Bollettino Unione Matematica Italiana

Ernest Stipanić

Due teoremi su alcune serie divergenti di Dini a termini positivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 516–524.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_516_0>

Due teoremi su alcune serie divergenti di Dini a termini positivi.

Nota di Ernest Stipanić (a Belgrado)

Sunto - *Sia*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s \qquad (c_{n-1} > c_n > 0)$$

una serie convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \qquad (d_{n-1} > d_n \to 0, \ n \to \infty)$$

una serie divergente, dove

$$(1) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1} - c_n}{c_{n-1}}, \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{r_{n-1}}; \ (2) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{n-1} - d_n}{d_{n-1}}; \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}, \ \left(r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k, \ D_n = \sum_{k=0}^{n} d_k\right)$$

sono le serie divergenti di Dini *a termini positivi* [1].

In questo lavoro dimostreremo un teorema concernente le serie (1) *ed un altro concernente le serie* (2).

Teorema 1.

a) Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = \mu < 1 \qquad \left(\frac{c_n}{c_{n-1}} < 1, \ n \geq n_0\right) \tag{1.1}$$

e

$$(c_n)^{\nu+1} \leq c_{n+\nu}(c_{n-1})^{\nu}, \qquad (n \geq 1, \ \nu \geq 0) \tag{1.2}$$

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_{n-1} - c_n}{c_{n-1}} - \frac{c_n}{r_{n-1}}\right) \tag{1.3}$$

sarà convergente ed avrà la somma

$$\sigma = \sum_{n=1}^{n_0-1} \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}}\right) + \vartheta \frac{c_{n_0-1}}{r_{n_0-1}} \left(\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{r_{n_0-1}}{c_{n_0-1}}\right) \qquad (0 \leq \vartheta < 1) \tag{1.4}$$

(1) Possiamo menzionare che abbiamo già trattato in un nostro lavoro [2] due teoremi i quali sono analoghi ai teoremi qui trattati.

b) Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = 1 \tag{1.5}$$

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_{n-1} - c_n}{c_{n-1}} - \frac{c_n}{r_{n-1}} \right| \tag{1.6}$$

sarà divergente.

Dimostrazione. Dimostriamo preliminarmente l'asserzione *a*). Dalla condizione (1.1) segue

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{r_{n-1}} = \mu,$$

oppure

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{c_n} = \lim_{n \to n} \frac{r_n}{r_{n-1} - r_n} = \frac{\mu}{1 - \mu}$$

e perciò è

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{r_n}{c_n} - \frac{r_{n-1}}{c_{n-1}} \right) = \frac{\mu}{1 - \mu} - \frac{r_{n_0-1}}{c_{n_0-1}} \tag{1.7}$$

In base alle relazioni (1.1) e (1.2) avremo

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{c_n}{c_{n-1}} \right)^{\nu} \leq \frac{1}{c_n} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu} \qquad (n \geq n_0, \ \nu \geq 0)$$

cioè

$$\frac{1}{1 - \dfrac{c_n}{c_{n-1}}} \leq \frac{1}{c_n} \cdot r_{n-1}$$

da dove facilmente risulta

$$\frac{r_{n-1}}{c_{n-1}} \leq \frac{r_n}{c_n} \text{ (2)} \tag{1.8}$$

Poichè

$$\frac{c_n}{r_{n-1}} < \frac{c_n}{r_n}$$

(2) La relazione $r_{n-1}/c_{n-1} = r_n/c_n$ $(n \geq n_0)$ sarà soddisfatta, per esempio, nel caso della serie geometrica convergente.

in rapporto alla (1.8) si ha

$$\frac{c_n}{r_{n-1}} < \frac{c_{n_0-1}}{r_{n_0-1}} \qquad (n \geq n_0) \tag{1.9}$$

Essendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_{n-1} - c_n}{c_{n-1}} - \frac{c_n}{r_{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{n_0-1} \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}} \right) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{c_n}{r_{n-1}} \left(\frac{r_n}{c_n} - \frac{r_{n-1}}{c_{n-1}} \right)$$

segue in base alle (1.7), (1.8) e (1.9) chè deve essere

$$\sum_{n=1}^{n_0-1} \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_{n-1} - c_n}{c_{n-1}} - \frac{c_n}{r_{n-1}} \right) <$$

$$< \sum_{n=1}^{n_0-1} \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}} \right) + \frac{c_{n_0-1}}{r_{n_0-1}} \left(\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{r_{n_0-1}}{c_{n_0-1}} \right)$$

e perciò la serie (1.3) sarà convergente ed avrà la somma (1.4).

