Bollettino Unione Matematica Italiana

Gaetano Rodriquez

Un esempio di ovale che non è una quasi-conica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 500–503.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_500_0>

Un esempio di ovale che non è una quasi-conica.

Nota di GAETANO RODRIQUEZ (a Palermo)

Sunto. - *Si assegnano nel «piano eccezionale di André» sopra il quasi-corpo associativo di ordine 9, 10 punti tre a tre non allineati; essi costituiscono una «ovale», che, per quanto consta all'Autore, rappresenterebbe il primo esempio noto di ovale non arguesiana diversa da una «quasi-conica».*

Si chiamano *ovali* in un piano desarguesiano finito di ordine q, dispari [1], i $(q+1)$-archi, cioè gli insiemi di $q+1$ punti tre a tre non allineati.

[1] La teoria dei $(q+1)$-archi nel caso di q pari è profondamente diversa da quella relativa a q dispari. Vedi ad esempio B. SEGRE, *Sulle geometrie proiettive finite, in* «Reticoli e geometrie proiettive», Cremonese, Roma

La stessa definizione vale anche per le ovali in un piano non desarguesiano finito di ordine q.

Lo studio delle ovali nei piani desarguesiani finiti è stato compiuto da B. SEGRE; ben poco però si sa sulle ovali nei piani non desarguesiani finiti.

Alcune elementari proprietà sono comuni alle ovali desarguesiane e a quelle non desarguesiane (2):

1) Per ciascuno dei $q+1$ punti di un ovale di un piano finito S di ordine q si può condurre una sola tangente.

2) I punti di S, rispetto all'ovale, si ripartiscono in punti esterni, in punti interni e in punti dell'ovale. Dai punti esterni si possono condurre due tangenti all'ovale, dagli interni nessuna.

3) Si trova che i punti esterni sono $\frac{q(q+1)}{2}$ e gli interni $\frac{q(q-1)}{2}$. Analogamente le rette di S, rispetto all'ovale, si distinguono in secanti, esterne e tangenti. Le secanti sono $\frac{q(q+1)}{2}$, tante quante i punti esterni, le esterne $\frac{q(q-1)}{2}$, tante quante i punti interni; e le tangenti sono ovviamente $q+1$.

4) Rispetto ad una ovale qualsiasi (desarguesiana o non), si possono sempre definire le rette *polari* dei punti esterni: la polare di un punto esterno è la retta congiungente i punti di contatto delle due tangenti all'ovale condotte per il punto esterno. Analogamente è possibile definire i poli delle rette secanti: il polo di una secante è il punto di incontro delle tangenti all'ovale nei due punti di intersezione con la secante.

Per un teorema di B. SEGRE (3): *In un piano desarguesiano finito di ordine dispari* q *i soli* (q + 1)*-archi sono quelli formati dai punti di una conica (irriducibile).* D'altra parte, è ben noto che

1958, 46-61, anche per la Bibliografia. Nella nostra nota ci limiteremo al caso di q dispari, nel quale rientra l'esempio da noi costruito. Nel seguito, perciò, si dovrà intendere q dispari anche se ciò non verrà esplicitamente detto.

(2) QVIST B., *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane.* Ann. Acad. Sci. Fennicae (A. I.) 134, 1-12 (1952).

V. anche L. LOMBARDO RADICE, *Piani grafici finiti non desarguesiani*, G. Denaro, Editore, Palermo, pagg. 75-76, problema VIII.

(3) Vedi la nota citata in (1) od anche, B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, Canadian Journ. of Math., 7 (1955), 414-16.

in un piano lineare finito ogni conica irriducibile è un $(q+1)$-arco; pertanto, in un piano desarguesiano finito d'ordine q dispari i concetti di ovale e di conica irriducibile coincidono.

Inoltre, in un piano desarguesiano (finito o non) esistono sempre delle polarità (correlazioni involutorie), quindi le ovali, essendo coniche irriducibili, sono anche il luogo dei punti assoluti di dette polarità.

Un piano non desarguesiano può essere, invece, del tutto privo di correlazioni o « dualità » (LENZ) ([4]), e quindi, in tale piano, le eventuali ovali non possono essere i punti assoluti di una polarità: l'esempio dato dal LENZ è quello dei piani su quasi-corpi associativi propri (*Fastkörper*).

