Bollettino
Unione Matematica Italiana

Pieranita Rizzonelli

Sulla risoluzione delle equazioni integrali concerneti composizioni secondo varietà lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 327–337.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_327_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Sulla risoluzione delle equazioni integrali concernenti composizioni secondo varietà lineari.

Nota di PIERANITA RIZZONELLI (a Milano)

Sunto. - *Si generalizza il teorema del Dini alla risoluzione delle equazioni integrali non lineari del tipo Faltung, nelle quali si considerano composizioni secondo varietà lineari.*

Summary. - *A generalization of Dini's theorem to the solution of integral non linear equations of Faltung type, in which compositions on linear manifolds are considered.*

Premesse. – Siano $F(t)$ e $G(\eta)$ due funzioni definite rispettivamente nello spazio τ ad N dimensioni e nello spazio σ a k dimensioni, con $1 \leq k < N$; (si sono indicate con t e η i vettori colonna $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix}$ ed $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_k \end{bmatrix}$; un vettore si dirà poi *positivo* o *negativo* a seconda che siano > 0, oppure < 0 *tutte* le sue componenti).

Per le funzioni $F(t)$ e $G(\eta)$ si fanno le seguenti ipotesi: $F(t)$ sia nulla per $t < 0$ e $G(\eta)$ sia nulla per $\eta < 0$.

Sia A una matrice reale di ordine $[N, k]$ a elementi positivi o nulli e *non avente colonne nulle*.

$$A = [a_{r,s}] = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{N1} \dots a_{Nk} \end{bmatrix}.$$

Fissato in τ un punto t si consideri la varietà lineare V, passante per t, di equazioni parametriche

$$\xi_i = t_i - \sum_{1}^{k}{}_s\, a_{is}\eta_s \qquad\qquad (i = \ , \dots, N)$$

In forma matriciale la varietà lineare V ha equazione

$$\xi = t - A\eta$$

avendo indicato con ξ il vettore colonna $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}$.

Si definisce prodotto di composizione secondo la varietà V la funzione

$$G \overset{*}{V} F(t) = \int_{\sigma} G(\eta) F(t - A\eta) d\sigma. \tag{1}$$

Inoltre, nelle ipotesi fatte, la funzione $G \overset{*}{V} F(t)$ è nulla per $t < 0$.

Se poniamo

$$f(p) = \int_{\tau} e^{-pt} F(t) d\tau = \mathfrak{L}(F) \tag{2}$$

e

$$g(q) = \int_{\sigma} e^{-\eta q} G(\eta) d\sigma = \mathfrak{L}(G) \tag{3}$$

(avendo indicato con p il vettore riga complesso $p = [p_1 \dots p_N]$ e con q il vettore riga $q = pA$) allora, sotto opportune condizioni riguardanti la convergenza degli integrali (2) e (3), si può estendere alla funzione (1) il teorema del prodotto integrale nella seguente forma ([1]).

$$\mathfrak{L}(G \overset{*}{V} F) = f(p) g(q) \qquad (q = pA). \tag{4}$$

La (4) vale nell'ipotesi che li integrali (2) e (3), con $q = pA$, siano, ad esempio, assolutamente convergenti.

1. Siano assegnate negli spazi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ e τ rispettivamente ad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ ed N dimensioni le $l + m$ funzioni ($l \geq 0$, $m \geq 1$) $X_1(\eta^{(1)})$ definita in $\sigma_1, \dots, X_l(\eta^{(l)})$ definita in σ_l, $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$ definite in τ.

Risulti inoltre $0 < \alpha_k < N$ $(k = 1, \dots, l)$ e non è necessario supporre, per le nostre considerazioni, che gli α_k siano fra loro distinti; potrà quindi anche verificarsi la circostanza che taluni degli spazi σ_k vengano a coincidere.

([1]) A. Pistoia, *Sulla operazione di composizione secondo una varietà lineare per la trasformata multipla di Laplace*, « Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », Classe Scienze, Vol. LXXXIV, 1951, pp. 1-9.

Notiamo, per chiarezza di interpretazione, che con $\eta^{(k)}$ si è indicato il vettore colonna $\eta^{(k)} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{\alpha_k} \end{bmatrix} \in \sigma_k$ e con t il vettore colonna $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix} \in \tau$.