Dimostriamo ora l'asserzione *b*). Dalla condizione (1.5) risulta

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{r_{n-1}} = 1 \tag{1.10}$$

ed ancora

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{r_n} = \lim \frac{r_{n-1} - r_n}{r_n} = 0 \tag{1.11}$$

Mettiamo

$$\frac{c_n}{r_n} = \frac{c_0}{r_0} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{c_k/r_k}{c_{k-1}/r_{k-1}}$$

oppure

$$\frac{c_n}{r_n} = \frac{c_0}{r_0} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{c_{k-1}/r_{k-1} - c_k/r_k}{c_{k-1}/r_{k-1}} \right). \tag{1.12}$$

In rapporto alle (1.11) e (1.12) ed ai noti teoremi dalla teoria dei prodotti infiniti [3] risulta che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_{k-1}/r_{k-1} - c_k/r_k}{c_{k-1}/r_{k-1}} \right|$$

sarà divergente e poichè

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{c_{n-1}/r_{n-1}-c_n/r_n}{c_{n-1}/r_{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{n-1}}{r_n}\left|\frac{r_n}{r_{n-1}}-\frac{c_n}{c_{n-1}}\right|$$

in base alla (1.10) si conclude facilmente che anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_n}{r_{n-1}}-\frac{c_n}{c_{n-1}}\right|$$

sarà divergente, cioè la serie (1.6) ([3]). Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE 1. Se si prende una di queste condizioni:

$$(c_n)^{\nu+1}\geq c_{n+\nu}(c_{n-1})^{\nu};\ \frac{c_n}{c_{n-1}}\leq\frac{c_{n+\nu+1}}{c_{n+\nu}};\ \frac{c_n}{c_{n-1}}\geq\frac{c_{n+\nu+1}}{c_{n+\nu}};\qquad (n\geq 1,\ \nu\geq 0)$$

in luogo della condizione (1.2), allora si vedrà nel modo analogo che varrà un'asserzione analoga all'asserzione *a*).

OSSERVAZIONE 2. Se si prende

$$r_n^{(k)}=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}r_\nu^{(k-1)}\qquad (r_\nu^{(0)}=c_\nu;\ k=1,2,3,\ ..)$$

allora si può l'asserzione *a*) enunciare in una forma generalizzata nel modo seguente:

Se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n-1}}=\mu<1\qquad\left(\frac{c_n}{c_{n-1}}<1,\ n\geq n_0\right)$$

e

$$[r_n^{(k-1)}]^{\nu+1}\leq r_{n+\nu}^{(k-1)}[r_{n-1}^{(k-1)}]^{\nu}\qquad (k=p;\ n\geq 1,\ \nu\geq 0) \tag{1.13}$$

([3]) Si può facilmente vedere nel modo analogo che anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{c_n}{r_n}-\frac{c_{n-1}-c_n}{c_n}\right|$$

sarà divergente.

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n^{(p)}}{r_{n-1}^{(p)}}-\frac{r_n^{(p-1)}}{r_{n-1}^{(p-1)}}\right)$$

sarà convergente ed avrà la somma

$$\sigma^{(p)}=\sum_{n=1}^{n_0-1}\left(\frac{r_n^{(p)}}{r_{n-1}^{(p)}}-\frac{r_n^{(p-1)}}{r_{n-1}^{(p-1)}}\right)+\vartheta_p\cdot\frac{r_{n_0-1}^{(p-1)}}{r_{n_0-1}^{(p)}}\left(\frac{\mu}{1-\mu}-\frac{r_{n_0-1}^{(p)}}{r_{n_0-1}^{(p-1)}}\right);\ (0\leq\vartheta_p<1)$$

dove p è un numero naturale fissato.

La dimostrazione di quest' asserzione generalizzata è completamente analoga alla dimostrazione dell' asserzione a).

