Bollettino
Unione Matematica Italiana

Franca Poncini

Coppie di curve sghembe metricamente coniugate.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 344–351.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_344_0>

Coppie di curve sghembe metricamente coniugate.

Nota di Franca Poncini (a Torino)

Sunto. - *È contenuto nel n. 1.*

1. Il problema dell'esistenza di coppie di curve C e C_1 le quali si possono mettere in corrispondenza punto per punto in guisa che una delle direzioni principali $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ nel punto P di C risulti parallela ad una delle direzioni principali $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{n}_1$ $\boldsymbol{b}_1$ di C_1, è stato compiutamente risolto nei tre casi in cui le due direzioni principali parallele sono omonime [1], ossia $\boldsymbol{t}_1 = \pm \boldsymbol{t}$; $\boldsymbol{n}_1 = \pm \boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{b}_1 = \pm \boldsymbol{b}$.

[1] Si veda ad es. P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali-Forti « *Analisi Vettoriale Generale* » vol II Geometria Differenziale (Cap. I § 7).

Scopo della presente nota è di trattare i rimanenti tre casi (parallelismo di direzioni non omonime) e di esaminare altresì la possibilità di una corrispondenza che mantenga costanti gli angoli che la terna $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_1)$ forma con la terna $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$.

Proveremo che quest'ultima circostanza, se si escludono i casi di parallelismo di direzioni principali, può verificarsi solo per determinate coppie di eliche.

2. Dette s e s_1 le ascisse curvilinee dei punti corrispondenti P e P_1 sulle curve C e C_1, chiameremo con $\frac{1}{\rho}$ e $\frac{1}{\tau}$ la curvatura e la torsione di C, con $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\tau_1}$ le corrispondenti di C_1 e porremo

$$\frac{ds_1}{ds} = f(s). \tag{1}$$

Richiamiamo in primo luogo i risultati relativi ai casi già trattati.

I) $\boldsymbol{t}_1 = \pm \boldsymbol{t}$; risulta allora che anche $\boldsymbol{n}_1$ e $\boldsymbol{b}_1$ sono rispettivamente paralleli ad $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{b}$ e che la curva C si può dare ad arbitrio insieme con $f(s)$, mentre C_1 è definita dalle condizioni:

$$\rho_1 = \rho f(s) \qquad \tau_1 = \pm \tau f(s)$$

con dati iniziali che assicurino il parallelismo delle due terne principali. Ne consegue:

$$\frac{\rho_1}{\tau_1} = \pm \frac{\rho}{\tau}.$$

Le curve C_1 sono le trasformate di Combescure delle C.

II) $\boldsymbol{b}_1 = \pm \boldsymbol{b}$; questo caso coincide con il precedente perchè dal parallelismo di $\boldsymbol{b}_1$ e $\boldsymbol{b}$ si deduce quello di $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{t}$, nonchè quello di $\boldsymbol{n}_1$ e $\boldsymbol{n}$.

III) $\boldsymbol{n}_1 = \pm \boldsymbol{n}$; in questo caso si ha la seguente matrice dei nove coseni direttori della terna $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_1)$ rispetto alla terna $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$:

$$\left\{ \begin{matrix} \cos\vartheta & 0 & \operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm \operatorname{sen}\vartheta & 0 & \pm\cos\vartheta \end{matrix} \right\} \quad (\vartheta = \text{cost.})$$

Anche in questo caso C si può dare ad arbitrio insieme con $f(s)$, mentre C_1 è definita dalle condizioni:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1} = \pm \dfrac{1}{f(s)}\left(\dfrac{\cos\vartheta}{\rho} + \dfrac{\operatorname{sen}\vartheta}{\tau}\right) \\ \dfrac{1}{\tau_1} = \mp \dfrac{1}{f(s)}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\vartheta}{\rho} \mp \dfrac{\cos\vartheta}{\tau}\right) \end{cases}$$

con dati iniziali che assicurino per i nove coseni direttori i valori della matrice suddetta.

I due casi precedenti rientrano in questo per particolari valori dell'angolo ϑ.

Si dimostra inoltre che le condizioni (2) sono sufficienti a definire una curva C_1 che corrisponde a C per parallelismo delle normali principali ([2]).