Le funzioni $X_k(\eta^{(k)})$ $(k = 1 \dots, l)$ definite nei rispettivi spazi σ_k siano nulle per $\eta^{(k)} < 0$ e le funzioni $Y_h(t)$ $(h = 1, \dots, m)$ definite nello spazio τ siano nulle per $t < 0$.

Siano anche assegnate, nello spazio τ, le varietà lineari V_k di equazioni

$$\xi_{(k)} = t - A_{(k)}\eta^{(k)} \qquad (k = 1, \dots, l)$$

avendo ndicato con $A_{(k)}$ una matrice reale di ordine $[N, \alpha_k]$ ad elementi positivi e non avente colonne nulle e con t il vettore che individua un punto appartenente a τ. Con $\xi_{(k)}$ si è indicato inoltre il vettore colonna $\xi_{(k)} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}$.

Supponiamo infine che le funzioni $X_k(\eta^{(k)})$ e $Y_h(t)$ siano *assolutamente* trasformabili, secondo le definizioni (2) e (3), per $R(p) > \beta$ essendo β un vettore riga reale $\beta = [\beta_1 \dots \beta_N]$ ad N componenti.

Sussiste allora la seguente proposizione che generalizza un teorema di L. AMERIO [2]

Si consideri una funzione analitica $\varphi(z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_m)$ *delle* $l + m$ *variabili* $z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_m$ *che più brevemente porremo nella forma* $\varphi(z, w)$ *con* $z = (z_1, \dots, z_l)$ *e* $w = (w_1, \dots, w_m)$. *Su* $\varphi(z, w)$ *si fanno le ipotesi che sia olomorfa in un intorno dell'origine ed inoltre sia* $\varphi(z, 0) \equiv 0$.

Poniamo

$$(5)\qquad \begin{aligned} y_h(p) &= \int_\tau e^{-pt} Y_h(t) d\tau = \mathfrak{L}(Y_h) && (h=1, \dots, m) \\ x_k(q_{(k)}) &= \int_{\sigma_k} e^{-tq^{(k)}q_{(k)}} X_k(\eta^{(k)}) d\sigma_k = \mathfrak{L}(X_k) && (k=1, \dots, l) \end{aligned}$$

(2) L. AMERIO, *Su alcune questioni relative alla trasformazione di Laplace*, « Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere » Clas. di Scienze, Vol. LXXVI, 1942-43, pp. 1-26.

essendo

$$q_{(k)} = pA_{(k)}. \tag{6}$$

Risulta allora, per R(p) $> \delta$ *conveniente,*

$$\varphi(x(q),\ y(p)) = \int_{\tau} e^{-pt} G(t)dt \tag{7}$$

e G(t) *è una funzione assolutamente trasformabile per* $R(p) > \delta$.

In accordo colle notazioni relative alle variabili z_k, w_h si è posto, nella (7)

$$x(q) = [x_1(q_{(1)}) \dots x_l(q_{(l)})]$$

$$y(p) = [y_1(p) \dots y_m(p)].$$

DIMOSTRAZIONE. – Noi considereremo oltre alle composizioni superficiali nello spazio τ anche le composizioni secondo la varietà $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_l$ prodotto topologico delle l varietà lineari assegnate. Precisamente alla funzione X_k associamo la varietà V_k e le composizioni della funzione X_k con le funzioni Y_h $(h = 1, \dots, m)$ saranno tutte fatte secondo tale varietà V_k.

Indicheremo al solito con $Y_h^{*n}(t)$ la n–esima potenza del prodotto integrale nello spazio τ e con $X_k^{*n}(\eta^{(k)})$ la n–esima potenza del prodotto integrale nello spazio σ_k ad α_k dimensioni.

Poniamo inoltre, per $s > 0$,

$$(X_k^{*r})_{V_k}^{*} (Y_h^{*s})(t) = \begin{cases} Y_h^{*s}(t) & \text{se} \quad r = 0 \\ \displaystyle\int_{\sigma_k} X_k^{*r}(\eta^{(k)}) Y_h^{*s}(t - A_{(k)}\eta^{(k)}) d\sigma_k & \text{se} \quad r > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Si ha allora, per $R(p) > \beta$ ed $r \geq 0$, $s > 0$

$$\mathfrak{L}((X_k^{*r})_{V_k}^{*} (Y_h^{*s}), t)) = \overset{r}{x_k} (q_{(k)}) \overset{s}{y_h}(p).$$

Poichè la funzione $\varphi(z, w)$ è olomorfa e tale che $\varphi(z, 0) \equiv 0$, risulta

$$\varphi(z, w) = \sum_{r,s} b_{r,s} z^r w^s \ (^3) \qquad (b_{r,0} = 0) \tag{9}$$

essendo r ed s due vettori, rispettivamente ad l e m componenti intere e positive.

