Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Sulla normale affine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 504–515.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_504_0>

Sulla normale affine.

Nota di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna)

Sunto. - *Si considerano alcune relazioni della normale affine (ad una curva piana, ad una superficie, o ad una ipersuperficie anolonoma) con altre rette uscenti dallo stesso punto*

Summary. - *Some relations between affine normal (of a plane curve, of a surface, of a non holonome hypersurface) and other lines are considered.*

1. Nel presente lavoro si considerano alcune relazioni della normale affine ad una curva piana, o ad una superficie di S_3, o ad una ipersuperficie anolonoma, con altri elementi notevoli associati agli enti stessi. Più precisamente nel n. 2 si dimostra che se la normale metrica e la normale affine ad un E_k coincidono, l'E_k è circolare; mentre, se coincidono la normale affine e la normale proiettiva, è nulla la derivata seconda della curvatura affine rispetto all'arco affine.

Nel n. 3 si considera la normale affine ad una superficie S, in relazione con la sua normale metrica: si dimostra che, detta t la tangente ad S complanare con le normali metrica ed affine, le curve inviluppate da t formano la famiglia coniugata alle curve di livello della curvatura totale. Di qui si possono trarre varie proprietà.

Nel n. 4 si considerano alcune relazioni fra la normale affine ad una superficie S e varie rette proiettivamente collegate ad S: fra l'altro, si trova la generalità delle superficie la cui normale affine è una retta canonica, e si dimostra la seguente proprietà, che dà un nuovo rilievo all'anologia fra le varie *normali* ad una superficie: le curve di S inviluppate dalle tangenti complanari alle normali affine e proiettiva costituiscono la famiglia coniugata alle curve di livello della *curvatura affine* di S.

Per una ipersuperficie anolonoma la più semplice retta che si può collegare ad un suo punto A, che sia invariante per affinità e non appartenga al piano tangente, è la retta direttrice ([1]). Si dimostra, nel n. 5, che le sole ipersuperficie anolonome per le

([1]) Questa retta viene denominata, da alcuni Autori, *normale affine* all'ipersuperficie, appunto per la semplicità della sua definizione. Cfr. più avanti la ([27]).

quali, in ogni punto, la retta direttrice coincide con la normale metrica sono quelle formate dai piani normali ad una congruenza (sistema ∞^{r-1}) generica di rette; si indicano infine alcune proprietà di tali ipersuperficie anolonome.

Nei numeri successivi, le questioni ora indicate verranno riprese dall'inizio; si incontreranno quindi, nello svolgimento del lavoro, alcune proprietà già note.

2. Sia dato un E_3 nel piano; con scelta opportuna del riferimento cartesiano (ortogonale) esso si rappresenta così:

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

La *normale affine* all'E_3 è il diametro della (sola) parabola che contenga l'E_3 (supposto, ovviamente, non inflessionale); la sua equazione è

$$2a_2^2 x + a_3 y = 0.$$

Essa coincide con la normale euclidea se e solo se $a_3 = 0$; e questa è appunto la condizione affinchè l'E_3 sia circolare; infatti il cerchio osculatore all'E_3 si può rappresentare, nell'intorno dell'origine, con la

$$y = a_2 x^2 + [4] \text{ (}^2\text{)}.$$

Quindi: condizione necessaria e sufficiente affinchè la normale affine e la normale metrica ad un E_3 coincidano è che l'E_3 sia circolare; e di conseguenza:

Una curva tale che in ogni suo punto la normale metrica e la normale affine coincidono è una circonferenza (o si compone di archi di circonferenza).

Ci occuperemo ora delle relazioni fra la normale affine e la normale proiettiva ad una curva piana $\mathcal{C}$. Associando ad ogni punto non di flesso A di $\mathcal{C}$ una coppia opportuna di vettori, si

(2) Del resto, a_3 è appunto, a meno di un fattore numerico moltiplicativo, la derivata della curvatura $\frac{1}{R}$ calcolata nel centro dell'E_3; infatti, in un punto prossimo al centro, di coordinate $(\xi, 0)$, la curvatura vale

$$\frac{1}{R} = \frac{(2a_2 + 6a_3\,\xi + \ldots)}{(1 + 4a_2^2\,\xi^2 + \ldots)^{3/2}} = (2a_2 + 6a_3\xi + \ldots)\left(1 - \frac{3}{2}\cdot 4a_2\,\xi^2 + \ldots\right) = 2a_2 + 6a_3\,\xi + \ldots$$

