Bollettino Unione Matematica Italiana

Serge Vasilach

Sur quelques extensions d'un théorème de Titchmarsh.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 386–398.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_386_0>

Sur quelques extensions d'un théorème de Titchmarsh.

par SERGE VASILACH (a Bucarest)

Summary. - *In the present paper the author gives some extensions of Titchmarsh's theorem*: $\left\{\int_a^b e^{zx}f(x)dx \equiv 0,\ z\right.$ *a complex number* $\Big\} \Longrightarrow \Big\{ f = 0$ *a. e. in the interval* (a, b) *of* $R \Big\}$, *to scalar measures defined in the paralellotope* $\Gamma = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ *of* $R^n (n \geq 1)$ *and also to functions defined in* Γ_n, *taking values in* R^n *or in a locally convex space* F, *which are integrable with respect to a positive measure* μ *on* Γ_n.

1. E. C. TITCHMARSH a démontré, (v. [1], Lemma 2. 1, p. 287-288) le

THÉORÈMÈ 1. - *Soient*: $\boldsymbol{R}$ *la droite réelle;* I *un intervalle fini de* $\boldsymbol{R}$ *d'origine* a *et d'extrémitè* b, $a < b$; f(t) *une fonction numérique sommable dans l'intervalle* I *pour la mesure de Lebesgue sur* $\boldsymbol{R}$.

Si

$$F(z) = \int_a^b e^{zt}f(t)dt \equiv 0,\ z = \xi + i\eta,\ \xi \in \boldsymbol{R},\ \eta \in \boldsymbol{R},$$

alors $f(t) = 0$ p.p. *dans* I.

Dans le présent travail nous exposons quelques extensions de ce théorème, aux mesures et aux fonctions définies dans R^n, $n \geq 1$.

Soient:

$R^n =$ espace euclidien à n dimension, $n \geq 1$;

$X^n =$ espace numérique isomorphe à $\boldsymbol{R}^n$;

$\Xi^n =$ dual de X^n;

$Z^n = \Xi^n + i\Xi^n =$ espace vectoriel à n dimension complexe, canoniquement construit sur Ξ^n (ou espace des formes linéaires à valeurs complexes sur X^n);

$t = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \in X^n$; $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \in Z^n$,

$z_j = \xi_j + i\eta_j$, $z = \xi + i\eta$, $\xi \in \Xi^n$, $\eta \in \Xi^n$,

$z \cdot t = \sum_{j=1}^{n} z_j t_j =$ produit scalaire à valeurs complexes;

$\Gamma_n =$ pavé formé de n intervalles d'origine $(a_j)_{1\leq j\leq n}$ et d'extrémité $(b_j)_{1\leq j\leq n}$, les $(a_j)_{1\leq j\leq n}$, $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ ayant des valeurs finies et $a_j < b_j$, $1 \leq j \leq \eta$.

Soit, d'autre part, μ une mesure quelconque sur $\boldsymbol{R}^n$; on a:

THEOREME II. - *Si*

$$F(\zeta) = \int_{\Gamma_n} e^{\zeta t} d\mu(t) \equiv 0$$

où

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in Z^n,\ \zeta_j = \xi_j + i\eta_j,\ \xi_j \in \Xi\ ,\ \eta_j \in \Xi\ ,$$

$$\zeta = \xi + i\eta,\ \xi \in \Xi^n,\ \eta \in \Xi^n,\ \zeta t = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j t_j\,,$$

et

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in X^n,\ d\mu(t) = d\mu(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

alors on $\mu = 0$ *dans*

$$\Gamma_n = \prod_{j=1}^{n}\ ]a_j, b_j[.$$

Remarquons tout d'abord que l'on peut toujours ramener le pavé $\overline{\Gamma}_n$ au cube $K_n = [-1, 1]^n$, par le changement de variables

$$t_j = \frac{(b_j - a_j)x_j + b_j + a_j}{2},\ 1 \leq j \leq n, \tag{3}$$

ce qui nous donne

$$F(\zeta) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j + a_j}{2}\right) \int_{K_n} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j - a_j}{2} \zeta_j x_j\right) \cdot$$

$$\cdot\ d\mu\left(\frac{b_1 - a_1}{2} x_1 + , \dots, \frac{b_n - a_n}{2} x_n + \frac{b_n + a_n}{2}\right).$$

