Bollettino Unione Matematica Italiana

Ivan Bandić

Sur une équation différentielle non-linéaire du deuxième ordre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 493–497.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_493_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Sur une équation différentielle non-linéaire du deuxième ordre.

Nota di IVAN BANDIĆ (a Belgrado)

Résumé. - *En utilisant les dérivées rélatives, on effectue ici la transformation de l'equation* (1) *en équation* (2), *qui est résoluble par quadrateures sous la condition* (5). *Les résultats obtenus sont, ensuite, appliqués aux équations* (12), (13) *et* (17), *lesquels se présentent dans certains problèmes de la phisique thèorique.*

1. Il s'agit d' une équation non-linéaire ayant la forme

$$y'' + \varphi(y)y'^2 + f(x)y' + g(x)\psi(y) = 0, \tag{1}$$

qui se presente dans certains problèmes de mécanique.

En résolvant un tel problème, R. MÜLLER, [1]. réduit (1) à l'équation de BESSEL, ayant supposé que les coéfficients verifient les conditions suivantes

$$\varphi(y) = \frac{1 - \psi'(y)}{\psi(y)}; \qquad g(x) = e^{-2\mathfrak{F}(x)}[\pm \exp(2\int e^{-\mathfrak{F}(x)}dx) - \nu^2];$$

$$\mathfrak{F}(x) = \int f(x)dx; \qquad (\nu = \text{cte}).$$

On va demontrer ici que (1) se resout par des quadratures lorsque l'on pose une seule condition entre les coefficients $f(x)$ et $g(x)$. Les résultats obtenus seront, ensuite, appliqués à certains cas spéciaux de l'équation (1), lesquels, du reste, se présentent dans certains problèmes de la physique théorique.

(1.1) Dans le cours du présent travail ont été appliquées les dérivées relatives de M. PETROVIĆ, [2]. La dérivée relative de l'n-ième ordre de la fonction $u(x)$ est introduite par la définition

$$\Delta_n(u) = \frac{u^{(n)}}{u}, \qquad \left(u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n}\right)$$

d'où l'on trouve de nombreuses relations entre les dérivées relatives. On a utilisé ici les relations

$$\Delta_1(uv) = \Delta_1(u) + \Delta_1(v); \qquad \Delta_1\left(\frac{u}{v}\right) = \Delta_1(u) - \Delta_1(v); \qquad \Delta_1(u^n) = n\Delta_1(u);$$

$$\Delta_2(u) = \Delta^1{}_1(u) + \Delta^2{}_1(u); \qquad \Delta_1(\exp\int u dx) = \exp\int \Delta_1(u) dx = u,$$

où $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Lorsque l'on introduit, dans la dérivée $\Delta_1(u)$, où $u = u(x)$, la nouvelle variable t au moyen de la substitution $x = x(t)$, on obtient,

$$\Delta_1(u)_x = \frac{1}{x'} \Delta_1(u)_t, \qquad \left(x' = \frac{dx}{dt}\right). \tag{2}$$

2. L'équation (1) peut être exprimée sous la forme de

$$\Delta_2(y) + f(x)\Delta_1(y) + \frac{1}{y}[g(x)\psi(y) + \varphi(y)y'^2] = 0,$$

ou bien

$$\Delta_1(y)\Delta_1(y' \exp\int f(x)dx) + \frac{1}{y}[g(x)\psi(y) + \varphi(y)y'^2] = 0.$$

En introduisant la nouvelle variable indépendante t au moyen de la substitution $x = x(t)$ cette dernière équation devient

$$\Delta_1(y)\Delta_1\left(\frac{y'}{x'}\exp\int f(x)dx\right) + \frac{1}{y}[g(x)\psi(y)x'^2 + \varphi(y)y'^2] = 0, \tag{3}$$

où les dérivées (simples et relatives) sont prises par rapport à la variable t.

Si l'on choisit, ensuite, $x(t)$ de façon que

$$\frac{dx}{dt} = \exp\int f(x)dx; \qquad t = \int \exp\left[-\int f(x)dx\right]dx, \tag{4}$$

et que l'on pose entre les coefficients $f(x)$ et $g(x)$ la condition

$$g(x) = \exp\left(-2\int f(x)dx\right), \tag{5}$$

on obtient de (3)

$$y'' + \psi(y) + \varphi(y)y'^2 = 0.$$

Au moyen de la substitution

$$y' = z, \qquad y'' = z\frac{dz}{dy} \tag{6}$$

cette équation est transformée en équation de Bernouilli

$$\frac{dz}{dy} + \varphi(y)z + \frac{\psi(y)}{z} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = \lambda(c_1 - 2\int\frac{\psi(y)}{\lambda}dy), \qquad \lambda = \exp(-2\int\varphi(y)dy).$$

De là, en se fondant sur (6) et (4), on trouve l'intégrale générale de l'équation (1), dans laquelle la condition (5) est satisfaite

$$\int[\lambda(c_1 - 2\int\frac{\psi(y)}{\lambda}dy)]^{-\frac{1}{2}}dy = c_2 + \int[\exp(-\int f(x)dx)]dx. \tag{7}$$

(2.1) Par conséquent, l'équation non-linéaire

$$y'' + \varphi(y)y'^2 + f(x)y' + g(x)\psi(y) = 0, \tag{8}$$
$$g(x) = \exp(-2\int f(x)dx)$$

est résolue au moyen de quadratures.

