Bollettino Unione Matematica Italiana

Demore Quilghini

Una interpretazione geometrica della distribuzione degli assi principali di inerzia di un sistema materiale.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 399–404.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_399_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Una interpretazione geometrica della distribuzione degli assi principali di inerzia di un sistema materiale.

Nota di DEMORE QUILGHINI (a Firenze)

Sunto. - *Viene data una semplice interpretazione geometrica della distribuzione degli elementi geometrici principali di inerzia di un sistema materiale.*

Summary. - *I give here a simple geometrical interpretation of the distribution of the principal geometric elements of inertia of a material system.*

Dato un sistema materiale S si dimostra l'esistenza di tre famiglie di quadriche concentriche e coassiali, precisamente una famiglia di ellissoidi, una di iperboloidi ad una falda ed una di iperboloidi a due falde, col centro nel centro di massa P_0 e con gli assi principali coincidenti con gli assi principali centrali di inerzia del sistema S, che godono delle seguenti proprietà:

a) per ogni punto P dello spazio passa una ed una sola superficie di ciascuna famiglia,

b) le normali in P alle tre superficie che vi passano individuano la terna principale di inerzia del sistema S relativa al punto P.

In questo modo si realizza una semplice interpretazione geometrica della distribuzione degli assi principali di inerzia di un sistema materiale, infatti si riferisce tutto lo spazio ad un sistema di superfici coordinate ortogonali che in ogni punto P individuano, col piano tangente e con la retta normale, gli elementi geometrici principali di inerzia del sistema.

Questo lavoro, che ho pubblicato perchè mi sembra avere un certo interesse didattico e perchè non mi risulta che questa interpretazione sia già nota, ha preso le mosse da una esercitazione fatta dal Prof. B. CALDONAZZO relativa all'analogo problema per un sistema materiale piano e per i punti P del piano delle masse. Qui il problema generale viene risolto con un metodo diverso da quello seguito da B. CALDONAZZO nel caso piano.

Sia dunque S un sistema materiale di massa complessiva M, sia P_0 il suo centro di massa, $T(P_0;\, x, y, z)$ la terna principale centrale di inerzia, A_0, B_0, C_0 i relativi momenti di inerzia e sia infine $P \equiv (x, y, z)$, con riferimento alla terna $T(P_0;\, x, y, z)$. un generico punto dello spazio.

Tracciata per P una terna trirettangola di assi x_P, y_P, z_P, ordinatamente paralleli agli assi x, y, z, se r è una retta per P di coseni direttori α, β e γ rispetto alla terna $T(P;\, x_P\, y_P\, z_P)$, e quindi ancora di coseni direttori α, β e γ rispetto alla terna $T(P_0;\, x, y. z)$, il momento di inerzia I del sistema S rispetto alla retta r è dato, tenuto conto del teorema di HUYGENS, dalla espressione:

$$(1)\quad I = [A_0 + M(y^2+z^2)]\alpha^2+[B_0 + M(x^2+z^2)]\beta^2+[C_0 + M(x^2 + y^2]\gamma^2 - \\ - 2Myz\beta\gamma - 2Mxz\alpha\gamma - 2Mxy\alpha\beta.$$

Il momento di inerzia I, al variare della retta r nella stella di centro P, è una funzione continua e derivabile dei coseni direttori di r, e, come è noto, quando la retta r è un asse principale di inerzia per P i valori dei suoi tre coseni direttori verificano la relazione $dI(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Ora, poichè i coseni direttori sono legati tra loro dalla relazione:

$$(2)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0,$$

il problema è analogo a quello di cercare gli estremi della funzione $I(\alpha, \beta, \gamma)$ condizionati dalla (2).

Operando col metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE si trova che le terne di valori $(\alpha. \beta, \gamma)$ che risolvono il problema sono soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$(3)\quad \begin{cases} [A_0 + M(y^2 + z^2) - I]\alpha & - Mxy\beta & - Mxz\gamma = 0 \\ - Mxy\alpha & + [B_0 + M(x^2 + z^2) - I]\beta & - Myz\gamma = 0 \\ - Mxz\alpha & - Myz\beta & + [C_0 + M(x^2 + y^2) - I]\gamma = 0. \end{cases}$$

Da qui, poichè la soluzione $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ non è accettabile in quanto non soddisfa la (2), segue che il determinante del sistema deve essere nullo, avremo perciò:

$$\text{(4)} \quad \begin{vmatrix} A_0 + M(y^2 + z^2) - I & -Mxy & -Mxz \\ -Mxy & B_0 + M(x^2 + z^2) - I & -Myz \\ -Mxz & -Myz & C_0 + M(x^2 + y^2) - I \end{vmatrix} = 0.$$

La (4) è la nota equazione secolare che individua le direzioni unite della omografia di inerzia relativa al punto P, essa è una equazione di terzo grado in I, in generale del tipo irriducibile, infatti le tre soluzioni I_1, I_2, I_3, che sono i momenti di inerzia del sistema rispetto agli assi principali di inerzia per P, sono necessariamente reali, positive e, in generale, distinte.