En posant

$$z_j = \frac{b_j - a_j}{2} \zeta_j,\ z = (z_1, z_2, \dots, z_n),\ zx = \sum_{j=1}^{n} z_j x_j\,,$$

$$\mu\left(\frac{b_1 - a_1}{2} x_1 + \frac{b_1 + a_1}{2}, \dots, \frac{b_n - a_n}{2} x_n + \frac{b_n + a_n}{2}\right) = \nu(x_1\ x_2, \dots x_n) = \nu(x),$$

le théorème II est ramené à montrer que

$$\left[F(z) = \int_{K_n} e^{zx} d\nu(x) \equiv 0\right] \Rightarrow (\nu = \text{dans } \mathring{K}_n =]-1,\ 1[^n).$$

Pour simplifier les écritures, nous donnons la demostration pour $n=2$, en prouvant que:

$$\left[F(z_1, z_2)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{z_1x_1+z_2x_2}d\nu(x_1, x_2\equiv 0)\right] \Rightarrow (\nu=0 \quad \text{dans } K_2=-1, 1[^2).$$

DÉMONSTRATION.

Prenons

$$z_1=i\eta_1, \quad z_2=i\eta_2;$$

il vient:

$$(5)\quad F(i\eta_1, i\eta_2)+F(i\eta_1, -i\eta_2)=2\int_{-1}^{1} e^{i\eta_1x_1}\int_{0}^{1}\cos\eta_2x_2[d\nu(x_1, x_2)-d\nu(x_1, -x_2)]$$

et

$$(6)\quad F(-i\eta_1, i\eta_2)+F(-i\eta_1, -i\eta_2)=2\int_{-1}^{1} e^{\quad i\eta_1x_1}\int_{0}^{1}\cos\eta_2x_2[d\nu(x_1, x_2)-d\nu(x_1, -x_2)]$$

Donc

$$(7)\quad F(i\eta_1, i\eta_2)+F(i\eta_1, -i\eta_2)+F(-i\eta_1, i\eta_2)+F(-i\eta_1-i\eta_2)=$$

$$=4\int_{-1}^{1}\cos\eta_1x_1\int_{0}^{1}\cos\eta_2x_2[d\nu(x_1, x_2)-d\nu(x_1, -x_2)]=$$

$$=4\int_0^1\int_0^1 \cos\eta_1x_1\cos\eta_2x_2[d\nu(x_1, x_2)-d\nu(x_1, -x_2)-d\nu(-x_1, x_2)]+d\nu(-x_1, -x_2)]$$

En multipliant les deux membres de (7) par $\dfrac{\sin\eta_1u_1}{\eta_1}\,\dfrac{\sin\eta_2u_2}{\eta_2}$ et en intégrant par rapport à η_1 de 0 à λ_1, et par rapport à η_2 de 0 à λ_2, on a, en appliquant le théorème de FUBINI (v. BOURBAKI [2], Théorème 1, §8, no. 1):

$$(8)\quad \int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2}[F(i\eta_1, i\eta_2)+F(i\eta_1, -i\eta_2)+F(-i\eta_1, i\eta_2)+F(-i\eta_1, -i\eta_2)]\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin\eta_1u_1}{\eta_1}\,\frac{\sin\eta_1u_1}{\eta_2}d\eta_1d\eta_2=$$

$$=4\int_0^1\int_0^1[d\nu(x_1, x_2)-d\nu(x_1, -x_2)-d\nu(x_1, -x_2)+d\nu(-x_1, -x_2)]\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2}\frac{\sin\eta_1u_1}{\eta_1}\,\frac{\sin\eta_2u_2}{\eta_2}\cos\eta_1x_1\cos\eta_2x_2d\eta_1d\eta_2.$$

Mais pour u_i, x_i, $(i=1, 2)$, réels, on a:

$$\left|\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2}\frac{\sin \eta_1 u_1}{\eta_1}\cos \eta_1 x_1 \frac{\sin \eta_2 u_2}{\eta_2}\cos \eta_1 x_2 d\eta_1 d\eta_2\right| \leq \left(\int \frac{\sin u}{u}\right)^2.$$

Donc, en vertu du théorème de Lebesgue de passage à la limite sous le signe d'intégration, (N. BOURBAKI [3], Théorème 2 du chap. IX, § 4, nr. 3) on a pour $\lambda_1 \Rightarrow +\infty$, $\lambda_2 \Rightarrow +\infty$:

$$(9)\quad \int_0^1\int_0^1 [d\nu(x_1, x_2) - d\nu(x_1, -x_2) - d\nu(-x_1, x_2) + d\nu(-x_1, -x_2)]\cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin u_1\eta_1}{\eta_1}\cos \eta_1 x_1 \frac{\sin u_2\eta_2}{\eta_2}\cos \eta_2 x_2 d\eta_1 d\eta_2 =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty [F(i\eta_1, i\eta_2) + F(i\eta_1, -i\eta_2) + F(-i\eta_1, i\eta_2) + F(-i\eta_1, -i\eta_2)]\cdot$$

$$\cdot \frac{\sin u_1\eta_1}{\eta_1}\frac{\sin u_2\eta_2}{\eta_2} d\eta_1 d\eta_2 .$$

