
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO BATTAGLIA

Sull'equazione indeterminata $x^{2n} + y^{2n} = z^2$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 14
(1959), n.4, p. 498–499.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_498_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sull'equazione indeterminata $x^{2n} + y^{2n} = z^2$.

Nota di ANTONIO BATTAGLIA (a Crotone)

In una Nota apparsa in questo Bollettino ⁽¹⁾ ho dimostrato che: *l'equazione indeterminata $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ non ha soluzioni in numeri interi se n è primo, quando z è primo con n con la condizione $x^{2n} + y^{2n} = P^{2c}$ con P primo, in questa nota che fa seguito a quella dimostro che quella condizione è superflua. Infatti dall'equazione*

$$(1) \quad x^{2n} + y^{2n} = z^2$$

consegue l'altra

$$(3) \quad x^2 + y^2 = u^2$$

e quindi

$$(8) \quad x = \alpha^2 - \beta^2, \quad y = 2\alpha\beta, \quad u = \alpha^2 + \beta^2$$

essendo u fattore di z . Ora u è prodotto di fattori primi della forma $4k + 1$ perchè divisori di $x^2 + y^2$, (x ed y primi tra di loro) e quindi se il numero di questi fattori è r , u possiede 2^{r-1} partizioni nella somma di due quadrati primi tra di loro ⁽²⁾, sembrava pertanto necessario porre $u = P^c$ con P primo affinchè u avesse una sola partizione restando così determinati x ed y (un sol valore per x , un sol valore per y) come risulta dalla prima e seconda delle (8); ma effettivamente sono proprio le relazioni:

$$(8)' \quad \alpha^2 - \beta^2 = x, \quad 2\alpha\beta = y$$

che forniscono una sola partizione $\alpha^2 + \beta^2$ prefissati $\bar{x}$ e $\bar{y}$; infatti dalle (8)' si deduce:

$$4x^4 - 4x^2x - y^2 = 0$$

⁽¹⁾ Anno XII, N. 4 - 1957 al quale si rimanda il Lettore (pag. 689).

⁽²⁾ L. BIANCHI, *Teoria dei numeri algebrici*, pag. 70.

che dà per α due valori reali opposti e gli altri immaginari ai quali corrispondono per β pure due valori opposti e due immaginari. La partizione che figura nella

$$u = \alpha^2 + \beta^2$$

è quella (unica) fornita dalle (8)'; se u possiede altre partizioni esse non interessano la questione. Sia ad esempio:

$$\overline{x} = 63, \quad \overline{y} = 16, \quad u = 65;$$

qui

$$u = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2;$$

essendo

$$\alpha^2 - \beta^2 = 73, \quad 2\alpha\beta = 16$$

si ha:

$$\alpha = \pm 8, \quad \beta = \pm 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 8^2 + 1^2;$$

è questa partizione che figura in: $\alpha^2 + \beta^2 = 65$; l'altra $7^2 + 4^2$ va respinta perchè darebbe: $y = 56$, $x = 33$ valori diversi da quelli prefissati.

La condizione $u = P^c$ con P primo non è quindi necessaria e cioè non è necessaria la condizione $x^{2n} + y^{2n} \equiv P^{2c} \pmod{1}$.