Senza risolvere la (4) verifichiamo che il sistema (3), che ammette infinite soluzioni, è soddisfatto da tre soluzioni particolari che soddisfano sia la (2) che la (4) e perciò, essendo soluzioni tra loro distinte, individuano la terna principale di inerzia relativa al punto P.

A questo scopo sia:

$$\text{(5)} \qquad lx^2 + my^2 + nz^2 = 1,$$

l'equazione di una quadrica col centro in P_0, con gli assi coincidenti con gli assi x, y, z e passante per P.

La retta r normale in P a questa superficie ha i coseni direttori:

$$\text{(6)} \quad \alpha = \frac{lx}{\pm\sqrt{l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2}}, \quad \beta = \frac{my}{\pm\sqrt{l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2}},$$

$$\gamma = \frac{nz}{\pm\sqrt{l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2}}.$$

Corrispondentemente, tenuto conto della (1), il momento di inerzia relativo alla retta r ha l'espressione:

$$\text{(7)} \quad I = (l^2x^2 + m^2y^2 + nz^2)^{-1}\{[A_0 + M(y^2 + z^2)]l^2x^2 + [B_0 + M(x^2 + z^2)]m^2y^2 +$$

$$+ [C_0 + M(x^2 + y^2)]n^2z^2 - 2Mmny^2z^2 - 2Mlnx^2z^2 - 2Mlmx^2y^2\}.$$

Sostituendo nelle espressioni dei primi membri del sistema (3) α, β e γ con le loro espressioni date dalle (6) ed I con la espressione data dalla (7) si trova:

$$[A_0 + M(y^2 + z^2) - I]\alpha - Mxy\beta - Mxz\gamma = \pm$$

$$l\, x^2 + m^2y^2 + n^2z^2)^{3/2} \{mxy^2[(A_0 - B_0)lm + M(l-m)lx^2 + M(l-m)my^2 +$$

$$+ M(l-m)nz^2] + nxz^2[(A_0 - C_0)ln + M(l-n)lx^2 +$$

$$+ M(l-n)my^2 + M(l-n)nz^2]\}.$$

ed altre due relazioni analoghe, per i primi membri della seconda e della terza equazione del sistema (3), circolando le lettere nel verso $A_0 \rightarrow B_0 \rightarrow C_0 \rightarrow A_0$, $l \rightarrow m \rightarrow n \rightarrow l$, $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Da qui, tenuto conto della (5), segue che il sistema (3) è soddisfatto dalle espressioni date, per α, β e γ, dalle (6), e questo identicamente qualunque sia $P \equiv (x, y, z)$, se risulta:

$$(8) \qquad M(l-m) = (B_0 - A_0)lm, \quad M(l-n) = (C_0 - A_0)ln,$$

$$M(m-n) = (C_0 - B_0)mn,$$

infatti queste tre equazioni non sono tra loro indipendenti dando luogo, due qualunque di esse, alla terza.

Dalla seconda e dalla terza delle (8) si ha:

$$l = \frac{Mn}{M + (A_0 - C_0)n}, \qquad m = \frac{Mn}{M + (B_0 - C_0)n}.$$

Da queste, sostituendo nella (5) e razionalizzando, segue:

$$(9) \qquad Mn[M + (B_0 - C_0)n]x^2 + Mn[M + (A_0 - C_0)n]y^2 +$$

$$+ [M + (A_0 - C_0)n][M + (B_0 - C_0)n](nz^2 - 1) = 0.$$

Questa è una equazione di terzo grado in n a coefficienti funzioni reali di x, y e z oltre che di M e dei momenti di inerzia A_0, B_0 e C_0.

Assegnato il punto P, e quindi la terna (x, y, z), si hanno tre soluzioni per n e corrispondentemente tre terne (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) e (l_3, m_3, n_3) di valori per i coefficienti della quadrica definita dalla (5). Conseguentemente dalle (6) si hanno tre terne $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ e $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ di valori per i coseni direttori α, β e γ; queste sono necessariamente soluzioni del sistema (3) in quanto sono soddisfatte le (8). Inoltre, per le (6), queste tre soluzioni del sistema (3) soddisfano la (2), e quindi, per la regola di Cramer, i tre valori di I ottenuti dalla (7), sostituendo successivamente al posto di α, β e γ i valori α_1, β_1 e γ_1, α_2, β_2 e γ_2,

α_3, β_3 e γ_3, soddisfano la (4). Infine, poichè dalle soluzioni n_1, n_2 e n_3 della equazione di terzo grado in n che proviene dalla (9) si risale, con operazioni razionali, alle soluzioni della (4) che, come abbiamo notato, è di tipo irriducibile, tutte le volte che I_1, I_2 e I_3 sono distinte, segue che anche l'equazione di terzo grado in n è del tipo irriducibile e perciò anche n_1, n_2 e n_3 sono distinte.