Mais

$$(10)\quad \int_0^\infty \frac{\sin u\eta}{\eta}\cos \eta x d\eta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ pour } \pi < u \\ 0 \text{ pour } x > u \end{cases}.$$

Donc, eu égard à (10) et à la condition $F(z_1, z_2) \equiv 0$, la relation (9) prend la forme:

$$(11)\quad \int_0^{u_1}\int_0^{u_2} [d\nu(x_1, x_2) - d\nu(x_1, -x_2) - d\nu(-x_1, x_2) + d\nu(-x_1, -x_2)].$$

pour $0 < u_1 < 1$; $0 < u_2 < 1$.

D'autre part on a:

$$(12)\quad F(i\eta_1, i\eta_2) - F(i\eta_1, -i\eta_3) = 2i\int_{-1}^1\int_{-1}^1 e^{i\eta_1 x_1}\sin \eta_2 x_2 d\nu(x_1, x_2) =$$

$$= 2i\int_{-1}^1 e^{i\eta_1 x_1}\int_0^1 \sin \eta_2 x_2 [d\nu(x_1 . x_2) + d\nu(x_1, -x_2)]$$

d'où:

$$(13)\quad F(-i\eta_1,i\eta_2)-F(-i\eta_1,-i\eta_2)=2i\int_{-1}^{1}e^{-i\eta_1x_1}\int_0^1\sin\eta_2x_2[d\nu(x_1,x_2)+d\nu(x_1,-x_2)]$$

et

$$(14)\quad F(i\eta_1,\ i\eta_2)-F(i\eta_1,\ -i\eta_2)+F(-i\eta_1,\ i\eta_2)-F(-i\eta_1,\ -i\eta_2)=$$

$$=4i\int_{-1}^{1}\cos\eta_1x_1\int_0^1\sin\ \eta_2x_2[d\nu(x_1,\ x_2)+d\nu(x_1,\ -x_2)]=$$

$$=4i\int_0^1\cos\eta_1x_1\int_0^1\sin\ \eta_2x_2[d\nu(x_1,\ x_2)+d\nu(x_1,\ -x_2)-d\nu(-x_1,\ x_2)-$$
$$-d\nu(-x_1,\ -x_2)].$$

En multipliant les deux membres de (14) par $\frac{\sin\ u_1\eta_1}{\eta_1}\frac{1-\cos\ u_2\eta_2}{\eta_2}$, alors par des opérations analogues aux précédentes, on trouve:

$$(15)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin\ u_1\eta_1}{\eta_1}\frac{1-\cos\ u_2\eta_2}{\eta_2}[F(i\eta_1,\ i\eta_2)-F(i\eta_1,-i\eta_2)+$$
$$+F(-i\eta_1,\ i\eta_2)-F(-i\eta_1,\ -i\eta_2)]d\eta_1d\eta_2=$$
$$=4i\int_0^1\int_0^1[d\nu(x_1,\ x_2)+d\nu(x_1,-x_2)-d\nu(-x_1,\ x_2)-d\nu(-x_1,\ -x_2)]\cdot$$
$$\cdot\int_0^\infty\frac{\sin\ u_1\eta_1}{\eta_1}\cos\ \eta_1x_1d\eta_1\int_0^\infty\frac{1-\cos\ u_2\eta_2}{\eta_2}\cos\ \eta_2x_2d\eta_2.$$

Mais

$$(16)\quad \int_0^\infty\frac{1-\cos u_2\eta_2}{\eta_2}\cos\ \eta_2x_2d\eta_2=\begin{cases}\pi/2 & \text{pour } x_2<u_2\\ 0 & \text{pour } x_2>u_2\end{cases}.$$

Donc, en vertu de (16) et de la condition $F(z_1,\ z_2)\equiv 0$, la relation (15) nous donne:

$$(17)\quad \int_0^{u_1}\int_0^{u_2}[d\nu(x_1,x_2)+d\nu(x_1,-x_2)-d\nu(-x_1,x_2)-d\nu(-x_1,-x_2)]=0.$$

