Bollettino
Unione Matematica Italiana

Demore Quilghini

Il principio dell'effetto giroscopico nel caso di un sistema materiale rigido piano a struttura non giroscopica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 532–536.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_532_0>

Il principio dell'effetto giroscopico nel caso di un sistema materiale rigido piano a struttura non giroscopica.

Nota di DEMORE QUILGHINI (a Firenze)

Sunto. - *Si studia il moto di rapida precessione di un sistema rigido piano a struttura non giroscopica e si dimostra che, sotto opportune ipotesi sul sistema di forze applicate, si verificano ancora i fenomeni giroscopici.*

Summary. - *We are concerned with the motion of rapid precession of a flat rigid body which has not a gyroscope structure, and we proof that, with suitable hypothesis to the applied strengths, the gyroscope phenomena still happen.*

In un recente lavoro [1] (1) ho studiato la precessione di un sistema rigido S intorno ad un punto fisso O supponendo che S sia animato inizialmente da una fortissima velocità di rotazione ω_0 con parte preponderante parallela ad un asse principale di inerzia per O ed a cui compete momento di inerzia massimo o minimo.

Precisamente, indicata con $T(O;\, x,\, y,\, z)$ una terna principale di inerzia per O solidale con S, detti A, B, C i rispettivi momenti di inerzia e i, j, k i versori degli assi, posto $\omega_0 = p_0 i + q_0 j + r_0 k$, se p_0, q_0 e $\frac{1}{r_0}$ sono infinitesimi dello stesso ordine, se risulta $A + B \neq C$ ed inoltre la derivata assoluta, rispetto al tempo, del momento M, fatto rispetto ad O, delle forze applicate ad S è un vettore di modulo limitato al divergere di r_0, si dimostra che le componenti p e q del vettore velocità di rotazione $\omega = pi + qj + rk$ sono funzioni infinitesime del tempo dell'ordine di $\frac{1}{r_0}$. Inoltre si scrive una equazione che approssima l'atto di moto del sistema S a meno di infinitesimi dell'ordine di $\frac{1}{r^2_0}$.

Se invece $A + B = C$, caso di un sistema rigido piano, si dimostra che il modulo del vettore $\dot{k} = qi - pj$ è dell'ordine del modulo

(1) I numeri in neretto ed in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine della nota.

del vettore $(A - B)k \wedge \int_0^t M(\tau)d\tau$. Quindi se $A \neq B$, cioè se il sistema S non è a struttura giroscopica, e il vettore $k \wedge \int_0^t M(\tau)d\tau$ non è di modulo infinitesimo al divergere di r_0, cosa che si verifica ad esempio se M è un vettore costante nel riferimento fisso, nel qual caso si ha anche $\dot{M} = 0$. non si verificano per un sistema materiale piano i fenomeni giroscopici che dipendono dall'essere p e q funzioni infinitesime del tempo, quale, ad esempio, la tenacia del. l'asse di rapida rotazione.

Il citato lavoro ebbe origine da due ricerche di F. STOPPELLI ([**2**] e [**3**]) nelle quali viene risolto l'analogo problema di approssimare l'atto di moto del sistema S con ipotesi sulle forze applicate diverse dalle nostre.

In queste ricerche il Prof. STOPPELLI non affronta il caso in cui il sistema S è piano $(A + B = C)$ mentre nel caso generale $(A + B \neq C)$ giunge alle stesse conclusioni alle quali si giunge in [**1**].

Argomento di questa nota è quello di dimostrare che nelle ipotesi fatte da F. STOPPELLI sul sistema di forze applicate ad S le funzioni p e q sono infinitesime con $\frac{1}{r_0}$ anche se S è un sistema materiale piano $(A + B = C)$.

Si arricchisce così lo studio del caso piano che è particolarmente anomalo. Diciamo subito che, per ragioni di spazio, non si ricava qui l'equazione che approssima il moto di S potendosi questa trovare facilmente, una volta dimostrato che p e q sono funzioni infinitesime, dalla equazione che approssima il moto di S nel caso in cui $A + B \neq C$ passando al limite par $A + B \rightarrow C$. giusta l'osservazione fatta in [**1**] § 1 *c*) e l'applicazione fattane al § 4.

Ciò premesso passiamo senz'altro a dimostrare l'asserto.

Sia $T'(O;\ \xi, \eta, \zeta)$ una terna fissa con l'origine in O e siano θ, ψ e φ gli angoli di mutazione, precessione e rotazione propria della terna mobile T rispetto alla terna fissa T'.