Avremo quindi $I(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = I_1$, $I(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = I_2$, $I(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = I_3$; perciò le rette r_1, r_2 e r_3 per P e di coseni direttori, ordinatamente, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ e $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ costituiscono la terna principale di inerzia del sistema S relativa al punto P. ~~Inoltre, tenuto conto della (5) e delle (6), in corrispondenza delle~~ terne (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) e (l_3, m_3, n_3) si hanno tre quadriche passanti per P che godono della proprietà b) già enunciata.

Vediamo adesso di che tipo sono le quadriche definite dalla (5) e dalle condizioni (8).

A questo scopo, senza alterare le generalità, supponiamo che risulti $A_0 \leq B_0 \leq C_0$.

Esaminiamo da prima il caso in cui si ha $A_0 < B_0 < C_0$.
Per i coefficienti l. m ad n si possono dare due casi:

I) sono tutti dello stesso segno,

II) due dei cofficienti sono di un segno e l'altro è del segno opposto.

Nel primo caso dalla (5) segue che devono essere positivi. inoltre da qui, dalle (8) e dalla posizione fatta per A_0, B_0 e C_0 segue: $l > m > n$. Perciò, posto: $l = \frac{1}{a^2}$, $m = \frac{1}{b^2}$, $n = \frac{1}{c^2}$, la (5) in questo caso si scrive:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \; a^2 < b^2 < c^2.$$

Il caso I) dà quindi luogo ad una famiglia di ellissoidi. Precisiamo subito che nessuno degli ellissoidi di questa famiglia può essere riguardato come ellissoide di inerzia del sistema S relativo al centro P_0. Infatti per gli ellissoidi di questa famiglia il semiasse minimo si ha sulla retta alla quale compete il momento di inerzia minimo.

Nel secondo caso dalle (8) sempre tenuto conto della posizione fatta per A_0, B_0 e C_0, segue che n deve essere positivo. Nel caso II) restano quindi due sole possibilità, o l ed m sono uno positivo e l'altro negativo, ed in questa posizione, per le stesse ragioni per cui deve essere $n > 0$, avremo che l è negativo ed m è positivo con $m > n$, oppure l ed m sono ambedue negativi e in questa posizione si ha $l > m$.

Se risulta $l < 0$, $m > 0$, $n > 0$, $m > n$, posto $l = -\frac{1}{a^2}$, $m = \frac{1}{b^2}$, $n = \frac{1}{c^2}$. la (5) si scrive:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ b^2 < c^2.$$

Si ha perciò una famiglia di iperboloidi ad una falda.

Se invece risulta $l < 0$, $m < 0$, $n > 0$, $l > m$, $l = -\frac{1}{a^2}$, $m = -\frac{1}{b^2}$, $n = \frac{1}{c^2}$, la (5) si scrive:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a^2 > b^2,$$

e si ha allora una famiglia di iperboloidi a due falde.

Se poi è $A_0 = B_0$ dalle (8) segue $l = m$, così come avremo $m = n$ se risulta $B_0 = C_0$.

Come applicazione dei risultati trovati studiamo la distribuzione degli assi principali di inerzia per i punti di uno dei piani principali centrali di inerzia; in questo caso particolare rientra anche il caso del Prof. CALDONAZZO.

Studiamo, per esempio, il caso dei punti del piano $z = 0$. In questa posizione la terza equazione del sistema (3) è soddisfatta o per $\gamma = 0$ o per $I = C_0 + M(x^2 + y^2)$, ma anche in questa seconda posizione risulta $\gamma = 0$, infatti se una delle soluzioni della (4) è uguale a $C_0 + M(x^2 + y^2)$ la retta cui compete questo momento di inerzia è, per il teorema di HUYGENS, parallela all'asse z.

Perciò uno degli assi principali di inerzia relativi ad un punto P di un piano principale centrale di inerzia è necessariamente normale a questo piano.

Inoltre per i punti del piano $z = 0$ le (8) si riducono alla sola condizione $M(l - m) = (B - A)lm$, mentre la (4) si scrive:

$$\begin{vmatrix} A_0 + My^2 - I & -Mxy \\ -Mxy & B_0 + Mx^2 - I \end{vmatrix} = 0.$$

Adesso operando come nel caso generale si prova l'esistenza, nel piano $z = 0$, di due famiglie di coniche, precisamente una famiglia di ellissi ed una di iperboli, tali che in ogni punto P gli assi principali di inerzia sono dati dalle normali in P alle coniche che vi passano.