3. Passeremo ora alla considerazione dei seguenti altri casi di parallelismo:

IV) $\quad \boldsymbol{t}_1 = \pm \boldsymbol{n} \quad ; \quad \boldsymbol{n}_1 = \pm \boldsymbol{t}$

V) $\quad \boldsymbol{n}_1 = \pm \boldsymbol{b} \quad ; \quad \boldsymbol{b}_1 = \pm \boldsymbol{n}$

VI) $\quad \boldsymbol{b}_1 = \pm \boldsymbol{t} \quad ; \quad \boldsymbol{t}_1 = \pm \boldsymbol{b}$

Basterà trattare i tre casi scritti a sinistra, perchè quelli scritti a destra si deducono ovviamente dai corrispondenti di sinistra mediante scambio di C con C_1.

IV) $\boldsymbol{t}_1 = \pm \boldsymbol{n}$.

Derivando rispetto ad s si ha:

$$\frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds_1} f(s) = \pm \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$$

([2]) Cfr. opera citata.

e applicando le formule di FRENET:

$$\frac{1}{\rho_1}\boldsymbol{n}_1 f(s) = \mp\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t} + \frac{1}{\tau}\boldsymbol{b}\right)$$

ossia

$$\boldsymbol{n}_1 = \mp(\cos\vartheta\boldsymbol{t} + \operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{b}) \tag{3}$$

avendo posto:

$$\cos\vartheta = \frac{\rho_1}{\rho f(s)} \quad \operatorname{sen}\vartheta = \frac{\rho_1}{\tau f(s)} \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\rho}{\tau} \tag{4}$$

Derivando ulteriormente e applicando le formule di FRENET si ha

$$\frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds_1} f(s) = \mp\left[-\operatorname{sen}\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\boldsymbol{t} + \cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\boldsymbol{b} + \cos\vartheta\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} + \operatorname{sen}\vartheta\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right]$$

$$-f(s)\left(\frac{1}{\rho_1}\boldsymbol{t}_1 + \frac{1}{\tau_1}\boldsymbol{b}_1\right) = \mp\left[-\operatorname{sen}\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\boldsymbol{t} + \left(\frac{\cos\vartheta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\tau}\right)\boldsymbol{n} + \cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\boldsymbol{b}\right] \tag{5}$$

Ma da $\boldsymbol{t}_1 = \pm\boldsymbol{n}$ e dalle (3) si ha:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{n}_1 = -(\cos\vartheta\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{t} + \operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{b}) = -\operatorname{sen}\vartheta\,\boldsymbol{t} + \cos\vartheta\boldsymbol{b}$$

Sostituendo questa espressione di $\boldsymbol{b}_1$ nel primo membro della (5) e in pari tempo $\boldsymbol{t}_1 = \pm\boldsymbol{n}$, per l'uguaglianza dei due membri si ricava:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1} = \dfrac{1}{f(s)}\left(\dfrac{\cos\vartheta}{\rho} + \dfrac{\operatorname{sen}\vartheta}{\tau}\right) \\ \dfrac{1}{\tau_1} = \dfrac{d\vartheta}{ds}\dfrac{1}{f(s)} \end{cases} \tag{6}$$

Da (4) e (6) i ricava infine:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1} = \pm \dfrac{1}{f(s)} \sqrt{\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{\tau^2}} \\ \dfrac{1}{\tau_1} = \dfrac{1}{f(s)} \dfrac{d}{ds} \operatorname{arctg} \dfrac{\tau}{\rho} \end{cases}$$

Si conclude che nel caso del parallelismo della tangente a C con la normale principale a C_1, la curva C si può dare ad arbitrio insieme con $f(s)$, mentre C_1 risulta determinata dalle (7). Inoltre la matrice dei nove coseni direttori della terna $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_1)$ rispetto alla terna $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ ha la forma: (a cui devono adeguarsi i dati iniziali)

$$(8)\qquad \begin{Bmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \mp \cos \vartheta & 0 & \mp \operatorname{sen} \vartheta \\ - \operatorname{sen} \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{Bmatrix} \qquad \left(\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\rho}{\tau}\right)$$

Viceversa se si introduce una terna di vettori $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_1)$ legata a $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ dalle formule:

$$\boldsymbol{t}_1 = \pm \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}_1 = \mp (\cos \vartheta\, \boldsymbol{t} + \operatorname{sen} \vartheta\, \boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{b}_1 = - \operatorname{sen} \vartheta\, \boldsymbol{t} + \cos \vartheta\, \boldsymbol{b}$$

ove per $\operatorname{sen} \vartheta$ e $\cos \vartheta$ valgano le (4) e (6), risulta subito che essa coincide con la terna principale della C_1 definita dalle (7) perchè è immediato verificare che soddisfa alle formule di FRENET della C_1.

