGHES di ordine 9 (³). Indichiamo con A, B, C, D, E, F, G, H, I, K i punti della retta r, e precisamente (impiegando — come faremo in tutto questo n. — le notazioni usate in [4] nelle pagg. 290-293) siano A e B i centri dei fasci Π e Π' e C, D, ... , K quelli dei fasci di rette associati alle matrici $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, ... , $L^{(8)}$.

La prospettività σ che si ottiene proiettando la retta r dal punto $(0, 0)$ sulla retta $\nu = 4$ si può rappresentare con il seguente schema, nel quale, sotto ogni punto della retta r è indicato il punto della $\nu = 4$ nel quale esso è portato dalla σ, e dove i punti della retta $\nu = 4$ diversi da A sono per semplicità indicati mediante il loro valore di μ:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & K \\ A & 0 & 4 & 8 & 7 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia poi τ la prospettività che si ottiene proiettando la retta $\nu = 4$ su r dal punto $(3, 0)$:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ A & B & C & D & I & H & K & G & F & E \end{pmatrix}.$$

La proiettività $\omega = \sigma \cdot \tau$ della retta r in sè opera sui punti della r come la sostituzione:

$$(A)(B)(CHK)(DEF)(GI),$$

e quindi la ω^3 è una proiettività della retta r in sè che consta dell'unico ciclo (GI).

Ma il gruppo G_r delle proiettività di una retta in sè è triplamente transitivo sui punti della retta stessa, e quindi fra gli elementi di G_r figurano tutte le possibili trasposizioni. Ne segue allora che G_r è il gruppo totale delle sostituzioni sui punti di r.

(³) Tale piano è stato studiato per la prima volta da O. VEBLEN e J. H. M. WEDDERBURN in [7] come esempio di piano non desarguesiano. Il procedimento usato per ottenerlo è stato successivamente generalizzato da D. H. HUGHES in [2] che ha ottenuto tutto un sistema di piani non desarguesiani particolarmente interessante, perchè costituisce l'unico esempio finora noto di piani grafici finiti che non soddisfano la condizione di linearità.

Lo studio del gruppo delle collineazioni di detti piani è stato effettuato da G. ZAPPA in [10] e da L. A. ROSATI in [5].

4. Prendiamo adesso in esame il piano grafico sul quasicorpo associativo (non distributivo) d'ordine 9 ([4]), noto come piano di traslazione eccezionale (Ausnahmeebene) ([5]). Vogliamo mostrare come anche per questo piano il gruppo delle proiettività di una retta in sè è il gruppo totale delle sostituzioni sui punti della retta ([6]).

Consideriamo la retta, r, di equazione $y = 0$, e poniamo per i punti di questa: $A \equiv (1, 0, 0)$, $B \equiv (0, 0, 1)$, $C \equiv (1, 0, 1)$, $D \equiv (-1, 0, 1)$, $E \equiv (j, 0, 1)$, $F \equiv (-j, 0, 1)$, $G \equiv (1 + j, 0, 1)$, $H \equiv (1 - j, 0, 1)$, $I \equiv (-1 + j, 0, 1)$, $K \equiv (-1 - j, 0, 1)$. Indichiamo poi con s la retta di equazione $jx + y + z = 0$.

Effettuando i calcoli necessari si riconosce che il prodotto della prospettività di r su s dal punto $(0, 1, 0)$, per la prospettività di s su r dal punto $(0, 1, 1)$ è una proiettività della retta r in sè che ha B ed E come punti uniti, e che opera sui restanti punti come la sostituzione:

$$(AF)(CHG)(DKI).$$

Poichè il cubo di questa proiettività si riduce all'unica trasposizione (AF), per il ragionamento effettuato al termine del n. 3 segue la proprietà che volevamo dimostrare.

5. Sia γ_{16} il campo di Galois d'ordine 16 che si ottiene, p. es., dal campo γ_2 delle classi di resti modulo 2 mediante l'aggiunzione simbolica di una radice, α, dell'equazione (irriducibile in γ_2) $x^4 + x + 1 = 0$. Gli elementi non nulli di γ_{16} coincidono con le successive potenze di α, che è una radice primitiva quindicesima dell'unità.