e quindi

$$\frac{d\frac{1}{R}}{ds} = 6a_3.$$

hanno le seguenti formule di FRENET [3]:

$$dA = d\sigma I_1 \qquad dI_1 = d\sigma I_2 \qquad dI_2 = kd\sigma I_1 ,$$

dove $d\sigma$ è l'elemento d'*arco affine*, k è la *curvatura affine* e la retta AI_2 è la normale affine Proseguendo il calcolo di E. CARTAN degli sviluppi in serie delle equazioni di $\mathfrak{C}$ rispetto al riferimento suddetto, si hanno le equazioni ridotte di $\mathfrak{C}$:

$$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{k}{8} x^4 - \frac{k'}{40} x^5 + \left(\frac{k^2}{16} - \frac{k''}{240}\right) x^6 + \left(\frac{17kk'}{560} - \frac{k'''}{1680}\right) x^7 + [8]$$

dove k' indica la derivata di k rispetto all'arco affine, e analoghe. La cubica penosculante ha equazione [4]:

$$y\left(x - \frac{k''}{3k'} y\right) - \frac{1}{2} x^3 + \frac{k''}{6k'} x^2 y + \frac{k}{2} xy^2 + \left(\frac{k'}{5} - \frac{kk''}{6k'}\right) y^3 = 0$$

e la *normale proiettiva* è quindi

$$x - \frac{k''}{3k'} y = 0.$$

Si conclude che *le curve per le quali*, in un punto generico, *normale affine e normale proiettiva coincidono sono quelle per le quali la curvatura affine è una funzione lineare dell' arco affine* [5].

3. Sia ora S una superficie non sviluppabile [6]; in un suo punto generico A, consideriamo la normale metrica e la normale affine, e dimostriamo che:

Le curve di S *che in ogni loro punto sono tangenti al piano*

(3) Cfr. E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la Géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, (Gauthier-Villars, Paris, 1951), Cap. X, II (p. 160). Cfr. pure J. FAVARD, *Cours de Géométrie différentielle locale*, (Gauthier-Villars, Paris, 1957) p. 382: la «curvatura affine» usata in quest'ultima opera ha però valore opposto a quella qui considerata.

(4) Si esclude qui che il punto sia sestattico ($k' = 0$): in tal caso si può però pensare che la cubica penosculante si spezzi nella conica osculatrice e in una retta arbitraria per A.

(5) Va escluso naturalmente il caso delle coniche ($k' \equiv 0$): si può però pensare che la normale proiettiva ad una conica sia indeterminata, così che la proprietà continua a valere.

(6) Per le sviluppabili (e più in generale in un punto parabolico) non si considera la normale affine: cfr. W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie*, II Bd. (Springer, Berlin, 1923), p. 106

della normale metrica e della normale affine [7] *costituiscono la famiglia coniugata della famiglia delle curve di livello della curvatura totale di* S.

Associamo ad ogni punto A di S un triedro trirettangolo, il cui vertice sia A, mentre gli spigoli sono le tangenti principali e la normale (ad S). Detti $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{I}_3$ tre vettori unitari diretti come gli spigoli del triedro, si hanno le formule di FRENET per lo spostamento infinitesimo del triedro [8]:

$$(1)\qquad \begin{cases} dA = \omega^1 \boldsymbol{I}_1 + \omega^2 \boldsymbol{I}_2 \\ d\boldsymbol{I}_1 = \qquad (\rho_1\omega^1 + \rho_2\omega^2)\boldsymbol{I}_2 + r_1\omega^1 \boldsymbol{I}_3 \\ d\boldsymbol{I}_2 = -(\rho_1\omega^1 + \rho_2\omega^2)\boldsymbol{I}_1 \qquad + r_2\omega^2 \boldsymbol{I}_3 \\ d\boldsymbol{I}_3 = -r_1\omega^1 \boldsymbol{I}_1 - r_2\omega^2 \boldsymbol{I}_2 \end{cases}$$

dove ω^1, ω^2 sono due forme lineari nei differenziali dei parametri da cui dipende la determinazione di A; r_1, r_2 sono le curvature principali di S in A; ρ_1, ρ_2 sono le curvature geodetiche delle linee di curvatura in A. Posto

$$df = f_{,1}\,\omega^1 + f_{,2}\,\omega^2$$

si hanno le relazioni

$$(2)\qquad \begin{gathered} r_{1,2} = \rho_1(r_1 - r_2) \qquad r_{2,1} = \rho_2(r_1 - r_2) \\ \rho_{1,2} - \rho_{2,1} = r_1 r_2 + \rho_1^2 + \rho_2^2. \end{gathered}$$

La normale affine in A ad S si può così definire [9]: si considerino le curve asintotiche γ', γ'' uscenti da A, e su di esse due punti A', A''. Sia $\alpha(\beta)$ il piano tangente in A a $\gamma'(\gamma'')$ e parallelo alla tangente in A'' (A') alla curva asintotica del primo (secondo) sistema; la normale affine è la posizione limite dell'intersezione dei piani α, β, allorchè A', A'' tendono ad A.