Son intégrale générale est donnée par la relation

$$\int\left[\lambda\left(c_1 - 2\int\frac{\psi(y)}{\lambda}dy\right)\right]^{-\frac{1}{2}}dy = c_2 + \int[\exp(-\int f(x)dx)]dx; \tag{9}$$
$$\lambda = \exp(-2\int\varphi(y)dy).$$

3. Dans ce paragraphe on expose certaines applications de la proposition contenue dans (2.1). On suppose que $\varphi(y) \equiv 0$. L'équation (8) prend, dans ce cas-là, la forme suivante

$$y'' + f(x)y' + g(x)\psi(y) = 0, \qquad g(x) = \exp(-2\int f(x)dx) \tag{10}$$

et son intégrale générale est, à la base de (9)

$$\int (c_1 - 2\int \psi(y) dy)^{-\frac{1}{2}} dy = c_2 + \int [\exp(-\int f(x)dx)]dx. \tag{11}$$

(3.1) Si l'on suppose que $\psi(y) = y^n$, l'équation (10) devient

$$y'' + f(x)y' = g(x)y^n, \qquad g(x) = \exp(-2\int f(x)dx) \tag{12}$$

et ce n'est que l'équation généralisée d'EMDEN, dont les forme spéciales apparaissent dans certains problèmes de physique théorique et d'astronomie, [3]. Une condition d'intégrabilité de l'équation (12) est donnée par D. MITRINOVIĆ, [4].

L'intégrale générale de l'équation (12) se trouve maintenant directement de (11)

$$\int \left(c_1 + \frac{2}{n+1} y^{n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} dy = c_2 + \int [\exp(-\int f(x)dx)]dx.$$

(3.2) L'équation (10), sous condition que $\psi(y) = -e^y$ apparait dans la forme de l'équation généralisée d'EMDEN, des sphères gazeuses isothermiques

$$y'' + f(x)y' = g(x)e^y, \qquad g(x) = \exp(-2\int f(x)dx) \tag{13}$$

dont les cas spéciaux, à cause de leurs applications, ont été traités sous de points de vue différents, [5].

L'intégrale générale de l'équation (13) est, à la base (11)

$$\int (c_1 + 2e^y)^{-\frac{1}{2}} dy = c_2 + \int [\exp(-\int f(x)dx)]dx.$$

(3.3) De (10) on trouve pour $\psi(y) = -\dfrac{1}{y}$

$$y'' + f(x)y' = \frac{g(x)}{y}, \qquad g(x) = \exp(-2\int f(x)dx). \tag{14}$$

L'intégrale générale de cette équation est, à la base de (11)

$$\int (c_1 + 2l_n y)^{-\frac{1}{2}} dy = c_2 + \int [\exp(-\int f(x)dx)]dx. \tag{15}$$

Lorsque l'on introduit dans (14) la nouvelle fonction inconnue z par la substitution

$$y = z \exp\left(-\frac{1}{2}\int f(x)dx\right) \tag{16}$$

on obtient l'équation non-linéaire de forme

$$zz'' + z^2\alpha(x) = \beta(x), \tag{17}$$

où

$$\alpha(x) = -\Delta_2\left(\exp\frac{1}{2}\int f(x)dx\right), \qquad \beta(x) = \exp\left(-\int f(x)dx\right). \tag{18}$$

L'intégrale générale de l'équation (17), en tenant compte de la condition (18), est obtenue de (16)

$$z = y \exp\frac{1}{2}\int f(x)dx.$$

où y est donné par la relation (15).

Quelque formes spéciales de l'équation (17) se présentent dans l'électronique, [6]. Une solution plus générale de cette équation est trouvée aussi par T. Leko, [7], ainsi que par I. Bandić, [8].

LITTÉRATURE

[1] R. Müller, «Zeitschrift für angew, Math. u. Mech.», 19 (1939), 46.

[2] M. Petrovitch, «Monogr. de l'Acad. Serbe des Sciences», CXI (1936), Beograd

[3] E. Kamke, «Differentialgleichungen», I, s. 560-561, (1943), Leipzig.

[4] D. Mitrinovitch, «Comptes rendus de l'Acad. des Sciences», 241, N° 2, 724-26, 1955.

[5] E. Kamke, «Differentialgleichungen», I, s. 563, (1943), Leipzig.

[6] E. Kamke, «Differentialgleichungen», I, s. 570, (1943), Leipzig.

[7] T. Leko, «Glasnik mat., fiz. i astr.», t. 10, N° 1, (1955), Zagreb.

[8] I. Banditch, «Bull. de la Soc. math. et phys. de Serbie», IX, 1-2, (1957), Beograd.