BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FABIO MANARESI

Su alcune serie analoghe alle serie di Fourier trigonometriche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 360–372.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_360_0>

Su alcune serie analoghe alle serie di Fourier trigonometriche.

Nota di FABIO MANARESI (a Bologna)

Sunto. - *Si veda al n.* 1.

1. MITRA (1) e CHAK (2) hanno dimostrato che le condizioni di convergenza e di sommabilità $(C, 1)$ della serie

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{1}{2} p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \tag{1}$$

e della sua *coniugata*

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) \tag{2}$$

verso una funzione $f(x)$ periodica, di periodo 2π, e sommabile in $0 \leq x \leq 2\pi$, e verso la funzione

$$\bar{f}(x) = \int_0^{\pi} \frac{\psi^*(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} t} \frac{dt}{\sqrt{\pi^2 - t^2}}$$

rispettivamente, con

$$\frac{p_n}{q_n}(x) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos}{\operatorname{sen}} \left[n\pi \ \operatorname{sen} \frac{1}{2}(t - x) \right] dt,$$

$$\psi^*(t) = f\left(x + 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{t}{\pi}\right) - f\left(x - 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{t}{\pi}\right),$$

(1) S. C. MITRA, *On the sum of a series analogous to Fourier series*, « J. Indian Math. Soc. », 13 (1949), pp. 159-164.

(2) A. M. CHAK: *On the convergence and summability-*(C, 1) *of an analogous conjugate Fourier series*, « Bull. Calcutta Math. Soc. », 43 (1951), pp. 113-118.

sono del tutto simili alle ben note condizioni relative alla serie di FOURIER trigonometrica e alla serie coniugata di questa.

Più recentemente CHAK (3) ha provato che la medesima circostanza si verifica ponendo

$$\begin{matrix} p_n \\ q_n \end{matrix}(x) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\Big[f(x+t) \pm f(x-t)\Big] \begin{matrix}\cos \\ \mathrm{sen}\end{matrix}\left[n\pi \operatorname{tg}\frac{1}{4}t\right] dt,$$

$$f(x) = \pi \int_0^{\pi} \frac{\psi^*(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t} \, \frac{dt}{\pi^2 + t^2},$$

$$\psi^*(t) = f\left(x + 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\pi}\right) - f\left(x - 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\pi}\right).$$

Nel presente lavoro si estendono i suddetti risultati e altri noti teoremi ad una classe più generale di serie analoghe alle serie di FOURIER trigonometriche e definite nella maniera seguente.

Sia $T = \gamma(Z)$ una funzione assolutamente continua, sempre crescente e dispari *nell'intervallo* $-1 \leq Z \leq 1$. *Esista inoltre finita* e positiva la $\gamma'(0)$, che, senza ledere la generalità, si può supporre uguale ad 1; la $\gamma'(Z)$ risulti poi continua in $Z = 0$ (4). Infine il rapporto $\dfrac{\gamma'(Z)-1}{Z}$ sia sommabile in un intorno dell'origine.

Si denoti ora con $Z = g(T)$ la funzione inversa della $T = \gamma(Z)$, sicchè, ove si ponga

$$\rho = \frac{\pi}{\gamma(1)}, \quad z = Z\pi, \quad t = \rho T,$$

riesce:

$$t = \rho\gamma\left(\frac{z}{\pi}\right), \quad z = \pi g\left(\frac{t}{\rho}\right), \quad \text{con} -\pi \leq z \leq \pi, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Ciò premesso, se $f(x)$ è una funzione sommabile in $-\pi \leq x \leq \pi$, se ne prolunghi la definizione in tutto $-\infty < x < +\infty$ considerandola periodica, di periodo 2π, e sostituendo il suo valore in π

(3) A. M. CHAK, *On an analogous Fourier series and its conjugate series*, « Math. Student », 24 (1956), pp. 193-202.

