Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giovanni Carini

Su una relazione energetica della magneto-idrodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 477–481.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_477_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Su una relazione energetica della magneto-idrodinamica. (*)

Nota di Giovanni Carini (a Messina)

Sunto. - *Si stabilisce una relazione energetica per il sistema di* Navier-Minkowski. *Successivamente si deduce « l'equazione del calore » come risultato della combinazione* 1) *dell'equazione che esprime il primo principio della termodinamica,* 2) *dell'equazionè che estende alla magneto-idrodinamica il teorema di* Poynting; 3) *dell'equazione delle forze vive per la magneto-idrodinamica ricavata in un precedente lavoro.*

Summary. - *For Navier-Minkowski's sistem an energetic relation is esta blished. Successively « the heat equation » is deduced as a result of the combination 1) of the equation which expresses the first principle of the thermodynamics; 2) of the equation which extends Poynting's theorem to the magneto-hydrodynamics; 3) of the equation of energy for the magneto-hydrodynamics obtained in a previous work.*

1. Nella magneto-idrodinamica, com'è noto, interviene l'accoppiamento delle equazioni del moto del fluido con quelle dell'elettrodinamica. Tale accoppiamento si concreta nel fatto che alle forze meccaniche per unità di volume, che compaiono nelle equazioni dell'idrodinamica, bisogna aggiungere la forza (di natura elettromagnetica) $\mathfrak{F} = \frac{1}{c}\mathfrak{J} \wedge \boldsymbol{B} + \mathfrak{F}_1$, essendo

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{1}{8\pi}[\boldsymbol{D}\ \mathrm{div}\boldsymbol{E} + \mathrm{rot}(\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \wedge \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \wedge \mathrm{rot}\,\boldsymbol{D} + \\ + \boldsymbol{B}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} + \mathrm{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \wedge \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \wedge \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}].$$

Ciò risulta appunto dalle seguenti equazioni di Navier-Minkowski (¹) $\left(\text{approssimate ai termini di primo ordine in } \frac{v}{c}\right)$:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{B}} = -\,c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} & \mathrm{div.}\,\boldsymbol{B} = 0 \\ \dot{\boldsymbol{D}} + 4\pi\mathfrak{J} = c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} & \mathrm{div.}\,\boldsymbol{D} = 0 \\ \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} + \lambda\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H} & \left(\lambda = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\right) \\ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} - \lambda\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{E} & \\ \mathfrak{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) & \end{cases}$$

(*) Questo lavoro è stato oggetto di una comunicazione svolta al VI Congresso dell' U. M. I. (Napoli, settembre 1959).

(¹) - G. Carini, Rend. Lincei, Serie VIII, vol. XXVII, (1959).

$$(\mathrm{II}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \boldsymbol{F} + \chi + \mathfrak{F} \\ \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \end{array} \right.$$

dove si è posto

$$\chi = -\operatorname{grad} p + \frac{\mu_1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu_1 \Delta \boldsymbol{v},$$

e dove il «punto» indica la derivata parziale rispetto a t, $\boldsymbol{E}$ l'intensità elettrica del campo, $\boldsymbol{H}$ l'intensità magnetica, $\boldsymbol{D}$ lo spostamento elettrico, $\boldsymbol{B}$ l'induzione magnetica, $\mathfrak{J}$ la densità di corrente elettrica, σ la conducibilità, ε e μ rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del mezzo, $\boldsymbol{v}$ la velocità della generica particella, c la velocità della luce nel vuoto, $\boldsymbol{F}$ la forza di natura meccanica agente sul fluido, p la pressione, ρ la densità di massa, μ_1 il coefficiente di viscosità del mezzo.

La presente Nota ha lo scopo di

a) stabilire per il sistema di NAVIER–MINKOWSKI (I), (II) una relazione energetica analoga a quella, che NARDINI (²) ha scritto per il sistema considerato da ALFVEN;

b) combinare la relazione ottenuta con l'equazione dell'energia (o delle forze vive), stabilita in un mio recente lavoro (¹).

Si deduce in tal modo che, nell'ambito dei fenomeni della magneto-idrodinamica, l'energia interna U della generica porzione τ (di contorno ω) del fluido in moto è una funzione tale da ridurre ad un differenziale esatto la forma $dQ_e + dQ_\iota - d\mathfrak{L}^{(\iota)}$ i cui termini, in generale, non sono differenziali esatti; dQ_e è il calore che attraversa ω nell'intervallo di tempo t, $t + dt$, dQ_ι il calore JOULE, $d\mathfrak{L}^{(\iota)}$ è il lavoro elementare delle forze interne.

2. Per scrivere la relazione generale, che traduce il primo principio della termodinamica relativamente alla porzione τ, accanto al calore dQ_e, che nell'intervallo di tempo t, $t + dt$ attraversa ω, si deve considerare il calore JOULE dQ_ι; al lavoro elementare $d\mathfrak{L}^{(e)}$ delle forze meccaniche esterne e delle pressioni esercitate attraverso ω, si deve aggiungere il lavoro compiuto nel tempo t, $t + dt$ dalla forza $\mathfrak{F}$.

(²) R. NARDINI, Rend. Lincei, Serie VIII, vol. XVIII, 376-377, (1955).

Si ha così la seguente relazione

$$dQ_e + dQ_i + d\mathfrak{L}^{(e)} + \int_\tau \mathfrak{F} \cdot dP d\tau = d(T + U) \tag{1}$$

dove dT e dU rappresentano la variazione, nell'intervallo $t, t + dt$, rispettivamente dell'energia cinetica e dell'energia interna della porzione τ.