Si conclude che la curva C_1 definita dalle (7) è legata alla C dalla relazione $\boldsymbol{t}_1 = \pm \boldsymbol{n}$ purchè si scelgano i dati iniziali in modo che essa sia verificata.

Osserviamo inoltre che gli elementi della matrice (8) risultano costanti solo quando $\dfrac{\rho}{\tau} = \text{cost}$ ossia se la curva C è un'elica, nel qual caso però $\dfrac{1}{\tau_1} = 0$ ossia la curva C_1 è piana.

V) $\boldsymbol{n}_1 = \pm \boldsymbol{b}$

Derivando rispetto ad s si ha:

$$\frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds_1} f(s) = \pm \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$$

e applicando le formule di Frenet:

$$-f(s)\left(\frac{1}{\rho_1}\boldsymbol{t}_1 + \frac{1}{\tau_1}\boldsymbol{b}_1\right) = \pm \frac{1}{\tau}\boldsymbol{n}$$

$$-\frac{f(s)}{\rho_1}\boldsymbol{t}_1 - \frac{f(s)}{\tau_1}\boldsymbol{b}_1 = \pm \frac{1}{\tau}\boldsymbol{n}$$

Sia ϑ l'angolo che $\boldsymbol{t}_1$ forma con $\boldsymbol{n}$; si ha allora

$$\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{n} = \cos\vartheta \qquad \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{n} = \mp \operatorname{sen}\vartheta$$

$$\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{t} = \operatorname{sen}\vartheta \qquad \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{t} = \pm \cos\vartheta$$

Moltiplicando scalarmente la precedente una volta per $\boldsymbol{t}_1$ e una volta per $\boldsymbol{b}_1$, si ottiene:

$$-\frac{f(s)}{\rho_1} = \pm \frac{1}{\tau}\cos\vartheta \qquad -\frac{f(s)}{\tau_1} = \mp \frac{1}{\tau}\operatorname{sen}\vartheta$$

cioè:

$$\text{(9)} \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= \mp \frac{1}{f(s)}\frac{\cos\vartheta}{\tau} \\ \frac{1}{\tau_1} &= \pm \frac{1}{f(s)}\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\tau} \end{aligned}\right. \qquad \frac{\rho_1}{\tau_1} = -\operatorname{tg}\vartheta$$

In base alle posizioni fatte la matrice dei nove coseni direttori ha la forma: (con la consueta condizione per i dati iniziali)

$$\left\{\begin{matrix} \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm\cos\vartheta & \mp\operatorname{sen}\vartheta & 0 \end{matrix}\right\} \quad \left(\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\rho_1}{\tau_2}\right)$$

Viceversa con un ragionamento analogo a quello fatto per il caso precedente si conclude che la curva C_1 definita dalle (9) è legata alla C dalla relazione $\boldsymbol{n}_1 = \pm \boldsymbol{b}$.

Gli elementi della matrice risultano poi costanti solamente quando $\frac{\rho_1}{\tau_1}$ è una costante. cioè quando la curva C_1 è un'elica.

VI) $\boldsymbol{b}_1 = \pm \boldsymbol{t}$; questo caso rientra, per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ nel caso III ($\boldsymbol{n}_1 = \pm \boldsymbol{n}$) già esaminato.

4. Passiamo ora all'esame della possibilità di una corrispondenza che mantenga costanti gli angoli della terna ($\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_1$) con la terna ($\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$).

Essa si è gia presentata in alcuni dei casi precedenti (I e II) Si tratta di vedere se essi sono o no i soli possibili.

Poniamo perciò:

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{t}_1 &= \alpha\boldsymbol{t} + \beta\boldsymbol{n} + \gamma\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{n}_1 &= \xi\boldsymbol{t} + \eta\boldsymbol{n} + \zeta\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}_1 &= \lambda\boldsymbol{t} + \mu\boldsymbol{n} + \nu\boldsymbol{b} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

con α, β, γ, ξ, η, ζ, λ, μ, ν tutti costanti.