Posto

$$\gamma_1 = \sqrt{r_1} \qquad \gamma_2 = \sqrt{-r_2}\,,$$

due vettori diretti come le tangenti asintotiche sono

$$\boldsymbol{a}' = \gamma_2 \boldsymbol{I}_1 + \gamma_1 \boldsymbol{I}_2\,, \qquad \boldsymbol{a}'' = \gamma_2 \boldsymbol{I}_1 - \gamma_1 \boldsymbol{I}_2\,;$$

(7) Solo tali curve possono essere contemporaneamente geodetiche metriche e geodetiche affini di S (nel senso che a questa locuzione è attribuito in FAVARD, op. cit., pp. 422-423): ciò accade, ad esempio, per i meridiani d'una superficie di rotazione.

(8) Cfr. E. CARTAN, op. cit., p. 218 e segg..

(9) Cfr. A. DEMOULIN, *Sur la quadrique de Lie*, «Comptes Rendus» **147**, 493-496 (1908).

la normale affine è parallela ai piani $(\boldsymbol{a}', d''\boldsymbol{a}')$, $(\boldsymbol{a}'', d'\boldsymbol{a}'')$, dove con $d'(d'')$ si indica il differenziale eseguito secondo la prima (seconda) direzione asintotica. Si ha quindi, indicando con ξ un infinitesimo:

$$d'\boldsymbol{a}'' = (\gamma_{2,1}\gamma_2 + \gamma_{2,2}\gamma_1 + \gamma_1^2\rho_2 + \gamma_1\gamma_2\rho_1)\,\xi\,\boldsymbol{I}_1 +$$

$$+ (-\gamma_{1,1}\gamma_2 - \gamma_{1,2}\gamma_1 + \gamma_2^2\rho_1 + \gamma_1\gamma_2\rho_2)\,\xi\,\boldsymbol{I}_2 + (\gamma_2^2 r_1 - \gamma_1^2 r_2)\,\xi\,\boldsymbol{I}_3$$

$$d''\boldsymbol{a}' = (\gamma_{2,1}\gamma_2 - \gamma_{2,2}\gamma_1 + \gamma_1^2\rho_2 - \gamma_1\gamma_2\rho_1)\,\xi\,\boldsymbol{I}_1 +$$

$$+ (\gamma_{1,1}\gamma_2 - \gamma_{1,2}\gamma_1 + \gamma_2^2\rho_1 - \gamma_1\gamma_2\rho_2)\,\xi\,\boldsymbol{I}_2 + (\gamma_2^2 r_1 - \gamma_1^2 r_2)\,\xi\,\boldsymbol{I}_3\,.$$

La normale affine ha quindi equazioni (rispetto ad $A\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{I}_3$)

$$\frac{\gamma_1 x}{-\gamma_{1,1}\gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_2^2\rho_2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_{2,1} + \gamma_1^3\rho_2} =$$

$$= \frac{\gamma_2 y}{-\gamma_{1,2}\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^3\rho_1 + \gamma_{2,2}\gamma_1^2 + \gamma_1^2\gamma_2\rho_1} = \frac{z}{\gamma_2^2 r_1 - \gamma_1^2 r_2}\,.$$

Posto $K = r_1 r_2$, tenendo presente la

$$2\gamma_i\gamma_{i,k} = (-1)^{i+1} r_{i,k}\,,$$

si ha che la retta intersezione del piano delle due normali col piano tangente è

$$\frac{r_1 x}{K_{,1}} = \frac{r_2 y}{K_{,2}}$$

e risulta essere la coniugata della tangente alla curva $dK = 0$, rispetto alle direzioni asintotiche

$$r_1 x^2 + r_2 y^2 = 0 \quad \text{(c. v. d.)}.$$

In particolare:

I. *Se in un punto* A *generico di* S *la normale affine giace in uno dei piani principali relativi ad* A, *le linee di curvatura dell'altro sistema coincidono con le curve* K = *cost., e viceversa*;