Nel caso che il sistema rigido S sia piano a struttura non giroscopica rispetto all'asse z, $A \neq B$, $A + B = C$, le equazioni che reggono il moto sono (cfr. [**1**], [**2**] e [**3**]):

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\dot{p} - qr = \frac{M_x}{A}, \\ &\dot{q} - pr = \frac{M_y}{B}, \\ &\dot{r} - \frac{A - B}{A + B}pq = \frac{M_z}{C}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\,\mathrm{sen}\,\varphi, \\ &\dot{\psi} = \frac{p\,\mathrm{sen}\,\varphi + q\cos\varphi}{\mathrm{sen}\,\theta} \\ &\dot{\varphi} = r - (p\,\mathrm{sen}\,\varphi + q\cos\varphi)\,\mathrm{cotg}\,\theta, \end{aligned}\right.$$

con le condizioni iniziali:

$$p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0, \quad r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \theta_0,$$
$$\psi(0) = \psi_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0.$$

Le prime tre equazioni si trasformano agevolmente nelle seguenti equazioni integrali:

$$p = p_0 \cos r_t^* - q_0 \operatorname{sen} r_t^* + \frac{1}{A}\int_0^t M_x(\tau)\cos(r_t^* - r_\tau^*)d\tau -$$
$$- \frac{1}{B}\int_0^t M_y(\tau)\operatorname{sen}(r_t^* - r_\tau^*)d\tau,$$

$$q = p_0 \operatorname{sen} r_t^* + q_0 \cos r_t^* + \frac{1}{A}\int_0^t M_x(\tau)\operatorname{sen}(r_t^* - r_\tau^*)d\tau -$$
$$- \frac{1}{B}\int_0^t M_y(\tau)\cos(r_t^* - r_\tau^*)d\tau,$$

$$r = r_0 + \frac{A-B}{A+B}\int_0^t p(\tau)q(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_0^t M_z(\tau)d\tau,$$

avendo posto: $r_t^* = \int_0^t r(\tau)d\tau$.

Da queste, ove si supponga, con STOPPELLI (cfr. [2] § 2 n. 1 e 3, [3] § 2 n. 4) che le coordinate x, y, z, in T, del punto P di applicazione della forza $\boldsymbol{F}$ agente su S e le componenti F_ξ, F_η, F_ζ, di $\boldsymbol{F}$ in T' siano funzioni esplicite, continue e derivabili dei soli parametri t, θ, ψ e r, con derivate parziali limitate al divergere di r_0, segue che, nel caso di un sistema materiale piano, nel piano $z = 0$, le funzioni p e q sono infinitesime con $\frac{1}{r_0}$.

Osserviamo, preliminarmente, che dalle (2) segue che p, q ed $r - r_0$ sono funzioni limitate al divergere di r_0, essendo tali, per ipotesi, M_x, M_y ed M_z.

Ciò premesso indichiamo con $\boldsymbol{F}_P$ la forza agente in un generico punto P che a priori, può anche essere mobile in S, giusta le ipotesi fatte sulle coordinate di P, ma che fa sempre parte del campo occupato da S.

Per il momento $\boldsymbol{M}$, rispetto ad O, del sistema di forze agenti su S si ha:

$$\boldsymbol{M} = \Sigma\,(P - O) \wedge \boldsymbol{F}_P,$$

con la somma estesa a tutti i punti P in cui è applicata una forza $\boldsymbol{F}_P$.

Da questa, per la supposta regolarità della funzione $(P - O) \wedge \boldsymbol{F_P}$ in un fissato dominio: $0 \leq t \leq t_0$, $a_1 \leq \theta \leq a_2$, $b_1 \leq \psi \leq b_2$, escludente per θ i valori $n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ per i quali $\dot{\psi}$ non è definita, derivando rispetto al tempo con riferimanto alla terna T otteniamo:

$$
(3) \qquad \left(\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}\right)_R = \Sigma \left(\frac{dP}{dt}\right)_R \wedge \boldsymbol{F_P} + \Sigma (P - O) \wedge \left(\frac{d\boldsymbol{F_P}}{dt}\right)_R.
$$

D'altra parte si ha:

$$
\left(\frac{d\boldsymbol{F_P}}{dt}\right)_R = \dot{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{P}} - \omega \wedge \boldsymbol{F_P}
$$

dove $\dot{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{P}}$ indica la derivata, rispetto al tempo, di $\boldsymbol{F_P}$ eseguita con riferimento alla terna fissa T'.