De même, compte tenu de (12) et (13), on a:

$$F(i\eta_1, i\eta_2) - F(i\eta_1, -i\eta_2) - F(-i\eta_1, i\eta_2) + F(-i\eta_1, -i\eta_2) =$$

$$= -4\int_{-1}^{1} \sin \eta_1 x_1 \int_{0}^{1} \sin \eta_2 x_2 [d\nu(x_1, x_2) + d\nu(x_1, -x_2)] =$$

$$= -4\int_0^1\int_0^1 \sin \eta_1 x_1 \sin \eta_2 x_2 [d\nu(x_1, x_2) + d\nu(x_1, -x_2) +$$

$$+ d\nu(-x_1, x_2) + d\nu(-x_1, -x_2)] = 0.$$

En multipliant cette relation par $\frac{1 - \cos u_1\eta_1}{\eta_1} \frac{1 - \cos u_2\eta_2}{\eta_2}$, on trouve par des opérations analogues aux précédentes:

$$(18)\int_0^{u_1}\int_0^{u_2} [d\nu(x_1, x_2) + d\nu(x_1, -x_2) + d\nu(-x_1, x_2) + d\nu(-x_1, -x_2)] = 0,$$

pour $0 < u_1 < 1$, $0 < u_2 < 1$.

Enfin les relations (5) et (6) nous donnent:

$$F(i\eta_1, i\eta_2) + F(i\eta_1, -i\eta_2) - F(-i\eta_1, i\eta_2) + F(-i\eta_1, -i\eta_2) =$$

$$= 4i \int_{-1}^{1} \sin \eta_1 x_1 \int_0^1 \cos \eta_2 x_2 [d\nu(x_1, x_2) - d\nu(x_1, -x_2)] =$$

$$= 4i\int_0^1\int_0^1 \sin \eta_1 x_1 \cos \eta_2 x_2 [d\nu(x_1, x_2) - d\nu(x_1, -x_2) + d\nu(-x_1, x_2) - d\nu(-x_1, -x_2)].$$

En multipliant les deux membres de cette relation par $\frac{1 - \cos u}{\eta_1}$ $\frac{\sin \eta_2 u_2}{\eta_2}$, on trouve de même, par des opérations analogues aux précédentes:

$$(19)\int_0^{u_1}\int_0^{u_2} [d\nu(x_1, x_2) - d\nu(x_1, -x_2) + d\nu(-x_1, x_2) - d\nu(-x_1, -x_2)] - 0.$$

pour $0 < u_1 < 1$, $0 < u_2 < 1$. En posant:

$$(20) \quad \begin{cases} X_1 = \int_0^{u_1}\int_0^{u_2} d\nu(x_1, x_2); \; X_2 = \int_0^{u_1}\int_0^{u_2} d\nu(x_1, -x_2) \\ X_3 = \int_0^{u_1}\int_0^{u_2} d\nu(-x_1, x_2); \; X_4 = \int_0^{u_1}\int_0^{u_2} d\nu(-x_1, -x_2), \end{cases}$$

les équations (11), (17), (18) et (19) sont équivalentes au système suivant d'équations linéaires et homogènes:

$$(21)\qquad \begin{cases} X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

qui n'admet que la solution unique:

$$(22)\qquad X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0.$$

Compte tenu des notations (20), la solution (22) s'écrit encore:

$$(23)\qquad \int_0^{u_1}\int_0^{u_2} d\nu(x_1,\ x_2) = \int_0^{u_1}\int_0^{u_2} d\nu(x_1,\ -x_2) =$$

$$= \int_0^{u_1}\int_0^{u_2} d\nu(-x_1,\ x_2) = \int_0^{u_1}\int_0^{u_2} d\nu(-x_1,\ -x_2) = 0$$

pour $0 \leq x_1 < u_1 < 1$, $0 \leq x_2 < u_2 < 1$. Mais

$$(24)\qquad \left(\int_0^{u_1}\int_0^{u_2} d\nu(\xi,\ \eta) = 0 \qquad \text{pour } 0 \leq u_1 < 1,\ 0 \leq u_2 < 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\nu = 0 \quad \text{dans}]0,\ 1]^2).$$

2. On démontre la proposition exprimée par l'implication (24) en considérant la fonction à variation bornée qui définit la mesure ν. Mais, étant donnée l'importance de cette proposition dans diverses applications, nous en exposons ci-après une démonstration qui nous semble inédite, en démontrant le

Théorème III. - Soient:

$\boldsymbol{R}^n$ *l'espace euclidien à n dimensions,* $n \geq 1$; $a = \{a_1,\ a_2, \dots,\ a_n\}$; *un point fixe et* $x = \{x_1,\ x_2, \dots,\ x_n\}$ *un point variable de* $\boldsymbol{R}^n$; $\mathrm{H}_x = \prod_{j=1}^{n} [\, a_j,\ x_j [$ *pavé semi-ouvert, produit de n intervalles, d'origine fixe* a_j *et d'extrémité variable* x_j, *tels que* $-\infty < a_j \leq x_j < b_j < \infty$, $1 \leq j \leq n$; $\Gamma_n = \prod_{j=1}^{n} [\, a_j,\ b_j [$ $=$ *pavé fixe semi-ouvert, contenu dans* $\boldsymbol{R}^n$.

Soit μ une mesure quelconque sur $\boldsymbol{R}^n$.

Dans ces conditions, si la mesure $\mu(H_x)$ est égale à zero, alors on a $\mu = 0$ dans le pavé ouvert $\mathring{\Gamma}_n = \prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j[$.

DÉMONSTRATION

La démonstration de ce théorème s'appuie, en premier lieu, sur la propriété soustractive de la mesure μ,

$$\text{i. e. } (F \subset E) \Rightarrow \mu(E - F) = \mu(E) - \mu(F).$$

En effet, soit $\prod_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j[$ un pavé semi-ouvert quelconque, contenu dans Γ_n. On a

$$[\alpha_j, \beta_j[= [a_j, \beta_j[- [a_j, \alpha_j[, \quad 1 \leq j \leq n,$$

d'où

$$(25) \quad \mu(\prod_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j[) = \mu\{\prod_{j=1}^{n-1} [\alpha_j, \beta_j[\times ([a_n, \beta_n[- [a_n, \alpha_n[)\} =$$

$$= \mu(\prod_{j=1}^{n-1} [\alpha_j, \beta_j[\times [a_n, \beta_n[- \prod_{j=1}^{n-1} [\alpha_j, \beta_j[\times [a_n, \alpha_n[).$$

Mais

$$\prod_{j=1}^{n-1} [\alpha_j, \beta_j[\times [a_n, \beta_n[\supset \prod_{j=1}^{n-1} [\alpha_j, \beta_j[\times [a_n, \alpha_n[,$$

donc, μ étant soustractive, il vient

$$\mu(\prod_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j[) = \mu(\prod_{j=1}^{n-1} [\alpha_j, \beta_j[\times [a_n, \beta_n[) - \mu(\prod_{j=1}^{n-1} [\alpha_j, \beta_j[\times [a_n, \alpha_n[)$$

De même

$$\mu(\prod_{j=1}^{n-1} [\alpha_j, \beta_j[\times [a_n, \beta_n[) =$$

$$= \mu\{\prod_{j=1}^{n-2} [\alpha_j, \beta_j[\times ([a_{n-1}, \beta_{n-1}[- [a_{n-1}, \alpha_{n-1}[) \times [a_n, \beta_n[)$$

$$\mu(\prod_{j=1}^{n-1} [\alpha_j, \beta_j[\times [a_n, \alpha_n[) = \mu\{\prod_{j=1}^{n-2} [\alpha_j, \beta_j[\times (a_{n-1}, \beta_{n-1}[- [a_{n-1}, \alpha_{n-1}[) \times [a_n, \alpha_n[\}$$

et

$$\prod_{j=1}^{n-2} [\alpha_j, \beta_j[\times [a_{n-1}, \beta_{n-1}[\supset \prod_{j=1}^{n-2} [\alpha_j, \beta_j[\times [a_{n-1}, \alpha_{n-1}[,$$

donc

$$\mu(\prod_{j=1}^{n}[\alpha_j,\ \beta_j[= \mu(\prod_{j=1}^{n-2}[\alpha_j,\ \beta_j[\times[a_{n-1},\ \beta_{n-1}[\times[a_n,\ \beta_n[-$$

$$-\mu(\prod_{j=1}^{n\ 2}[\alpha_j,\ \beta_j[\times[a_{n-1},\ \alpha_{n-1}[\times[a_n,\ \beta_n[) -$$

$$-\mu(\prod_{j=1}^{n-2}[\alpha_j,\ \beta_j[\times[a_{n-1},\ \beta_{n-1}[\times[a_n,\ \alpha_n[)+$$

$$+\mu(\prod_{j=1}^{n-2}[\alpha_j,\ \beta_j[\times[a_{n-1},\ \alpha_{n-1}[\times[a_n,\ \alpha_n[).$$