La (1), dunque, esprime il primo principio della termodinamica nell'ambito dei fenomeni della magneto-idrodinamica.

Dalle (I) si deduce, col noto procedimento, (¹)

$$\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}}) + \operatorname{div} \boldsymbol{S} + \frac{\mathfrak{J}^2}{\sigma} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{J} \wedge \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

dove è $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}$; mentre indicando con $w = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{ED} + \boldsymbol{BH})$ la densità di energia elettromagnetica si ha ancora

$$\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}} + \dot{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{B}) = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\lambda}{c}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S})^{\cdot} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{K} \tag{3}$$

essendo $\boldsymbol{K} = \frac{\lambda}{c}\dot{\boldsymbol{S}}$.

Dalle (2), (3), dopo integrazione in τ, si ottiene

$$\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}(w - \frac{\lambda}{c}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S})d\tau - \int_\omega S_n d\omega + \int_\tau \boldsymbol{v} \cdot (\mathfrak{F} + \boldsymbol{K} - \mathfrak{F}_1)d\tau + \int_\tau \frac{\mathfrak{J}^2}{\sigma} d\tau = 0. \tag{4}$$

Poichè si ha (¹)

$$dt \int \frac{\partial}{\partial t}(w - \frac{\lambda}{c}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S})d\tau = dW - d\Pi$$

[dove si è posto

$$W = \int_\tau (w - \frac{\lambda}{c}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S})d\tau$$

e dove

$$d\Pi = dt \int_{\omega} \left(\frac{2\lambda}{c} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S} - \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} \right) v_n d\omega$$

è il lavoro elementare delle pressioni, di natura elettromagnetica (1), esercitate attraverso ω], se si indica con $dQ_\iota = dt \int_{\tau} \frac{\mathfrak{J}^2}{\sigma} d\tau$ l'energia elettromagnetica che si trasforma in calore Joule e con $d\mathcal{E} = dt \int_{\omega} S_n d\omega$ l'energia elettromagnetica che entra in τ attraverso ω, la (4) si può porre nella forma

$$(5) \qquad d\mathfrak{L}^* + d\Pi + d\mathcal{E} - dQ_\iota - \int_{\tau} \mathfrak{F} \cdot dP d\tau = dW$$

essendo $d\mathfrak{L}^* = \int_{\tau} (\mathfrak{F}_1 - \boldsymbol{K}) dP d\tau$ il lavoro delle forze elettromagnetiche distribuite in τ.

Dalle (1), (5), per somma, si deduce

$$(6) \qquad dQ_e + d\mathfrak{L}^{(e)} + d\mathfrak{L}^* + d\Pi + d\mathcal{E} = d(T + U + W).$$

La (6) è la relazione energetica annunziata precedentemente.

3. Ricordo (1) altresì che durante il moto, si deve ritenere valido il teorema delle forze vive, espresso dall'equazione

$$(7) \qquad d(T + W) = d\mathfrak{L}^{(e)} + d\mathfrak{L}^{(i)} + d\mathfrak{L}^* + d\Pi + d\mathcal{E} - dQ_\iota,$$

dove si è posto

$$(8) \qquad d\mathfrak{L}^{(i)} = dt \int_{\tau} \{ p \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \mu_1 [(\operatorname{rot} \boldsymbol{v})^2 + \frac{4}{3} (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2] -$$

$$- 2\mu_1 \operatorname{div} [(\boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{v}] \} d\tau.$$

Dalle (6), (7), per confronto, si ottiene

$$(9) \qquad dQ_e + dQ_\iota = d\mathfrak{L}^{(i)} + dU$$

da cui si deduce che l'energia interna U è una funzione tale da ridurre ad un differenziale esatto la forma $dQ_e + dQ_\iota - d\mathfrak{L}^{(\iota)}$. Se, poi, si tien conto dell'equazione di continuità (II_2) e del calore dovuto alla viscosità del mezzo, dalla (9) si ricava immediatamente la cosidetta «equazione del calore», anologa a quella che riporta Cowling [3] nella sua Magneto-hydrodynamics.

Infatti se si indica con E_1 l'energia interna dell'unità di massa, con $\delta q_e + \delta q_\iota$ la quantità di calore assorbita dalla stessa unità di massa e con $\delta l^{(\iota)}$ il lavoro elementare delle forze interne per unità di volume, dalla (9) si deduce

$$\rho(\delta q_e + \delta q_\iota) = \delta l^{(\iota)} + \rho d E_1 . \tag{10}$$

Poichè dalla (II_2) si ha: $dt \operatorname{div} \boldsymbol{v} = - \frac{d\rho}{\rho}$, indicando con δq_a il calore dovuto alla viscosità [4] (per unità di massa), dalla (8), qualora ci si riferisca all'unità di volume, si ottiene ancora

$$\delta l^{(\iota)} = - p \frac{d\rho}{\rho} - \rho \delta q_a . \tag{11}$$

La (10), per la (11), si può porre nella seguente forma

$$\rho \frac{dE_1}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\delta q}{\delta t} \tag{12}$$

essendo $\delta q = \delta q_e + \delta q_\iota + \delta q_a$.

La (12), appunto, è l'equazione del calore che si deve aggiungere (unitamente all'equazione di stato) alle (I), (II) per eguagliare il numero delle equazioni a quello delle funzioni incognite [5].

[3] T. G. Cowling, Magneto-hydrodynamics, London, Interscience Publishers LDT, (1956).

[4] G. Lamb Hydrodynamics, Dover Pubbl., New York, (1932).

[5] Per $\lambda = 0$ i precedenti risultati si riducono a quelli che si avrebbero operando direttamente e nella stessa maniera sul sistema di equazioni considerato da Alfven.