La serie (9) converge ed assolutamente per $|z_k| < R$ e $|w_h| < R$. Poniamo

$$u_k(q_{(k)}) = \int_{\sigma_k} e^{-\eta(k) q(k)} \, | X_k(\eta_{(k)}) | \, d\sigma_k \qquad (k = 1, \dots, l)$$

$$v_h(p) = \int_{\tau} e^{-pt} \, | Y_h(t) | \, d\tau \qquad (h = 1, \dots, m)$$

e osserviamo che, essendo la matrice $A_{(k)}$ priva di colonne nulle e ad elementi positivi o nulli, le parti reali delle componenti del vettore $q_{(k)} = p\, A_{(k)}$ tendono $a + \infty$ quando vi tendono le parti reali delle componenti di p. Ne segue, per la assoluta trasformabilità, che

$$\lim_{R(p) \to +\infty} u_k(q_{(k)}) = 0 \tag{10}$$

ed analogamente

$$\lim_{R(p) \to +\infty} v_h(p) = 0. \tag{11}$$

Sarà pertanto possibile determinare un vettore $\delta = [\delta_1 \dots \delta_N]$ a componenti reali sufficientemente grandi tale che per $R(p) > \delta$ risulti

$$| u_k | < R \quad e \, | v_h | < R. \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \dots, l \\ h = 1, \dots, m \end{pmatrix} \tag{12}$$

Convergerà quindi, per $R(p) > \delta$, la serie

$$\sum_{r,s} | b_{r,s} | \, u^r v^s \qquad \begin{matrix} u = [u_1 \dots u_l] \\ v = [v_1 \dots v_m]. \end{matrix}$$

Estendendo il procedimento di AMERIO si dimostra allora in virtù del teorema di B. LEVI sull'integrazione per serie, che la (7) è

(3) Nella (9) si è posto (con notazione consueta) z^r per indicare il prodotto $z_1^{r_1} \dots z_l^{r_l}$.

la trasformata di LAPLACE di una funzione $G(t)$ assolutamente trasformabile per $R(p) > \delta$ e definita dalla seguente serie

$$G(t) = \sum_{r,s} b_{rs}(X^{*r})^{*}_{V^r}(Y^{*s})(t) \tag{13}$$

La (13), in accordo alla scrittura della (9), va interpretata nel modo seguente

$$Y^{*s} = Y_1^{*s_1} * Y_2^{*s_2} * \dots * Y_m^{*s_m} \tag{14}$$

$$(X^{*r})^{*}_{V^r}(Y^{*s})(t) = (X_1^{*r_1}{}^{*}_{V_1}(X_2^{*r_2}{}^{*}_{V_2}(\dots X_l^{*r_l}{}^{*}_{V_l} Y^{*s})))(t)$$

avendo indicato con V^r il prodotto topologico delle $\mu_r \leq l$ varietà lineari V_k corrispondenti ai valori $r_k > 0$.

La serie (13) converge, assolutamente, quasi ovunque nello spazio τ ed è nulla per $t < 0$.

OSSERVAZIONE. - Fra le ipotesi del teorema ora dimostrato si è posto che le funzioni X_k e Y_h fossero nulle rispettivamente per $\eta^{(k)} < 0$ e per $t < 0$.

Se si toglie questa restrizione e si considerano ancora le trasformate delle funzioni definite mediante le (5) allora, tali trasformate esisteranno per $\beta < R(p) < \gamma$.

Non saranno però, in generale, verificate le diseguaglianze (12) poichè non è possibile operare i due passaggi ai limiti dati dalle (10) e (11). Il teorema si estende quando si aggiunga l'ipotesi che le funzioni $u_k(q_{(k)})$ e $v_h(p)$ si mantengano limitate, anzi risultino in modulo minori di R, per $\beta < R(p) < \gamma$, essendo R il raggio di convergenza della serie (9).

2. Siano assegnate negli spazi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ e τ rispettivamente ad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ ed N dimensioni con $0 < \alpha_k < N$ $(k = 1, \dots, l)$ le seguenti $l + m$ funzioni $(m \geq 1)$:
$X_1(\eta^{(1)})$ definite in $\sigma_1, \dots, X_l(\eta^{(e)})$ definite in σ_l, $Y_2(t), \dots, Y_m(t)$ definite in τ.