(4) Si conviene di completare la definizione della $\gamma'(Z)$, nell'intervallo $-1 \leq Z \leq 1$, ponendola uguale a $\gamma'(0)$ negli eventuali punti in cui essa non esiste od è infinita.

con $f(-\pi)$, indi si ponga:

$$\begin{matrix} p_n \\ q_n \end{matrix}(x) = \frac{1}{\rho}\int_0^{\pi} [f(x+t) \pm f(x-t)] \begin{matrix} \cos \\ \mathrm{sen} \end{matrix}\left[n\pi g\left(\frac{t}{\rho}\right)\right] dt, \tag{3}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi) \operatorname{cotg} \xi \, \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) d\xi, \tag{4}$$

$$\psi^*(\xi) = f\left[x + \rho\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\right] - f\left[x - \rho\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\right]. \tag{5}$$

In particolare, se $\gamma(Z) = \operatorname{arc\,sen} Z$, oppure $\gamma(Z) = \operatorname{arctg} Z$, si hanno le serie considerate dai citati Autori.

Si noti che, nel caso della convergenza, a differenza di quanto accade per la somma della (1), la somma $\bar{f}(x)$ della (2) dipende dalla scelta della funzione $\gamma(Z)$.

2. **Convergenza di $\mathfrak{S}[f]$**. - Con facili calcoli si trae

$$S_n(x) = \frac{1}{2}p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k(x) = \frac{1}{\rho}\int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\mathrm{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi g\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]}{2\,\mathrm{sen}\left[\frac{\pi}{2} g\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]} dt,$$

da cui, giusto il teorema di integrazione per sostituzione di De La Vallée Poussin [5],

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left\{ f\left[x + \rho\gamma\left(\frac{z}{\pi}\right)\right] + f\left[x - \rho\gamma\left(\frac{z}{\pi}\right)\right]\right\} \frac{\mathrm{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}z} \gamma'\left(\frac{z}{\pi}\right) dz =$$

[5] Cfr., ad esempio, G. Sansone, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabili reali*, Soc. Ed. Universitaria, Firenze (1952), n. 101 *a*) e *b*). Da rilevare che la sommabilità in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$ della funzione integranda all'ultimo membro, essendo $\gamma'(Z)$ sempre non negativa, discende da un corollario di un noto teorema di Vitali (ibidem, n. 58, cor. 2°). Nell stessa maniera si riconosce la sommabilità, nell'intervallo $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, della funzione $\left\{ f\left[x + \rho\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\right] + f\left[x - \rho\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\right]\right\} \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)$.

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ f\left[x + \rho\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\right] + f\left[x - \rho\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\right]\right\} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi}\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) d\xi.$$

D'altra parte si ha:

$$\gamma'\left(\frac{z}{\pi}\right) \sim \frac{\pi}{\rho} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nz \int_{-\pi}^{\pi} \gamma'\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos nt\, dt$$

e inoltre, per il teorema di DINI,

$$1 = \gamma'(0) = \frac{\pi}{\rho} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma'\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos nt\, dt = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

ove si è posto

$$s_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi} d\xi.$$

Se $\Phi(x)$ è una funzione definita per ogni x reale e periodica di periodo 2π, risulta allora:

$$H_n(x) = S_n(x) - s_n\Phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^*(\xi)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi}\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) d\xi,$$

con

$$\varphi^*(\xi) = f\left[x + \rho\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\right] + f\left[x - \rho\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\right] - 2\,\Phi(x).$$

Riuscirà pertanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \Phi(x)$$

se, e soltanto se,

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x) = 0,$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^*(\xi)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\xi}\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) d\xi = 0.$$

In base ad un noto ragionamento [6] si conclude intanto che:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè, nel punto x, la* (1) *sia convergente con somma $\Phi(x)$ è che, preso ad arbitrio un numero positivo ε, si possano sempre determinare in corrispondenza un numero σ_ε, positivo e non superiore a $\frac{\pi}{2}$, ed un numero naturale n_ε tali che, per ogni $n > n_\varepsilon$, risulti:*

$$\left|\int_0^{\sigma_\varepsilon} \varphi^*(\xi) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\xi} \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) d\xi\right| < \varepsilon.$$

L'integrale al primo membro di quest'ultima disuguaglianza costituisce l'analogo dell'integrale di DIRICHLET nella seconda forma.

Ne consegue, in particolare, l'analogo del teorema di DINI:

II. *Se, per un dato punto x, il rapporto $\frac{\varphi^*(\xi)}{\xi}$ è sommabile in un intorno destro di $\xi = 0$, la* (1) *converge, nel punto x, verso $\Phi(x)$.*

Basta invero osservare che, nelle ipotesi ammesse (n. 1), la $\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)$ è limitata in un intorno destro di $\xi = 0$, talchè, se ivi è sommabile il rapporto $\frac{\varphi^*(\xi)}{\xi}$, tale risulta pure, in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, la funzione $\frac{\varphi^*(\xi)}{\xi} \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)$ [7].