Par des opérations analogues aux precédentes on trouve finalement:

$$\mu(\prod_{j=1}^{n}[\alpha_j,\ \beta_j[) = \mu(\prod_{j=1}^{n}[a_j,\ \beta_j[) - \sum_{j=1}^{n}\mu([a_1,\ \beta_1[\times[a_2,\ \beta_2[\times\ldots$$
$$\ldots\times[a_{j-1},\ \beta_{j-1}[\times[a_j,\ \alpha_j[\times[a_{j+1},\ \beta_{j+1}[\times\ldots[a_n,\ \beta_n[)+$$
$$+\sum_{j\neq k}\mu([a_1,\ \beta_1[\times\ldots\times[a_{j-1},\ \beta_{j-1}[\times[a_j,\ \alpha_j[\times[a_{j+1},\ \beta_{j+1}[\times\ldots$$
$$\ldots[a_{k-1},\ \beta_{k-1}[\times[a_k,\ \alpha_k[\times[a_{k+1},\ \beta_{k+1}[\times\ldots[a_n,\ \beta_n[)+\ldots$$
$$+(-1)^n\mu(\prod_{j=1}^{n}[a_j,\ \alpha_j[). \tag{26}$$

En remarquant que toutes les mesures du second membre de (2) sont égales à zéro par hypothèse, on trouve

$$\mu(\prod_{j=1}^{n}[\alpha_j,\ \beta_j[) = 0.$$

quel que soit le pavé semi-ouvert $\prod_{j=1}^{n}[\alpha_j,\ \beta_j[$ contenu dans Γ_n.

Soit d'autre part G un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$ contenu dans Γ_n. G est (v. [4]. Prop. 3.6) réunion dénombrable de pavés semi-ouverts et disjoints, i. e.,

$G = \bigcup_{k\in\boldsymbol{N}} J_k,\ J_k\cap J_j = \emptyset$ pour $j\neq k$, et $J_k = \prod_{j=1}^{n}[\alpha_j^k,\ \beta_j^k[\subset\Gamma_n$. $\alpha_j^h > a_j,\ 1\leq j\leq n,\ k\in\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Donc

$$\mu(G) = \mu(\bigcup_{k\in\boldsymbol{N}} J_k) = \sum_{k\in\boldsymbol{N}}\mu(J_k).$$

Mais $\mu(J_k) = 0$ pour tout pavé semi-ouvert J_k de Γ_n; par conséquent

$$\mu(G) = 0$$

sur tout ouvert de Γ_n.

En posant

$$\mu(G) = \mu^+(G) - \mu^-(G) \tag{27}$$

la relation $\mu(G) = 0$ entraîne

$$\mu^+(G) = \mu^-(G) \tag{28}$$

quel que soit l'ouvert G, de Γ_n. Parailleurs to t ouvert G étant relativement compact, donc intégrable, on a

$$\mu^{+*}(G) = \mu^+(G) \text{ et } \mu^{-*}(G) = \mu^-(G), \tag{29}$$

$\mu^{+*}(G)$ (resp. $\mu^{-*}(G)$, étant la mesure extérieure de G par rapport à μ^+ (resp. μ^-).

Soit enfin A un ensemble quelconque, contenu dans Γ_n · $\mu^{+*}(A$· (resp. μ^{-*} (A)) est (v. [3], Chap. IV, § 1, Prop. 19) égale à la borne inférieure des mesures extérieures des ensembles ouverts conte nant A, i. e.,

$$\mu^{+*}(A) = \inf_{G\in O} \mu^{+*}(G);\ \mu^{-*}(A) = \inf_{G\in O} \mu^{-*}(G) \tag{30}$$

O étant l'ensemble des ensembles ouvertes contenant A.

Si A est intégrable. alors, eu égard à (29), la relation (30) peut encore s'écrire:

$$\mu^+(A) = \inf_{G\in O} \mu^+(G);\ \mu^-(A) = \inf_{G\in O} \mu^-(G). \tag{31}$$

En outre, la relation (28) entraîne

$$\inf_{G\in O} \mu^+(G) = \inf_{G\in O} \mu^-(G), \tag{32}$$

donc de (31) et (32) on tire

$$\mu^+(A) = \mu^-(A), \tag{33}$$

pour tout ensemble intégrable A contenu dans Γ_n, en particulier,

$$\mu^+(K) = \mu^-(K) \tag{34}$$

pour tout compact K contenu dans Γ_n. Donc

$$\mu^+ = \mu^- \qquad \text{dans } \mathring{\Gamma}_n, \tag{35}$$

car (v. [3], Chap. IV, § 4, Cor. de la Prop. 16), si deux mesures positives μ et ν sur un espace localement compact E, sont telles que $\mu(K) = \nu(K)$ sur tout compact K de E, alors on a $\mu = \nu$. Donc

$$\mu = 0 \quad \text{dans} \quad \overset{\circ}{\Gamma}_n . \qquad \text{c. q. f. d.}$$

