Giorgio Sestini

Ancora su di un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 373–375.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_373_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Ancora su di un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan.

Nota di GIORGIO SESTINI (a Firenze)

Sunto. - *Con riferimento ad una recensione della "Mathematical Reviews„ si sottolinea la sostanziale validità della dimostrazione di un teorema di unicità, dato dall'A. in un precedente lavoro.*

Summary. - *The A. shows that his proof of a uniqueness theorem is substantially correct.*

In una Nota di questo Bollettino [1] (1) esposi con qualche dettaglio una dimostrazione di unicità per problemi unidimensionali analoghi a quello di STEFAN, solamente accennata in altro lavoro [2] e questo per rispondere ad una osservazione del Sig. DOUGLAS Jr. [3]. Ora sfortunatamente un ripetuto errore di stampa, la scrittura di t al posto di t^* nell'ultimo rigo di pag. 2 e in tutta la pag. 3 del citato lavoro oltre al fatto che sarebbe stato forse opportuno, per maggior chiarezza, aver scritto al posto delle due prime righe di pag. 3: « risulta chiaro che con $Z^{(1)}(\xi, t^*)$ e $Z^{(2)}(\xi, l^*)$ coincidono per $t = t^*$ e $0 \leq \xi \leq y(t^*)$ le soluzioni $Z^{(1)}(\xi, t)$ e $Z^{(2)}(\xi, t)$ dei due sistemi ... », hanno fatto ritenere inesatta la dimostrazione del teorema al Sig. DE PRIMA [4].

In vista della sua recensione, il Sig. DE PRIMA mi segnalò, il 15 luglio 1958, la sua perplessità circa la validità della dimostrazione, avendo ritenuto che io dovessi supporre $x(t) \geq y(t)$ per ogni $t \leq t^*$, e non soltanto per $t = t^*$, ricadendo così nella ipotesi restrittiva rilevata da DOUGLAS. Io risposi immediatamente osservando che: « malauguratamente la forma aveva tradito la sostanza della mia dimostrazione, che si basava solo su di una analisi puntuale per $t = t^*$ » e che « se avesse sostituito all'ultima riga di pag. 2 e a tutta la pag. 3 la allegata corretta redazione, ogni dubbio sarebbe stato chiarito ».

Il Sig. DE PRIMA nello scrivere la sua lapidaria recensione non ha creduto far cenno nè allo scambio di lettere nè al chiarimento che gli avevo fornito. Per evitare qualsiasi dubbio sulla

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

validità della mia dimostrazione ritengo opportuno far seguire alle osservazioni di cui sopra la redazione di pag. 3 del citato lavoro, a suo tempo inviata al Sig. DE PRIMA.

Consideriamo due funzioni $Z^{(1)}(\xi, t)$ e $Z^{(2)}(\xi, t)$, soluzioni in $0 \leq t \leq T$ dei due sistemi:

$$(B_1) \qquad \begin{cases} k_1 \dfrac{\partial^2 Z^{(1)}}{\partial \xi^2} = \dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial t}, \quad 0 < \xi < y(t*); \\ \left[\dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial \xi}\right]_{\xi=0} = 0, \\ Z^{(1)}(y(t*), t) = -U^{(1)}(y(t*), t) \leq 0, \\ Z^{(1)}(\xi, 0) = 0; \end{cases}$$

$$(B_2) \qquad \begin{cases} k_2 \dfrac{\partial Z^{(2)}}{\partial \xi^2} = \dfrac{\partial Z^{(2)}}{\partial t}, \quad x(t*) < \xi < a; \\ \left[\dfrac{\partial Z^{(2)}}{\partial \xi}\right]_{\xi=a} = 0, \\ Z^{(2)}(x(t*), t) = V^{(2)}(x(t*), t) \leq 0, \\ Z^{(2)}(\xi, 0) = 0. \end{cases}$$