OSSERVAZIONE. - Se, di più, il rapporto $\frac{\gamma'(Z)-1}{Z}$ si suppone limitato in un intorno di $Z = 0$, posto

$$K_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^*(\xi) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi} d\xi,$$

(6) Si veda, ad esempio, L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna (1928), pp. 276-279.

(7) La sommabilità della funzione $\frac{\varphi^*(\xi)}{\xi} \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)$ in un intorno destro $0 \leq \xi \leq \sigma$ di $\xi = 0$ appare senz'altro evidente, mentre nell'intervallo $\sigma \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$ essa si deduce da quella di $\varphi^*(\xi)\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)$ (cfr. ciò che si è detto in fine della nota (5)).

si deduce, in virtù del teorema di RIEMANN-LEBESGUE,

$$\lim_{n \to \infty} [H_n(x) - K_n(x)] = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^*(\xi) \frac{\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) - 1}{\operatorname{sen} \xi} \operatorname{sen}(2n+1)\xi d\xi = 0,$$

e quindi, in tal caso, riuscirà

$$\lim_{n \to \infty} H_n(x) = 0$$

quando, e solo quando,

$$\lim_{n \to \infty} K_n(x) = 0,$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^*(\xi) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\xi} d\xi = 0.$$

Si osservi che al primo membro figura l'integrale di DIRICHLET nella seconda forma con $\varphi^*(\xi)$ in luogo di $\varphi(\xi)$ [8].

Nella suddetta ipotesi più restrittiva sussistono dunque per la (1) tutti i criteri di convergenza analoghi a quelli che valgono per le serie di FOURIER trigonometriche e che si fondano sulla convergenza a zero, per $n \to \infty$, dell'integrale di DIRICHLET.

3. **Alcuni teoremi sulla** $\overline{\mathfrak{S}}[f]$. Si ricava facilmente

$$\bar{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} q_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2\rho} \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \left\{ \operatorname{cotg}\left[\frac{\pi}{2} g\left(\frac{t}{\rho}\right)\right] - \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi g\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} g\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]} \right\} dt =$$

([8]) Cfr. loc. cit. in ([6]).

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi) \left[\operatorname{cotg} \xi - \frac{\cos (2n+1)\xi}{\operatorname{sen} \xi} \right] \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) d\xi,$$

ove $\psi^*(\xi)$ è data dalla (5).

Ne discendono gli analoghi dei teoremi di PRINGSHEIM:

I. *Se, per un dato punto* x. *il rapporto* $\frac{\psi^*(\xi)}{\xi}$ *è sommabile in un intorno destro di* $\xi = 0$, *la* (2) *converge nel punto* x *verso la* (4).

II. *La* (2) *è divergente in ogni punto* x *di discontinuità di prima specie per la* f(x).

Si dimostra pure agevolmente l'analogo di un teorema di LUKÁCS

III. *In ogni punto* x, *in cui esiste finito il*

$$\lim_{t \to 0} [f(x+t) - f(x-t)] = d, \tag{6}$$

risulta

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{S}_n(x)}{\log n} = \frac{d}{\pi}.$$

Infatti, poichè si può scrivere

$$\bar{S}_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi) \operatorname{cotg} \xi (1 - \cos 2n\xi) \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi) \operatorname{sen} 2n\xi \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) d\xi,$$

basterà provare che riesce

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi) \frac{1 - \cos 2n\xi}{\xi} \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) d\xi = d. \tag{7}$$

Ove si tenga conto che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2n\xi}{\xi} \, d\xi = 1 \ \text{(}^9\text{)},$$

si riconosce che la (7) è equivalente alla

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\psi^*(\xi)\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) - d\right] \frac{1 - \cos 2n\xi}{\xi} \, d\xi = 0.$$

Scelto allora ad arbitrio un numero positivo ε, si determini in corrispondenza un numero $\sigma > 0$ in modo che, per $0 \leq \xi < \sigma$, risulti

$$\left| \psi^*(\xi)\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) - d \right| < \varepsilon \ \text{(}^{10}\text{)},$$

onde si trae:

$$\frac{1}{\log n} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\psi^*(\xi)\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) - d\right] \frac{1 - \cos 2n\xi}{\xi} \, d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{\log n} \int_0^{\sigma} \frac{1 - \cos 2n\xi}{\xi} \, d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\sigma \log n} \int_{\sigma}^{\frac{\pi}{2}} \left| \psi^*(\xi)\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) - d \right| d\xi,$$

ove l'ultimo membro, per n abbastanza grande, diviene minore di un numero positivo arbitrariamente prefissato.