Si ottiene l' asserzione generalizzata analoga quando si prende una delle condizioni:

$$\left[r_n^{(k-1)}\right]^{\nu+1}\geq r_{n+\nu}^{(k-1)}\left[r_{u-1}^{(k-1)}\right]^{\nu};\quad \frac{r_n^{(k-1)}}{r_{n-1}^{(k-1)}}\leq\frac{r_{n+\nu+1}^{(k-1}}{r_{n+\nu}^{(k-1)}};$$

$$\frac{r_n^{(k-1)}}{r_{n-1}^{(k-1)}}\geq\frac{r_{n+\nu+1}^{(k-1)}}{r_{n+\nu}^{(k-1)}};\qquad (k=p,\ n\geq 1,\ \nu\geq 0)$$

in luogo della condizione (1.13).

TEOREMA 2. a) Se

$$D_m>\frac{d_m\cdot d_{m-1}}{d_{m-1}-d_m},\ \frac{d_{n-1}\cdot d_n}{d_n-d_{n-1}}>\frac{d^2{}_{n+1}}{d_n-d_{n+1}},\qquad \left(D_m=\sum_{k=0}^{m}d_k\right). \tag{2.1}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d^2{}_n\cdot d_{n-1}}{d_{n-1}-d_n}=\lambda\neq 0 \tag{2.2}$$

dove p è un numero naturale fissato, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d_{n-1}-d_n}{d_{n-1}}-\frac{d_n}{D_n}\right) \tag{2.3}$$

sarà convergente ed avrà la somma

$$(2.4)\quad S = \sum_{u=1}^{m-1} \left(\frac{D_{n-1}}{D_n} - \frac{d_n}{d_{n-1}}\right) + \theta\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{D_{m-1} \cdot d_{m-1}}\right) D_m d_m \quad (0<\theta<1)$$

b) Se

$$(2.5)\quad \lim_{n \to \infty} \frac{d^2_n \cdot d_{n-1}}{d_{n-1} - d_n} = 0$$

allora la serie

$$(2.6)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{d_{n-1} - d_n}{d_{n-1}} - \frac{d_n}{D_n} \right|$$

sarà divergente.

Dimostrazione. *a*) Dalla prima relazione ipotetica (2.1) segue

$$(2.7)\quad D_{m-1}\ d_{m-1} > D_m\ d_m$$

e dalla seconda

$$(2.8)\quad \frac{d_n \cdot d_{n-1}}{d_{n-1} - d_n} + d_{n+1} > \frac{d_{n+1} \cdot d_n}{d_n - d_{n+1}}$$

Se si suppone

$$D_{n-1} d_{n-1} > D_n d_n ,$$

cioè

$$D_n > \frac{d_{n-1}\, d_n}{d_{n-1} - d_n}$$

allora sarà

$$D_{n+1} > \frac{d_{n-1}\, d_n}{d_{n-1} - d_n} + d_{n+1}$$

ed a causa della relazione (2.8) sarà anche

$$D_{n+1} > \frac{d_{n+1}\, d_n}{d_n - d_{n+1}}$$

oppure

$$D_n d_n > D_{n+1}\, d_{n+1} \tag{2.10}$$

Dalla relazione ipotetica (2.9) necessariamente segue la (2.10) a causa della seconda relazione (2.1), e dall'altra parte la relazione (2.9) è soddisfatta per $n = m$ a causa della (2.7). Dunque, secondo il principio d'induzione completa risulta che la (2.9), rispettivamente la relazione

$$\frac{1}{D_{n-1}\, d_{n-1}} < \frac{1}{D_n\, d_n} \tag{2.11}$$

deve essere soddisfatta per ogni numero naturale $n > m$.

Poichè

$$D_{n-1} < D_n \to \infty, \quad \frac{1}{d_{n-1}} < \frac{1}{d_n} \to \infty, \quad n \to \infty$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} D_n d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{D_n - D_{n-1}}{\dfrac{1}{d_n} - \dfrac{1}{d_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{d^2{}_n\, d_{n-1}}{d_{n-1} - d_n} \tag{2.12}$$

in base al noto teorema di Stolz-Jensen [4].