Partendo da γ_{16} si può costruire un quasicorpo destro, Q_{16}, di ordine 16 continuando ad effettuare l'addizione nel solito modo, ed introducendo in luogo della moltiplicazione una nuova composizione $a \circ b$ definita mediante le seguenti regole ([7]):

$$0 \circ a = a \circ 0 = 0$$

$$\alpha^s \circ \alpha^t = \begin{cases} \alpha^{s+t} & \text{se } s \not\equiv 2 \pmod 3 \\ \alpha^{s+4t} & \text{se } s \equiv 2 \pmod 3) \end{cases} .$$

([4]) Per la definizione di questo cfr., p. es., G. Pickert [4] pag. 95.

([5]) Cfr. J. André [1], o anche G. Pickert [4] pag. 216 e segg.

([6]) La ricerca che ha portato al risultato che esponiamo in questo n. è stata molto semplificata dal fatto che per essa abbiamo potuto far uso, per gentile concessione dell'A., della « tavola delle determinazioni » relativa al piano in questione, che è stata costruita dal dr. R. Magari in occasione degli studi che hanno costituito l'oggetto della sua tesi di laurea e che è riportata in detta tesi.

([7]) La dimostrazione che il sistema a doppia composizione che così si ottiene è effettivamente un quasicorpo si trova in Lenz [3].

Consideriamo ora il piano grafico costruito sopra il quasicorpo Q_{16} e, usando per semplicità coordinate non omogenee, indichiamo con A il punto improprio della retta $y = 0$ e poniamo:

$$\begin{array}{llll} B \equiv (0,\ 0) & C \equiv (1,\ 0) & D \equiv (\alpha,\ 0) & E \equiv (\alpha^2,\ 0) \\ F \equiv (\alpha^3,\ 0) & G \equiv (\alpha^4,\ 0) & H \equiv (\alpha^5,\ 0) & I \equiv (\alpha^6,\ 0) \\ K \equiv (\alpha^7,\ 0) & L \equiv (\alpha^8,\ 0) & M \equiv (\alpha^9,\ 0) & N \equiv (\alpha^{10},\ 0) \\ O \equiv (\alpha^{11},\ 0) & P \equiv (\alpha^{12},\ 0) & Q \equiv (\alpha^{13},\ 0) & R \equiv (\alpha^{14},\ 0). \end{array}$$

Se proiettiamo la retta r, di equazione $y = 0$, dal punto $(0,\ \alpha^2)$ sulla retta $y = \alpha^5 \circ x + 1$, e riproiettiamo i punti così ottenuti da $(0,\ \alpha^{11})$ sulla r, otteniamo una proiettività, ω, di questa retta in sè. La ω ha come punti uniti B ed N e permuta i restanti punti secondo la sostituzione:

$$(AREC)\,(DPIGHKOL)\,(FMQ).$$

La ω^8 è data quindi dall'unico ciclo:

$$(FMQ)\,.$$

Poichè, come abbiamo già osservato, il gruppo G_r, delle proiettività di una retta in sè è triplamente transitivo, ne segue che fra gli elementi di G_r figurano tutti i cicli del terzo ordine. Allora, per un noto teorema della teoria dei gruppi (8), G_r coincide o col gruppo totale o col gruppo alterno.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDRÉ J., *Projektive Ebenen über Fastkörpern*, «Math. Zeitschrift», 62, 137-160 (1955).

[2] HUGHES D. H., *A class of non-Desarguesian projective planes*, «Canadian J. Math.», 9, 378-388 (1957).

[3] LENZ H., *Beispiel einer endlichen projektiven Ebene, in der einige, aber nicht alle Vierecke kollineare Diagonalpunkte haben*, «Arch. Math.», 4, 327-330 (1953).

[4] PICKERT G., *Projektive Ebenen*, Berlin, Springer, 1955.

[5] ROSATI L. A., *I gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, «Boll. U. M. I.», (3) 13, 505-513 (1958).

[6] SEGRE B., *Lezioni di geometria moderna*, vol. I, Bologna, Zanichelli, 1948.

[7] VEBLEN O. and J. H. M. WEDDERBURN, *Non desarguesian and non pascalian geometries*, «Trans. Amer. Math. Soc.», 8, 379-388 (1907).

[8] ZAPPA G., *Reticoli e geometrie finite*, lezioni raccolte da G. ZACHER. Napoli, Liguori, 1952.

[9] ZAPPA G., *Gruppi, corpi, equazioni*, a cura di R. PERMUTTI, II ed. Napoli, Liguori, 1954.

[10] ZAPPA G., *Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, «Boll. U. M. I.», (3), 12, 507-516 (1957).

(8) Cfr., p. es., G. ZAPPA [9], pag. 153.