II. *Se in un punto generico* A *di* S *la normale affine giace in uno dei piani normali passanti per le tangenti asintotiche, le relative curve asintotiche sono le curve* K = *cost., e viceversa*;

III. *Se e solo se la normale affine e la normale metrica coincidono, la superficie è a curvatura totale costante* [10].

(10) Le proprietà I e III si trovano, in altra forma, in A. Demoulin, *Sur quelques propriétés des surfaces courbes*, « Comptes Rendus », **147**,

4. Studiamo ora le relazioni intercorrenti fra la normale affine ed alcuni enti proiettivamente covarianti dell'intorno di A su S. Supporremo che S non sia rigata; allora, poichè non faremo questioni di realità, possiamo associare ad ogni punto A il triedro $(A\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{I}_3)$ di cui si fa uso nell'op. cit. di J. FAVARD ([11]) cui corrispondono le formule di FRENET ([12]):

$$
(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
dA &= \omega^1\boldsymbol{I}_1 + \omega^2\boldsymbol{I}_2\\
d\boldsymbol{I}_1 &= (\alpha\omega^1 + \beta\omega^2)\boldsymbol{I}_1 + \mathcal{K}\omega_1\boldsymbol{I}_2 + \omega^2\boldsymbol{I}_3\\
d\boldsymbol{I}_2 &= \mathcal{K}\omega^2\boldsymbol{I}_1 - (\alpha\omega^1 + \beta\omega^2)\boldsymbol{I}_2 + \omega^1\boldsymbol{I}_3\\
d\boldsymbol{I}_3 &= (\beta'\omega^1 + \gamma'\omega^2)\boldsymbol{I}_1 + (\alpha'\omega^1 + \beta'\omega^2)\boldsymbol{I}_2
\end{aligned}\right.
$$

con le condizioni d'integrabilità:

$$[d\omega^1] = \beta[\omega^1\omega^2] \qquad [d\omega^2] = \alpha[\omega^1\omega^2]$$

$$d\mathcal{K} = (\gamma' - 3\mathcal{K}\alpha)\omega^1 + (\alpha' + 3\mathcal{K}\beta)\omega^2$$

$$
(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
&[d\alpha\omega^1] + [d\beta\omega^2] + (2\alpha\beta + \beta' - \mathcal{K}^2)[\omega^1\omega^2] = 0\\
&[d\alpha'\omega^1] + [d\beta'\omega^2] + (2\alpha'\beta + \mathcal{K}\gamma')[\omega^1\omega^2] = [d\beta'\omega^1] + [d\gamma'\omega^2] +\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2\gamma'\alpha - \mathcal{K}\alpha')[\omega^1\omega^2] = 0\\
&[d\gamma' - 3\mathcal{K}d\alpha\,\omega^1] + [d\alpha' + 3\mathcal{K}d\beta\,\omega^2] + (4\beta\gamma' + 4\alpha\alpha')[\omega^1\omega^2] = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Proseguendo fino ai termini del 4° ordine ([13]) il calcolo dello sviluppo locale dell'equazione di S rispetto al triedro $(A\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{I}_3)$ si ha

$$z = xy - \frac{\mathcal{K}}{3}(x^3 + y^3) + \frac{3\alpha\mathcal{K} - \mathcal{K}_{,1}}{12}x^4 - \frac{\alpha'}{3}x^3y +$$

$$+ \frac{\mathcal{K}^2 - \beta'}{2}x^2y^2 - \frac{\gamma'}{3}xy^3 - \frac{\mathcal{K}_{,2} + 3\mathcal{K}\beta}{12}y^4 + [5].$$

Indichiamo con Ω le omografie che mutano in sè l'intorno del 3° ordine di A (conservando ciascuna direzione asintotica); le quattro direzioni nelle quali S e ΩS hanno un contatto del 4°

565-568 (1908). Cfr. pure, per la III, G. FUBINI-E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, (Zanichelli, Bologna, 1926) pp. 177-178.

([11]) Cfr. p. 399.

([12]) Le condizioni d'integrabilità sono qui scritte in forma leggermente diversa da quella dell'op. cit.. La *curvatura affine* $\mathcal{K}$ è la radice quadrata dell'*invariante* J di PICK (per il quale, cfr. W. BLASCHKE, op. cit., p. 123).