Derivando le (10) e applicando le formule di FRENET, si ricava:

$$\left\{\begin{array}{ll} (11.1)\ \xi = -\frac{\rho_1}{f(s)}\frac{\beta}{\rho} & (11.4)\ \lambda = \frac{\tau_1}{f(s)}\frac{\eta}{\rho} - \frac{\tau_1}{\rho_1}\alpha \\ (11.2)\ \eta = \frac{\rho_1}{f(s)}\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\gamma}{\tau}\right) & (11.5)\ \mu = -\frac{\tau_1}{f(s)}\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau}\right) - \frac{\tau_1}{\rho_1}\beta \\ (11.3)\ \zeta = -\frac{\rho_1}{f(s)}\frac{\beta}{\tau} & (11.6)\ \nu = \frac{\tau_1}{f(s)}\frac{\eta}{\tau} - \frac{\tau_1}{\rho_1}\gamma. \end{array}\right. \tag{11}$$

Si può supporre $\beta \neq 0$ perchè per $\beta = 0$ le (11) conducono subito a casi già trattati di parallelismo delle direzioni principali. Dalle (11.1) e (11.3) si ricava allora:

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{\zeta}{\xi} = \text{cost}$$

[dalla (11.1 per $\beta \neq 0$ si ha $\xi \neq 0$].

Perciò la curva C è un'elica cilindrica.

Dalle (11 1) e (11.4) si ricava inoltre:

$$\lambda = -\frac{\tau_1}{\rho_1}\left(\frac{\eta\xi}{\beta} + \alpha\right)$$

ossia:

$$\frac{\rho_1}{\tau_1} = -\frac{\xi\eta + \alpha\beta}{\lambda\beta} = \frac{\mu}{\beta} = \text{cost}$$

Perciò anche C_1 è un'elica cilindrica.

Siano $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}_1$ i versori delle generatrici dei cilindri cui appartengono rispettivamente le eliche C e C_1; posto:

$$(12) \qquad \frac{\tau}{\rho} = -\operatorname{tg}\psi = \frac{\xi}{\zeta} \qquad\qquad \frac{\tau_1}{\rho_1} = -\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{\beta}{\mu}$$

si ha:

$$\boldsymbol{k} = \cos\psi\ \boldsymbol{t} + \operatorname{sen}\psi\ \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{k}_1 = \cos\psi_1\ \boldsymbol{t}_1 + \operatorname{sen}\psi_1 \boldsymbol{b}_1 .$$

Ricordando la (10) quest'ultima relazione si può scrivere:

$$\boldsymbol{k}_1 = (\alpha\cos\psi_1 + \lambda\operatorname{sen}\psi_1)\boldsymbol{t} + (\beta\cos\psi_1 + \mu\operatorname{sen}\psi_1)\boldsymbol{n} + (\gamma\cos\psi_1 + \nu\operatorname{sen}\psi_1)\boldsymbol{b}.$$

Tenendo conto delle formule (12) si vede subito che la componente secondo $\boldsymbol{n}$ è nulla e infine si riscontra che $\boldsymbol{k}_1 \equiv \boldsymbol{k}$.

Perciò le eliche C e C_1 tagliano sotto angoli ψ e ψ_1 le generatrici di due cilindri Γ, Γ_1 aventi sia le une che le altre la stessa direzione $\boldsymbol{k}$.

Se ora indichiamo con φ l'angolo dei vettori $\boldsymbol{n}$ ed $\boldsymbol{n}_1$ si può verificare che $-\psi$, φ, ψ_1 sono gli angoli di EULERO della terna $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{n}_1)$ rispetto alla $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n})$: poichè ψ e ψ_1 sono costanti, perchè gli angoli di una terna rispetto all'altra risultino costanti, occorre e basta richiedere che anche φ sia costante.

D'altra parte l'angolo $\varphi = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_1)$ è anche l'angolo delle normali alle sezioni rette C', C_1' di Γ e Γ_1, ossia l'angolo delle tangenti a C', C_1' in punti corrispondenti.

Pertanto il caso più generale di coppie di curve C, C_1 riferite fra loro in modo che si mantengano costanti gli angoli che la terna $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_1)$ principale di C_1 forma con la corrispondente terna $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ di C si ottiene considerando una coppia di curve C' e C_1' di uno stesso piano riferite fra loro in modo che l'angolo di tangenti corrispondenti sia costante: le curve C e C_1 sono eliche appartenenti ai cilindri Γ e Γ_1 di cui C' e C_1' sono sezioni rette (e punti corrispondenti di C e C_1 sono quelli che si proiettano in punti corrispondenti di C' e C_1').