3. Revenons maintenant au théorème II.

En vertu du théorème III (donc de l'implication (24)), les relations (23) nous donnent:

$$\nu(x_1, x_2) = \nu(x_1, -x_2) = \nu(-x_1, x_2) = \nu(-x_1, -x_2) = 0$$

dans $]0, 1[^2$, donc $\nu = 0$ dans $]-1, 1[^2$.

Par conséquent, le théorème II est ainsi démontré pour $n = 2$. Démonstration analogue pour $n > 2$, en s'appuyant sur le Théorème III, c. q. f. d.

Remarque 1.

Le théorème III possède deux importants corollaires, à savoir:

Corollaire 1. – *Soit f une fonction numérique finie et intégrable pour une mesure positive μ dans Γ_n. Si*

$$\int_{H_x} f d\mu = 0$$

alors on a $f = 0$ p. p. dans $\overset{\circ}{\Gamma}_n$.

En effet, on peut écrire

$$\int_{H_x} f d\mu = \nu(H_x) \tag{36}$$

où ν est la mesure de densité f par rapport à la mesure positive μ. (V. [2], § 5, Définition 2).

En vertu du théorème III, $\nu(H_x) = 0$ entraîne $\nu = 0$, i. e., $f \cdot \mu = 0$ dans $\overset{\circ}{\Gamma}_n$, donc (v. [2], § 5, Cor. de la Prop. 5), $f = 0$ p. p. dans $\overset{\circ}{\Gamma}$. c. q. f. d.

Corollaire 2. – *Soit F un espace localment convexe séparé, quasicomplet sur $\boldsymbol{R}$, tel qu'il existe dans le dual F' de F une suite* $(\overrightarrow{a'_n})$ partout dense pour la topologie faible $\sigma(F', F)$.

Soit $L^1_F(\Gamma_n, \mu)$ l'espace des fonction définies dans Γ_n, à valeurs dans F et faiblement intégrables pour la mesure positive μ sur $\boldsymbol{R}^n$.

Dans ces conditions, si $\vec{f} \in L^1_F(\Gamma_n, \mu)$ est telle que

$$\int_{H_x} \vec{f}(\xi) d(\xi) = 0, \tag{37}$$

alors on a $\vec{f} = 0$ *dans* $\mathring{\Gamma}_n$, *sauf sur un ensemble* μ*-négligeable* H *de* Γ_n.

DEMONSTRATION.

Par définition, l'intégrale faible du premier membre de (37) peut encore s'écrire

$$\int_{H_x} \vec{f}(\xi),\ d\mu(\xi) = \int_{H_x} < \vec{f}(\xi), \overleftarrow{a'} > d\mu(\xi) = 0 \tag{38}$$

pour tout $\overleftarrow{a'} \in F'$. En particulier, on doit avoir

$$\int_{H_x} < \vec{f}(\xi), \overleftarrow{a'_n} > d\mu(\xi) = 0, \tag{39}$$

pour tout élément $\overleftarrow{a'_n}$ de la suite $(\overleftarrow{a'_n})$, partout dense dans F' faible.

D'autre part, de (38) on tire, pour tout $\overleftarrow{a'_n}$, en vertu du corollaire 1, la relation $< \vec{f}(x), \overleftarrow{a'_n} > = 0$, sauf sur un ensemble négligeable H_n, qui dépend de $\overleftarrow{a'_n}$. On exprime encore ce résultat en disant que l'ensemble H_n des $x \in \Gamma_n$ tels que $< \vec{f}(r), \overleftarrow{a'_n} > = 0$ est μ-négligeable. Il en est donc de même de leur réunion H (v. [5], Chap. IV, § 2, Prop. 4).

Donc $< \vec{f}(x), \overleftarrow{a'_n} > = 0$ pour tout $x \notin H$ et pour tout n. Cela signifie que les formes linéaires faiblement continues sur F', $\overleftarrow{z'} \Rightarrow < \vec{f}(x), \overleftarrow{z'} >$, sont nulles en chacun des points a'_n, donc nulles sur F', $(\overleftarrow{a'_n})$ étant partout dense dans F' faible, Donc (v. [3] Chap. IV, § 2, Prop. 10), $\vec{f}(x) = 0$ pour tout $x \notin H$. c. q. f. d.