([13]) Fino ai termini del 3° ordine, cfr. J. FAVARD, op. cit., p. 410.

ordine sono [14]:

$$\left\{\frac{3\alpha\mathcal{K}-\mathcal{K}_{,1}}{12}(l-1)+\frac{lM\mathcal{K}}{3}\right\}x^4+\left\{\frac{\alpha'(1-m)}{3}-\frac{2}{3}mL\mathcal{K}\right\}x^3y+$$

$$+(ML-r)x^2y^2+\left\{\frac{\gamma'(1-l)}{3}-\frac{2}{3}lM\mathcal{K}\right\}xy^3+$$

$$+\left\{\frac{3\mathcal{K}\beta+\mathcal{K}_{,2}}{12}(1-m)+\frac{mL\mathcal{K}}{3}\right\}y^4=0.$$

Quando questa quaterna contiene le tangenti asintotiche, l'unica retta unita nelle Ω (fuori del piano tangente) è lo *spigolo di* GREEN:

$$\frac{x}{-\frac{3\mathcal{K}\beta+\mathcal{K}_{,2}}{4}}=\frac{y}{\frac{3\alpha\mathcal{K}-\mathcal{K}_{,1}}{4}}=\frac{z}{-\mathcal{K}};$$

quando, invece, essa è apolare alla terna di SEGRE $x^3-y^3=0$, nelle Ω è unita la *normale proiettiva*, che risulta quindi:

$$\frac{x}{\mathcal{K}_{,2}}=\frac{y}{\mathcal{K}_{,1}}=\frac{z}{\mathcal{K}}.$$

La *retta canonica* r_λ, corrispondente al valore λ del parametro [15], è

$$\frac{x}{\mathcal{K}_{,2}+3\lambda(\mathcal{K}_{,2}-\beta\mathcal{K})}=\frac{y}{\mathcal{K}_{,1}+3\lambda(\alpha\mathcal{K}+\mathcal{K}_{,1})}=\frac{z}{\mathcal{K}};$$

il luogo di tali rette è il *piano canonico*:

$$(-\alpha\mathcal{K}-\mathcal{K}_{,1})x+(-\beta\mathcal{K}+\mathcal{K}_{,2})y+(\alpha\mathcal{K}_{,2}+\beta\mathcal{K}_{,1})z=0.$$

Le superficie per le quali, in un punto generico, *la normale affine appartiene al piano canonico* [16] *sono caratterizzate da*

$$\alpha\mathcal{K}_{,2}+\beta\mathcal{K}_{,1}=0$$

(14) La caratterizzazione geometrica qui usata della normale proiettiva e dello spigolo di GREEN trovasi in A. TERRACINI, *Sul significato geometrico della normale proiettiva*, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (6) 3, 584-591 (1926_1); i termini l, m, L, M sono gli stessi che compaiono nel lavoro citato.

(15) Cfr. G. FUBINI-E. ČECH, op. cit., p. 156 Per il seguito, si tenga presente che per $\lambda=-\frac{1}{2}$ si ha la direttrice di WILCZYNSKI, e per $\lambda=-\frac{1}{3}$ si ha l'asse di ČECH.

(16) Tali superficie sono caratterizzate dal fatto che il 2º fascio canonico

e dipendono da quattro funzioni arbitrarie d'una variabile: tale è infatti il quadro di arbitrarietà delle soluzioni del sistema differenziale che le individua.

Veniamo ora a considerare le relazioni fra la normale affine e rette canoniche particolari, cominciando dalla normale proiettiva. Dalle equazioni di quest'ultima si trae che:

Le curve di S *che in ogni loro punto sono tangenti al piano della normale affine e della normale proiettiva formano la famiglia coniugata alla famiglia delle curve di livello dell'invariante* $\mathcal{K}$. Si noti l'analogia fra tale proprietà e quella dimostrata nel n. 3. Ne scende, in particolare che:

Se, in ogni punto di *S, la normale proiettiva è complanare con la normale affine e una delle tangenti di curvatura affini, le curve di livello di* $\mathcal{K}$ *sono le linee di curvatura affine dell'altro sistema, e viceversa; se,* in ogni punto di *S, la normale proiettiva è complanare con la normale affine ed una tangente asintotica, il relativo sistema di curve asintotiche è costituito dalle curve* $\mathcal{K} =$ cost., *e viceversa.* Entrambe queste classi di superficie dipendono da *quattro funzioni arbitrarie d'una variabile,* come si ricava dai corrispondenti sistemi differenziali esterni.

Se, infine, in un punto generico di S *coincidono le normali affine e proiettiva,* S *è a curvatura affine costante, e viceversa* ([17]). Le condizioni analitiche perchè ciò accada sono

$$\gamma' = 3\mathcal{K}\alpha \qquad \alpha' = -3\mathcal{K}\beta,$$

e, sostituendo tali relazioni nelle (4), si ha che le superficie considerate dipendono da *tre funzioni arbitrarie di una variabile* ([18]).