Per questi sistemi, nelle nostre ipotesi, valgono ben noti teoremi di esistenza ed unicità. Consideriamo ora sempre per $0 \leq t \leq T$, i due sistemi:

$$(C_1) \qquad \begin{cases} k_1 \dfrac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial \xi^2} = \dfrac{\partial W^{(1)}}{\partial t}, \quad -y(t*) < \xi < y(t*); \\ W^{(1)}(\pm y(t*), t) = -U^{(1)}(y(t*), t) \leq 0, \\ W^{(1)}(\xi, 0) = 0; \end{cases}$$

$$(C_2) \qquad \begin{cases} k_2 \dfrac{\partial^2 W^{(2)}}{\partial \xi^2} = \dfrac{\partial W^{(2)}}{\partial t}, \quad x(t*) < \xi < 2a - x(t*); \\ W^{(2)}(x(t*), t) = V^{(2)}(x(t*), t) \leq 0, \\ W^{(2)}(2a - x(t*), t) = V^{(2)}(x(t*), t) \leq 0, \\ W^{(2)}(\xi, 0) = 0. \end{cases}$$

Essendo $\left[\frac{\partial Z^{(1)}}{\partial \xi}\right]_{\xi=0}=0$ (rispettivamente $\left[\frac{\partial Z^{(2)}}{\partial \xi}\right]_{\xi=a}=0$), con una riflessione rispetto alla retta $\xi=0$ $(\xi=a)$, da $Z^{(1)}(\xi, t)$ $(Z^{(2)}(\xi, t))$ soluzione di (B_1) (di (B_2)), si può ottenere una soluzione regolare $W^{(1)}$ di (C_1) $(W^{(2)}$ di $(C_2))$. Tale soluzione, date le ipotesi, risulta come è ben noto unica e nel sottocampo $[(0, y(t^*); (0, T)]$ $([(x(t^*), a); (0, T)])$ coincidente con $Z^{(1)}$ (con $Z^{(2)}$). Essendo poi la $W^{(1)}$ (la $W^{(2)}$) non positiva sul contorno regolare del campo di esistenza, tale sarà in ogni punto interno (cfr. [5], pag. 712) e quindi anche sulla caratteristica $t=t^* \leq T$. Questo ci permette di affermare che su tale caratteristica si avrà

$$Z^{(1)}(\xi, t^*) \leq 0, \qquad Z^{(2)}(\xi, t^*) \leq 0.$$

Per $t=t^*$ $V^{(1)}(x, t)$ soddisfa al sistema ottenuto da (A_1), sostituendo $y(t^*)$ al posto di $\alpha(t)$; parimenti per $t=t^*$ $U^{(1)}(x, t)$ soddisfa al sistema ottenuto da (A_1), ponendo $x(t^*)$ al posto di $\alpha(t)$; ne viene che per $t=t^*$ e nel campo $0<\xi<y(t^*)$, essendo $x(t^*)>y(t^*)$, la differenza $V^{(1)}(\xi, t^*)-U^{(1)}(\xi, t^*)$ soddisfa al sistema (B_1) e perciò risulta uguale alla $Z^{(1)}(\xi, t^*)$. Resta così provata la disuguaglianza:

$$V^{(1)}(\xi, t^*)-U^{(1)}(\xi, t^*) \leq 0.$$

Analogo ragionamento, operando sui sistemi contrassegnati dall'indice 2, porta a stabilire l'altra disuguaglianza: $V^{(2)}(\xi, t^*)-U^{(2)}(\xi, t^*) \leq 0$ e con ciò;

$$0<x(t^*)-y(t^*) \leq 0,$$

assurda se non è, come volevamo dimostrare, $x(t^*)=y(t^*)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. SESTINI, *Sopra un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan*, « Boll. Un. Mat. It. », (3), 12 (1957), 516-519.
[2] G. SESTINI, *Esistenza di una soluzione in problemi analoghi a quello di Stefan*, « Rivista di Mat. Univ. Parma », 3 (1953), 3-23.
[3] J. DOUGLAS Jr, *A uniqueness theorem for the solution of a Stefan problem*, « Proceedings of the Am. Math. Soc. », 8 (1957), 402-408.
[4] C. R. DE PRIMA, « Recensione in Math. Reviews », 20 (1959), 181.
[5] M. PICONE, « Appunti di Analisi Superiore », Napoli 1941.