Tenuto conto di quest'ultima e del fatto che

$$
\left(\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}\right)_R = \frac{dM_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dM_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dM_z}{dt}\boldsymbol{k}
$$

la (3) disenta:

$$
(4) \qquad \frac{dM_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dM_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dM_z}{dt}\boldsymbol{k} = \Sigma \left(\frac{dP}{dt}\right)_R \wedge \dot{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{P}} + \Sigma (P - O) \wedge \\ \wedge \dot{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{P}} - \Sigma (P - O) \wedge [\omega \wedge \boldsymbol{F_P}].
$$

Ora, per le ipotesi fatte sulle forze agenti, si ha:

$$
\dot{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{P}} = \frac{\partial \boldsymbol{F_P}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F_P}}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \boldsymbol{F_P}}{\partial \psi}\dot{\psi} + \frac{\partial \boldsymbol{F_P}}{\partial r}\dot{r}.
$$

Da questa, per la terza, la quarta e la quinta delle (1), e per le ipotesi fatte sulle derivate parziali delle componenti di $\boldsymbol{F_P}$ in T', segue che $\dot{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{P}}$ è un vettore di modulo limitato al divergere di r_0 in qualunque fissato dominio si suppongono variabili t, θ e ψ.

Perciò la prima e la seconda somma a secondo membro della (4) sono funzioni limitate al divergere di r_0.

Per la terza somma, tenuto conto il generico punto P sta sul piano $z = 0$, a conti fatti si ha:

$$
\Sigma (P - O) \wedge [\omega \wedge \boldsymbol{F_P}] = \Sigma \{ y(pF_{Py} - qF_{Px})\boldsymbol{i} + x(qF_{Px} - pF_{Py})\boldsymbol{j} + \\ + [x(rF_{Px} - pF_{Pz}) + y(rF_{Py} - qF_{Pz})]\boldsymbol{k} \}.
$$

Quindi, tenuto conto che i versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ non dipendono dalla posizione di P in S e dell'osservazione fatta che p e q sono funzioni per lo meno limitate al divergere di r_0, segue da quest'ultima e dalla (4) che $\frac{dM_x}{dt}$ e $\frac{dM_y}{dt}$ sono funzioni limitate al divergere di r_0.

Da qui, poichè, integrando per parti, si ha:

$$\int_0^t M_x(\tau)\,\text{sen}\,(r_t^* - r_\tau^*)d\tau = \frac{M_x(t)}{r(t)} - \frac{M_x(0)}{r_0} + \int_0^t \frac{\dot{r}(\tau)M_x(\tau)}{r^2(\tau)}\cos(r_t^* - r_\tau^*)d\tau -$$

$$- \int_0^t \frac{1}{r(\tau)}\frac{dM_x(\tau)}{d\tau}\cos(r_t^* - r_\tau^*)d\tau,$$

$$\int_0^t M_x(\tau)\cos(r_t^* - r_\tau^*)d\tau = \frac{M_x(0)}{r_0}\,\text{sen}\,r_t^* - \int_0^t \frac{\dot{r}(\tau)M_x(\tau)}{r^2(\tau)}\,\text{sen}\,(r_t^* - r_\tau^*)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{r(\tau)}\frac{dM_x(\tau)}{d\tau}\,\text{sen}\,(r_t^* - r_\tau^*)d\tau,$$

$$\int_0^t M_y(\tau)\,\text{sen}\,(r_t^* - r_\tau^*)d\tau = \frac{M_y(t)}{r(t)} - \frac{M_y(0)}{r_0} + \int_0^t \frac{\dot{r}(\tau)M_y(\tau)}{r^2(\tau)}\cos(r_t^* - r_t^*)d\tau -$$

$$- \int_0^t \frac{1}{r(\tau)}\frac{dM_y(\tau)}{d\tau}\cos(r_t^* - r_\tau^*)d\tau,$$

$$\int_0^t M_y(\tau)\cos(r_t^* - r_\tau^*)d\tau = \frac{M_y(0)}{r_0}\,\text{sen}\,r_t^* - \int_0^t \frac{\dot{r}(\tau)M_y(\tau)}{r^2(\tau)}\,\text{sen}\,(r_t^* - r_\tau^*)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{r(\tau)}\frac{dM_y(\tau)}{d\tau}\,\text{sen}\,(r_t^* - r_\tau^*)d\tau,$$

tenuto conto che, per la terza delle (1), $\dot{r}$ è una funzione limitata al divergere di r_0, così come è limitata la funzione $r - r_0$, segue, ricordando le (2), che p e q sono funzioni del tempo infinitesime con $\frac{1}{r_0}$ e resta quindi dimostrato l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. QUILGHINI, *Sul principio dell'effetto giroscopico*, «Ricerche di Matematica», 1958, vol. VII, pagg. 205-231.

[2] F. STOPPELLI, *Sul principio dell'effetto giroscopico*, «Giornale di Matematiche di BATTAGLINI», serie IV, vol. 80, 1950-51, pagg. 14-38.

[3] F. STOPPELLI, *Sui fenomeni giroscopici in un solido qualsiasi*, «Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova», 1952, vol. XXI, pagg. 25-43.