Per quanto riguarda la (prima) direttrice di WILCZYNSKI, si noti che, *quando* essa *è complanare con la normale affine e con una tangente asintotica* (che supponiamo, per fissare le idee, sia la $\omega^2 = 0$) si ha $\gamma' = 0$, e quindi *le linee di curvatura affine* ([19]) *coincidono nell'altro sistema di asintotiche;* e. viceversa, *se le linee di curvatura affine coincidono, ciò può aversi solo in un sistema di*

è improprio. Fra queste superficie rientrano, come caso particolare, anche le *superficie di coincidenza,* a piano canonico indeterminato.

([17]) Quest'ultimo risultato potrebbe dedursi anche dalle considerazioni di G. FUBINI-E. ČECH, op. cit., § 28 A).

([18]) La generalità delle superficie in questione è indicata in E. CARTAN, *Sur la connexion projective des surfaces,* «Comptes Rendus» **178,** 750-752 (1924).

([19]) Che in generale hanno equazione complessiva $\alpha'(\omega^1)^2 - \gamma'(\omega^2)^2 = 0$.

curve asintotiche, e allora la prima direttrice di WILCZYNSKI *è complanare con la normale affine e con l'altra tangente asintotica.* Ponendo $\gamma' = 0$ nelle (4), si ricava che tali superficie dipendono da *quattro funzioni arbitrarie d'una variabile.*

Quando poi la prima direttrice di WILCZYNSKI coincide con la normale affine, la seconda direttrice è impropria, e la superficie è una sfera affine non rigata, e viceversa ([20]); tali superficie dipendono da due funzioni arbitrarie di una variabile.

Consideriamo infine la superficie per cui coincidono la normale affine e l'asse di ČECH; esse possono caratterizzarsi anche come *le superficie* (non rigate) *tali che i piani ad esse circoscritti lungo le linee di Segre inviluppano dei cilindri.* Analiticamente, si hanno per $\alpha = \beta = 0$; si constata allora che esse sono tutte e sole le superficie le cui geodetiche affini ([21]) hanno per tangente una retta che forma, in ogni punto della curva, un birapporto costante con le asintotiche ed una tangente di DARBOUX. Tali superficie si ottengono integrando il sistema

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} = \mathcal{K}\frac{\partial A}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} = \mathcal{K}\frac{\partial A}{\partial u} \quad \text{con} \quad \left[\frac{\partial A}{\partial u}, \quad \frac{\partial A}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial v}\right] = 1 \ ([22]).$$

Si possono ricercare infine le superficie per le quali la normale affine coincide con *tutte* le rette canoniche. Esse sono manifestamente *superficie di coincidenza*, e sono caratterizzate da

$$\alpha = \beta = 0, \quad \mathcal{K} = \text{cost.};$$

([20]) Si tratta, in sostanza, delle note superficie di TZITZEICA-WILCZYNSKI. Cfr. W. BLASCHKE, op. cit., p. 212; cfr. pure G. FUBINI-E. ČECH, op. cit., § 28 D).

([21]) Intese qui come linee per cui s'annulla la curvatura geodetica affine. Cfr. W. BLASCHKE, op. cit., p. 129; J. FAVARD, op. cit., p. 422 e segg.

([22]) Essendo $[d\omega^1] = [d\omega^2] = 0$, si è posto $\omega^1 = du$, $\omega^2 = dv$: dalle (3), (4) si ricavano le (5). La curvatura $\mathcal{K}$ soddisfa al sistema differenziale di ČECH

$$\mathcal{K}_{uu} = 3\mathcal{K}\mathcal{K}_v \qquad \mathcal{K}_{vv} = 3\mathcal{K}\mathcal{K}_u$$

(cfr. ad esempio G. FUBINI-E. ČECH, op. cit, § 28 C)); anche l'integrazione del sistema del testo può ricondursi a quella del sistema (7), l. c. Si tratta, com'è manifesto, di superficie isotermo-asintotiche; ogni corrispondenza fra due di esse, che associ punti per cui $\mathcal{K}$ ha lo stesso valore, è un'applicabilità proiettiva. È opportuno notare che, esclusi i casi della normale proiettiva e della direttrice di WILCZYNSKI, le superficie per cui la normale affine coincide con una retta canonica dipendono da costanti arbitrarie. Un problema analogo a questo è trattato da J. KAUCKÝ, *Étude des surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe*, « Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk » Cis. 109 (1929).

integrando allora il sistema (5) si hanno le equazioni [23]:

$$x(y^2+z^2)=\frac{2}{3\sqrt{3}}\,\frac{1}{\mathcal{K}^4}\,.$$

Esse possono caratterizzarsi come *le sfere affini* (non rigate) *a curvatura* $\mathcal{K}$ *costante,* [24] oppure anche come le superficie (non rigate) che ammettono un gruppo transitivo abeliano d'affinità unimodulari [25].