In rapporto alla (2.10) risulta

$$\sup_{n\geq m}(D_{n-1}\cdot d_n) = \sup_{n\geq m}(D_n d_n - d^2{}_n) = \sup_{n\geq m} D_n d_n - \inf_{n\geq m} d^2{}_n = D_{m-1} d_{m-1} \tag{2.13}$$

Essendo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d_{n-1}-d_n}{d_{n-1}} - \frac{d_n}{D_n}\right) = \sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{D_{n-1}}{D_n} - \frac{d_n}{d_{n-1}}\right) + \\ + \sum_{n=m}^{\infty} D_{n-1} d_n\left(\frac{1}{D_n d_n} - \frac{1}{D_{n-1}\, d_{n-1}}\right)$$

segue in base alla (2.2), (2.12) e (2.13) che deve essere

$$\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{D_{n-1}}{D_n} - \frac{d_n}{d_{n-1}}\right) < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d_{n-1}-d_n}{d_{n-1}} - \frac{d_n}{D_n}\right) < \\ < \sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{D_{n-1}}{D_n} - \frac{d_n}{d_{n-1}}\right) + D_{m-1} d_{m-1}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{D_{m-1}\, d_{m-1}}\right)$$

cioè la serie (2.3) sarà convergente ed avrà la somma (2.4).

Dimostriamo ora l'asserzione *b*). In base alle (2.5) e (2.12) risulta

$$\lim_{n \to \infty} D_n d_n = 0$$

e se si mette

$$D_n d_n = D_0 d_0 \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{D_{k-1} d_{k-1} - D_k d_k}{D_{k-1}\, d_{k-1}}\right)$$

allora si può facilmente concludere, come nel caso del teorema precedente [cf. (1.12)], che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{D_{n-1} d_{n-1} - D_n d_n}{D_{n-1}\, d_{n-1}} \right| \tag{2.14}$$

deve essere divergente.

In oltre è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{D_{n-1} d_{n-1} - D_n d_n}{D_{n-1} d_{n-1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{D_{n-1}} \left| \frac{D_{n-1}}{D_n} - \frac{d_n}{d_{n-1}} \right| \tag{2.15}$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{D_{n-1}} = 1. \tag{2.16}$$

Poichè la serie (2.14) è divergente risulta in rapporto alle (2.15) e (2.16) che sarà divergente anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{D_{n-1}}{D_n} - \frac{d_n}{d_{n-1}} \right|$$

cioè la serie (2.6). Con ciò il secondo teorema è completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE 1. Se si suppone

$$\frac{d^2_n \cdot d_{n-1}}{d_{n-1} - d_n} \to \infty, \; n \to \infty \tag{2.17}$$

allora si dimostra analogamente come nel caso dell'ipotesi (2.5) che la serie (2.6) sarà divergente. Inoltre si dimostra facilmente che anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{d_n}{D_{n-1}}-\frac{d_{n-1}-d_n}{d_n}\right|$$

sarà divergente nel caso dell'ipotesi (2.5) come pure in quello dell'ipotesi (2.17) ([4]).

OSSERVAZIONE 2. Se si prendono le condizioni

$$D_m < \frac{d_m \cdot d_{m-1}}{d_{m-1}-d_m}, \quad \frac{d_n \cdot d_{n-1}}{d_{n-1}-d_n} < \frac{d^2_{n+1}}{d_n - d_{n+1}} \qquad (D_m = \sum_{k=0}^{m} d_k)$$

in luogo delle condizioni (2.1), allora si può facilmente dimostrare che varrà un'asserzione analoga all'asserzione *a*).

BIBLIOGRAFIA

[1] U. DINI, *Sulle serie a termini positivi*, «Ann. delle Università Toscane», Fasc. 9, p. 33-46, 1867. (Cf. anche K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, p. 299, 302, Berlin, 1951).

[2] E. STIPANIĆ, *Due teoremi sulle serie a termini positivi*, Bollettino della Unione Matematica Italiana, Serie III, Anno XII, Num. 1, p. 50-56, 1957.

[3] K. KNOPP, Ibid, p. 229.

[4] Ibid, p. 77-78.

([4]) Infine possiamo dire in generale:

Se
$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \qquad (d_n > 0)$$
è una serie divergente e se
$$D_n d_n \to 0, \; n \to \infty$$
o
$$D_n \cdot d_n \to \infty, \; n \to \infty$$
allora le serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{d_{n-1}-d_n}{d_{n-1}}-\frac{d_n}{D_n}\right| \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{d_n}{D_{n-1}}-\frac{d_{n-1}-d_n}{d_n}\right|$$
saranno divergenti.