(9) Cfr. loc. cit. in (6) p 315.

(10) Si tenga presente che dalla (6) segue $\lim\limits_{\xi \to 0} \psi^*(\xi) = d$, mentre, d'altra parte, è $\lim\limits_{\xi \to 0} \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) = 1$

OSSERVAZIONE. - Se, di più, il rapporto $\frac{\gamma'(Z)-1}{Z}$ si suppone limitato in un intorno di $Z=0$, posto

$$\bar{K}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi)\left[\operatorname{cotg}\xi - \frac{\cos(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi}\right] d\xi,$$

riesce

$$\lim_{n\to\infty}[\bar{S}_n(x) - \bar{K}_n(x)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi)[\cos\xi - \cos(2n+1)\xi]\,\frac{\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)-1}{\operatorname{sen}\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi)\operatorname{cotg}\xi\left[\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)-1\right] d\xi.$$

Pertanto la (2) convergerà, in tal caso, verso la (4) soltanto a patto che sia

$$\lim_{n\to\infty}\bar{K}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi)\operatorname{cotg}\xi\, d\xi.$$

Se ne deduce l'analogo del criterio di convergenza di YOUNG:

IV. *Se, in un intorno del punto* x_0, *la funzione sommabile* f(x) *è a variazione limitata, condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (2) *sia convergente in* x_0, *è che esista finito il*

$$\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_\sigma^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi)\operatorname{cotg}\xi\, d\xi$$

e, in tal caso, la somma della (2) *è espressa dalla* (4).

4. **Sommabilità** (C, 1) **di** $\mathfrak{S}[f]$ **e di** $\bar{\mathfrak{S}}[f]$. - Si osservi, in primo luogo, che nei ragionamenti di questo n. si può fare a meno della ipotesi della sommabilità, in un intorno di $Z=0$, del rapporto $\frac{\gamma'(Z)-1}{Z}$.

Si ottiene poi facilmente:

$$\Sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ f\left[x + \rho\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + f\left[x - \rho\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\right] \right\} \left(\frac{\operatorname{sen} n\xi}{\operatorname{sen} \xi}\right)^2 \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) d\xi,$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} n\xi}{\operatorname{sen} \xi}\right)^2 d\xi.$$

Per il teorema di FEJÉR, giusta la continuità nell'origine di $\gamma'(Z)$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 1.$$

Per conseguenza si può scrivere, essendo $\Phi(x)$ la funzione definita nel n. 2.,

$$\Sigma_n(x) - \sigma_n \Phi(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^*(\xi) \left(\frac{\operatorname{sen} n\xi}{\operatorname{sen} \xi}\right)^2 \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) d\xi, \tag{8}$$

da cui segue l'analogo del teorema di LEBESGUE:

I. *Se, per un dato punto* x, *è*

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{1}{z} \int_0^z |\varphi^*(\xi)|\, d\xi = 0, \tag{9}$$

allora risulta

$$\lim_{n \to \infty} \Sigma_n(x) = \Phi(x).$$

Infatti l'ultimo membro della (8) converge a zero per $n \to \infty$, giacchè, per la (9) e per la continuità di $\gamma'(Z)$ in $Z=0$, si ha pure

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{1}{z} \int_0^z |\varphi^*(\xi)| \left| \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \right| d\xi = 0.$$

Circa la sommabilità $(C, 1)$ di $\mathfrak{S}[f]$ sussiste la seguente proposizione:

II. *Se, per un dato punto* x, *è*

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{1}{z} \int_0^z |\psi^*(\xi)| \, d\xi = 0, \tag{10}$$

allora riesce

$$\lim_{n \to \infty} \left[\bar{\Sigma}_n(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi^*(\xi) \operatorname{cotg} \xi \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) d\xi \right] = 0.$$

Basta osservare che dalla (10) segue

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{1}{z} \int_0^z |\psi^*(\xi)| \left| \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \right| d\xi = 0$$

e ripetere, con evidenti modificazioni, la dimostrazione dell'analogo teorema sulla coniugata della serie di FOURIER trigonometrica [11].