5. Consideriamo ora, in S_r, una *ipersuperficie anolonoma* V, vale a dire, la configurazione ottenuta associando ad ogni punto A di S_r un iperpiano α passante per A. Se A' è infinitamente vicino ad A, ed α' è l'iperpiano ad esso associato, la retta AA' e l'S_{r-2} $\alpha\alpha'$ si corrispondono in una proiettività Ω (detta *di cella*) fra la stella A e l'iperpiano α (considerato come luogo d'S_{r-2}) [26]. Si dicono *tangenti di curvatura di* 2ª *specie* le rette (appartenenti ad A e ad α) ortogonali all'S_{r-2} corrispondente; si dice *retta direttrice* la retta per A corrispondente, in Ω, all'S_{r-2} improprio di α [27]. Essa è la più semplice retta fuori di α, ed invariante per affinità, che sia associata ad un elemento di V. Cerchiamo, in questo numero, le ipersuperficie anolonome per le quali essa è la normale euclidea (in A) ad α.

(23) Cfr. J. FAVARD, op. cit., p. 419.

(24) Infatti in tal caso si ha $\alpha'=\gamma'=0$, $d\mathcal{K}=0$, e quindi $\alpha=\beta=0$.

(25) Si vedano i varî tipi di superficie con un gruppo d'affinità unimodulari in sè, in J. FAVARD, op. cit., p. 415-421. Dal punto di vista reale occorre aggiungere le superficie (a punti ellittici)

$$xyz=\text{cost.}\,.$$

Altra caratterizzazione (proiettiva) di tali superficie trovasi in E. BOMPIANI, *Contributo alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie,* «Boll. U. M. I.» (1) 3, 49-56 (1924).

(26) Se e solo se Ω subordina nella stella A di α una polarità, V è organizzabile in uno strato d'ipersuperficie. Per queste nozioni sulle varietà anolonome, cfr. E. BOMPIANI, *Sulle varietà anolonome,* «Rend. Acc. Naz. Lincei» (6) 27, 37-45 e 45-52 (1938_1).

(27) Tale retta è stata definita, per una trasformazione dualistica qualsiasi, da B. SEGRE, *Invarianti differenziali relativi alle trasformazioni puntuali e dualistiche fra spazî euclidei,* «Rend. Circ. Mat. Palermo» **60**, 224-232 (1936); ENEA BORTOLOTTI l'ha denominata *normale affine* (cfr. *Trasformazioni dualistiche e spazi proiettivamente piani,* «Boll. U. M. I.» (1) **17**, 219-233 (1938)). Cfr. pure A. MAXIA, *Varietà anolonome associate ad una trasformazione dualistica,* «Rend. Ist. Lomb.» III, **72**, 437-454 (1938-39).

Ad ogni punto A di S_r associamo un r–edro rettangolo, costituito dallo stesso A e da r vettori unitarî $\boldsymbol{I}_k (1 \leq k \leq r)$ a due a due ortogonali. Per uno spostamento infinitesimo dell'r–edro valgono le formule

$$dA = \sum_1^r \omega^k \boldsymbol{I}_k$$

$$d\boldsymbol{I}_j = \sum_1^r \omega_j^{\ k} \boldsymbol{I}_k \qquad (1 \leq j \leq r)$$

con

$$\omega_j^{\ k} = - \omega_k^{\ j} .$$

Le ω^k sono coordinate omogenee di retta nella stella A, mentre le ω^p, $\omega_k^{\ p}$ sono coordinate omogenee di S_{r-2} nell'iperpiano a^p passante per A e ortogonale ad $\boldsymbol{I}_p$ ([28]). Scegliamo, come direzione di $\boldsymbol{I}_r$, quella normale ad α; le equazioni di Ω sono perciò:

$$\omega^r = \omega^r \qquad \omega_j^{\ r} = \sum_1^r a_{jk} \omega^k \qquad (1 \leq j \leq r-1).$$