T. G. OSTROM ([5]) ha dato una classificazione a priori delle ovali dei piani non desarguesiani finiti, introducendo i concetti di: *ovali armoniche, quasi-coniche, coniche.*

Egli chiama innanzi tutto «gruppo armonico rispetto ad una ovale» una quaterna ordinata di punti allineati A, B, C, D tale che A, B sono punti dell'ovale, C è un punto esterno, e D sta sulla polare di C.

Dà poi le seguenti definizioni:

1) *Ovale armonica*: è una ovale ω tale che, dati due gruppi armonici (A, B, C, D), (A_1, B_1, C, D_1), rispetto ad ω, su due secanti uscenti da un medesimo punto esterno C, si ha: $ABCD \overline{\wedge} A_1B_1CD_1$ e $ABCD \overline{\wedge} B_1A_1CD_1$, dove il simbolo $\overline{\wedge}$ denota « prospettività su ω », cioè una prospettività che a punti di ω fa corrispondere punti di ω.

2) *Quasi-conica*: è una ovale i punti della quale sono i punti assoluti di una polarità.

3) *Conica*: è una quasi-conica la quale è anche una ovale armonica.

In tal caso, però, si dirà che quattro punti A, B, C, D formano un gruppo armonico rispetto alla conica se A, B sono punti assoluti, e C, D punti coniugati nella polarità definita dalla conica.

Per quanto ci risulta, oltre alle ovali desarguesiane, si conoscono solo alcuni esempi di ovali non desarguesiane che sono il luogo

([4]) H. LENZ, *Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen*, Jahresber dtsch. Math. Vereinigung 57 (1954), 20-31.

([5]) T. G. OSTROM, *Ovals, dualities and Desargues's theorem*, Canadian J. of Math, 7 (1955), 417-431.

dei punti assoluti di una polarità; tali esempi sono stati recentemente dati da ASCHER WAGNER (6), in piani (di traslazione) sopra quasicorpi finiti distribuitivi dalle due parti e commutativi, ma non associativi.

Non sono a nostra conoscenza esempi di ovali non desarguesiane che non siano il luogo dei punti assoluti di una polarità cioè che non siano, secondo la classificazione di OSTROM, *quasi-coniche* (v. anche WAGNER, op. cit. in (6)).

Nel corso di alcune mie ricerche sui quasicorpi, sono riuscito a costruire una ovale contenuta nel piano sul quasicorpo del DICKSON di ordine 9 (cioè sull'unico quasicorpo destro associativo proprio di ordine 9).

I punti di detta ovale hanno le coordinate omogenee:

$$(-1-j, j, 1),\ (-j, 1+j, 1),\ (1-j, 1, 1),\ (-1, 0, 1),\ (0, -j, 1),$$

$$(1, 1-j, 1),\ (-1+j, -1-j, 1),\ (1+j, -1+j, 1),\ (1, 0, 0),\ (0, 1, 0),$$

Questa ovale non è certamente una quasi–conica perchè nel detto piano (che si chiama il *piano eccezionale* o di ANDRÉ (7)) non esistono correlazioni, in conseguenza del teorema del LENZ già citato (vedi nota (4)). Pertanto detta ovale costituirebbe, per quello che è a noi noto, il primo esempio di ovale in un piano non desarguesiano che non sia formata dai punti assoluti di una polarità.

Aggiungiamo, inoltre, che si conoscono tutte le collineazioni del «piano eccezionale» (v. ANDRÈ, op. cit. in (7)), le quali formano un gruppo di ordine 311.040.

Ciascuna di queste collineazioni trasforma, in generale, l'ovale suddetta in un'altra ovale. Applicando, quindi, tutte le collineazioni sul piano di ANDRÈ si ha la possibilità di costruire una amplia classe di ovali di detto piano, le quali, per quanto si è detto, non possono essere quasi–coniche.

Allo studio di siffatte ovali ci proponiamo di dedicare un più approfondito lavoro, il presente essendo soltanto una Nota preventiva.

(6) A. WAGNER, *On perspectivities of finite projective planes*, Math. Zeitschr. 71. 113-123 (1959).

(7) JOHANNES ANDRÉ, *Projektive Ebenen über Fastkörpern*, Math Zeitschrift 62 (1955) 137-160.