Vale inoltre il seguente teorema, analogo ad un risultato ottenuto da SZASZ [12]:

[11] Cfr., ad esempio, A. ZYGMUND, *Trigonometrical series*, Varsavia (1935), p. 49.

[12] O. SZÁSZ, *The jump of a function determined by its Fourier coefficients*, «Duke Math. J», 4 (1938), pp. 401-407.

III. *Se, per un dato punto* x, *è*

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{1}{z} \int_0^z |\psi^*(\xi) - \Phi(x)| \, d\xi = 0,$$

allora risulta

$$\lim_{n \to \infty} [\bar{\Sigma}_{2n}(x) - \bar{\Sigma}_n(x)] = \frac{\log 2}{\pi} \Phi(x).$$

Per la dimostrazione si ripete il medesimo ragionamento adottato da Szász, tenendo conto di 4 I e che riesce:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2n\xi \left(\frac{\operatorname{sen} n\xi}{\operatorname{sen} \xi}\right)^2 \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) d\xi =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2n\xi \left(\frac{\operatorname{sen} n\xi}{\operatorname{sen} \xi}\right)^2 d\xi = \log 2 \text{ (}^{13}\text{)}.$$

Si ha infatti, indicando con α un arbitrario numero positivo e minore di $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{n} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2n\xi \left(\frac{\operatorname{sen} n\xi}{\operatorname{sen} \xi}\right)^2 \left[\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) - 1\right] d\xi \right| \leq$$

(11)

$$\leq \frac{1}{n} \int_0^{n^{-\alpha}} \left(\frac{\operatorname{sen} n\xi}{\operatorname{sen} \xi}\right)^2 \left| \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) - 1 \right| d\xi + \frac{1}{n} \int_{n^{-\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left| \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) - 1 \right|}{\operatorname{sen}^2 \xi} \, d\xi.$$

(13) Loc. cit. in (12), pp. 404-405.

Fissato ad arbitrio un numero positivo ε e preso n abbastanza grande in modo che risulti

$$\left|\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)-1\right|<\frac{\varepsilon}{2\pi^2} \quad \text{per} \quad 0\leq\xi<n^{-\alpha},$$

$$\frac{\pi^2}{4n^{1-2\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)-1\right|d\xi<\frac{\varepsilon}{2},$$

si avrà

$$\frac{1}{n}\int_0^{n^{-\alpha}}\left(\frac{\operatorname{sen} n\xi}{\operatorname{sen}\xi}\right)^2\left|\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)-1\right|d\xi<\frac{2\varepsilon}{\pi^2}\int_0^{n^{-\alpha}}\frac{n}{(1+n\xi)^2}\left(\frac{\xi}{\operatorname{sen}\xi}\right)^2d\xi<\frac{\varepsilon}{2}\ (^{14}),$$

ed inoltre, per il secondo teorema della media, ove si denoti con σ un opportuno numero non inferiore a $n^{-\alpha}$ e non superiore a $\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{n}\int_{n^{-\alpha}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left|\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)-1\right|}{\operatorname{sen}^2\xi}d\xi=\frac{1}{n\operatorname{sen}^2(n^{-\alpha})}\int_{n^{-\alpha}}^{\sigma}\left|\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)-1\right|d\xi<$$

$$<\frac{1}{n^{1-2\alpha}}\left[\frac{n^{-\alpha}}{\operatorname{sen}(n^{-\alpha})}\right]^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)-1\right|d\xi<\frac{\pi^2}{4n^{1-2\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)-1\right|d\xi<\frac{\varepsilon}{2},$$

onde si conclude che, per tutti gli n abbastanza grandi, il primo membro della (11) diviene minore di ε.

Da ultimo si osservi che ci si è qui limitati a provare per le (1) e (2) gli analoghi dei più noti teoremi che valgono per le serie di FOURIER trigonometriche, ma è evidente che numerosi altri risultati possono estendersi alle serie anzidette.

(14) Per $\xi>0$ sussiste infatti la disuguaglianza $\left|\frac{\operatorname{sen} n\xi}{n\xi}\right|<\frac{2}{1+n\xi}$ (Si veda, per esempio, loc. cit. in (6), p. 176).