La retta direttrice è quella retta che corrisponde alla soluzione del sistema nelle ω^k:

$$\omega_j^{\ r} = 0 ;$$

infatti, in questa direzione si ha

$$da^r = - \omega^r a^0.$$

Dimostriamo che *se e solo se la normale euclidea coincide* in ogni punto *con la retta direttrice le traiettorie ortogonali a* V *sono rette.* In altri termini, *le ipersuperficie anolonome per le quali,* in ogni punto, *la retta direttrice e la normale coincidono sono tutte e sole quelle costituite dagli iperpiani normali ad un sistema* L ∞^{r-1} *di rette* (quelle, cioè, che si ottengono associando ad ogni punto A di S_r l'iperpiano normale alla retta del sistema passante per A) ([29]).

Infatti la normale euclidea $\omega^1 = \omega^2 = \ldots = \omega^{r-1} = 0$ coincide con la retta direttrice se e solo se

$$a_{jr} = 0 \qquad (1 \leq j \leq r-1).$$

([28]) Detto a^0 l'iperpiano improprio, si ha infatti

$$da^p = - \omega^p a^0 - \sum_1^r \omega_k^{\ p} a^k.$$

([29]) Tali ipersuperficie anolonome dipendono quindi da $r-1$ funzioni di $r-1$ variabili.

Questa è pure la condizione analitica *affinchè le traiettorie ortogonali dell'ipersuperficie siano rette.* Infatti, ciò accade se e solo se, per $\omega^1 = \omega^2 = ... = \omega^{r-1}$, si ha

$$[A\, dA\, d^2A] = 0.$$

Si ha, d'altra parte

$$[A\, dA\, d^2A] = [A \quad \omega^r \boldsymbol{I}_r \quad \omega^r \sum_1^{r-1} \omega_r{}^j \boldsymbol{I}_j] = (\omega^r)^2 \sum_1^{r-1} \omega_j{}^r [A \boldsymbol{I}_j \boldsymbol{I}_r].$$

La condizione cercata è quindi la seguente: che le forme $\omega_j{}^r (1 \leq j \leq r-1)$ si annullino per $\omega^1 = \omega^2 = ... = \omega^{r-1}$, cioè che sia

$$a_{jr} = 0 \qquad (1 \leq j \leq r-1) \qquad \text{(c. v. d.).}$$

Le intersezioni dei piani focali del sistema L *con l'iperpiano* α *sono le tangenti di curvatura di* 2ª *specie di* V *in* A [30]. Infatti, le condizioni di perpendicolarità di una retta e dell'S_{r-2} corrispondente in Ω' sono

$$\frac{\omega_1{}^r}{\omega^1} = \frac{\omega_2{}^r}{\omega^2} = ... = \frac{\omega_{r-1}{}^r}{\omega^r},$$

mentre i piani focali di L sono quelli individuati dalla generatrice di L passante per A e da quelle, infinitamente vicine, che le sono incidenti: deve quindi esistere un punto (fuoco) di $A\boldsymbol{I}_r$, di coordinate $\lambda A + \boldsymbol{I}_r$, che appartiene pure a $d(A\boldsymbol{I}_r)$; λ soddisfa alla condizione

$$[\lambda A + \boldsymbol{I}_r \quad dA \quad \boldsymbol{I}_r] + [\lambda A + \boldsymbol{I}_r \quad A \quad d\boldsymbol{I}_r] \equiv \sum_1^{r-1} \omega^k \cdot \lambda [A \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_r] +$$
$$+ \sum_1^{r-1} \omega_r{}^k [\boldsymbol{I}_r A \boldsymbol{I}_k] \equiv \sum_1^{r-1} (\omega_r{}^k + \lambda \omega^k)[A \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_r] = 0.$$

Sarà quindi

$$\omega_r{}^k + \lambda \omega^k = 0,$$

e, affinchè esista un λ che soddisfa a queste relazioni, dev'essere

$$\| \omega_k{}^r \omega^k \| = 0. \qquad \text{(c. v. d.).}$$

Nel caso in cui l'ipersuperficie anolonoma sia organizzabile in uno strato di ipersuperficie, occorre e basta, affinchè la retta principale sia normale al piano tangente in ogni punto di S_r, che le ipersuperficie formino uno *strato di ipersuperficie parallele*; i piani focali di L sono in tal caso mutuamente ortogonali, e segnano sul piano tangente ad ogni ipersuperficie Σ le tangenti principali di Σ.

[30] Solo per queste ipersuperficie anolonome le normali formano un sistema ∞^{r-1}, come per le ipersuperficie ordinarie.