REMARQUE 2. – L'hypothèse du Théorème III s'applique en particulier, lorsque F est un espace localement convexe métrisable, tel qu'il existe dans F un ensemble total dénombrable, car dans ce cas, il existe (v. [5]. Chap. IV, § 2, Cor. de la Prop. 3) dans le dual F' de F un ensemble dénombrable partout dense pour la topologie faible.

Du Corollaire 1 et du Théorème II, on déduit

TÉORÊME IV. – *Les notations étant celles du théorème II, et du Corollaire 1 du Théorème III, si* f *est une fonction numérique intégrable pour une mesure positive* μ *dans* $\overline{K}_n = [-1, 1]^n$ *et si*

$$F(z) = \int_{K_n} e^{zx} f(x) d\mu(x) \equiv 0,$$

où

$$z = \xi + i\eta,\ \xi \in \Xi^n,\ \eta \in \Xi^n,\ z = (z_1, z_2, \dots, z_n),\ z_j = \xi_j + i\eta_j,$$

$$zx = \sum_{j=1}^{n} z_j x_j,$$

alors on a

$$f = 0 \text{ p. p. } dans\ 1[^n.\ ] - 1,$$

DÉMONSTRATION. - En posant $\nu(x) = f(x)\mu(x)$, on est ramené au théorème II; donc $(F(z) \equiv 0) \Rightarrow (\nu = 0$ dans $\Gamma_n)$, d'où $(\nu = f \cdot \mu = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (f = 0$ p. p. dans $\overset{\circ}{\Gamma}_n)$ en vertu du Corollaire 1 du Théorème III.

Enfin, le Théorème II et le corollaire 2 du théorème III nous permettent de démontrer le

THÉOREME V. - *Soit F un espace localement convexe séparé, quasi-complet sur* $\mathbf{R}$, *tel qu'il existe dans le dual* F' *de* F *une suite par tout dense pour la topologie faible* $\sigma(F', F)$. *Soit* $L^1{}_F(\Gamma_n, \mu)$ *l'espace vectoriel des fonctions définies dans le pavé* $K_n = [-1, 1]^n$ *faiblement intégrables pour une mesure positive* μ, *dans le pavé* K_n.

Si $\vec{f} \in L^1{}_F(\Gamma_n, \mu)$ *est telle que*

$$F(z) = \int_{K_n} e^{zx} \vec{f}(x) d\mu(x) \equiv 0,$$

où

$$z = \xi + i\eta,\ \xi \in \Xi^n,\ \eta \in \Xi^n,\ zx = \sum_{j=1}^{n} z_j x_j,$$

alors on a $\vec{f} = 0$ *dans* $\overset{\circ}{\Gamma}_n$, *sauf sur un ensemble* μ*-négligeable de* Γ_n

DÉMONSTRATION. - On a

$$F(z) = \int_{K_n} e^{zx} \vec{f}(x) d\mu(x) = \int_{K_n} e^{zx} < \vec{f}(x), \overleftarrow{a'}_n > d\mu(x) \equiv 0$$

pour tout $\overleftarrow{a'}_n \in F'$, donc

$$\int_{K_n} e^{zx} < \vec{f}(x), \overleftarrow{a'}_n > d\mu(x) \equiv 0$$

pour tout élément $\overleftarrow{a'}_n$ de la suite $(\overleftarrow{a'}_n)$, partout dense dans F'. D'autre part, en vertu du théorème IV, on a $< \vec{f}(x), \overleftarrow{a'}_n > = 0$, sauf sur un ensemble négligeable H_n, qui dépend de $\overrightarrow{a'}_n$. Donc en vertu du corollaire 2, il vient $\vec{f} = 0$ dans $\overset{\circ}{\Gamma}_n$ sauf sur un ensemble H de Γ_n, négligeable pour la mesure positive μ sur Γ_n.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. C. TITCHMARSH, *The zeros of certain integral Functions*, « Proc. of the London Math. Soc.», Second Series, vol. 25, 1926, p. 283-302.

[2] N. BOURBAKI, *Integration*, Chap. V, Paris, 1956.

[3] N. BOURBAKI, *Intégration*, Chap. I-IV, Paris, 1952.

[4] E. J. MC SHANE, *Intégration*, Princeton, 1947.

[5] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. III-V, Paris, 1955.