Siano inoltre assegnate nello spazio τ, l varietà lineari V_k di equazioni

$$\xi_{(k)} = t - A_{(k)}\eta^{(k)}$$

con $A_{(k)}$ matrice reale di ordine $[N, \alpha_k]$ ad elementi positivi e non avente colonne nulle.

Sulle funzioni $X_k(\eta^{(k)})$ $(k = 1, \dots, l)$ e $Y_h(t)$ $(h = 1, \dots, m)$ si fanno le stesse ipotesi già enunciate nel paragrafo primo, cioè si suppone che sia $X_k(\eta^{(k)}) = 0$ per $\eta^{(k)} < 0$ e $Y_h(t) = 0$ per $t < 0$. Introdotti i vettori

$$X(\eta) = [X_1(\eta^{(1)}) \dots X_l(\eta^{(l)})]$$

$$Y(t) = [Y_1(t) \dots Y_m(t)]$$

saranno inoltre, per ipotesi, $X(\eta)$ e $Y(t)$ *assolutamente trasformabili*, secondo le definizioni (5), per $R(p) > \beta$.

Ci proponiamo di determinare una funzione $Z(t)$, *assolutamente trasformabile*, che soddisfi l'equazione

$$f(X, Y, Z)(t) = 0 \tag{15}$$

da interpretarsi nel modo che ora diremo. La (15) si ottiene sostituendo i prodotti integrali definiti dalle (8) e (14) ai prodotti algebrici nell'equazione

$$f(x, y, z) = 0. \qquad \begin{pmatrix} x = [x_1 \dots x_l] \\ y = [y_1 \dots y_m] \end{pmatrix} \tag{16}$$

Per la funzione $f(x, y, z)$ delle $l + m + 1$ variabili complesse $x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m, z$ si fanno le ipotesi che sia *analitica, nulla nell'origine e inoltre risulti* $f(x, 0, 0) \equiv 0$ *ed* $f_z(0, 0, 0) \neq 0$.

La (16) è allora univocamente risolubile rispetto a z, in un intorno dell'origine e la funzione $z(x, y)$ che si ottiene sarà rappresentata dalla seguente serie

$$z(x, y) = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu, \nu} x^\mu y^\nu \qquad (c_{\mu, 0} = 0) \tag{17}$$

essendo $\mu = [\mu_1 \dots \mu_l]$ e $\nu = [\nu_1 \dots \nu_m]$ vettori a componenti intere.

Nelle ipotesi sopra enunciate (che, ovviamente, sono le stesse del teorema del Dini sulle funzioni implicite) *la soluzione della* *equazione integrale* (15) *esiste ed è unica ed è data dalla funzione*

$$Z(t) = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu}(X^{*\mu})^{*}_{V^{\mu}}(Y^{*\nu})(t). \tag{18}$$

Si osservi inoltre che i coefficienti $c_{\mu,\nu}$ che compaiono nella (18) sono *gli stessi* della (17).

La funzione Z(t) *è assolutamente trasformabile per* R(p) $> \delta$ *ed è nulla per* t < 0; *la serie* (18) *converge inoltre quasi ovunque in* τ.

Dimostrazione. – Proveremo la tesi generalizzando il procedimento usato in un precedente lavoro ([4]). Va ricordato che sia nella (15) che nella (18) le composizioni sono fatte secondo le varietà V_k assegnate ed inoltre ad ogni X_k è associata una ben determinata varietà V_k in modo che le composizioni di una certa funzione vanno fatte tutte secondo la varietà associata a tale funzione.

Facciamo vedere, innanzitutto, che la (18) costituisce una effettiva soluzione dell'equazione integrale (15). La serie (18) converge, quasi ovunque, in τ. Infatti la (17) è una funzione analitica delle $l+m$ variabili x_k, y_h $(k=1, ..., l;\ h=1, ..., m)$, nulla nel punto $x=0$ $y=0$ e tale che $z(x, 0) \equiv 0$.

Posto allora

$$x_k(q_{(k)}) = \int_{\sigma_k} e^{-\eta^{(k)}q_{(k)}} X_k(\eta^{(k)}) d\sigma_k \qquad \begin{pmatrix} k=1, ..., l \\ q_{(k)} = pA_{(k)} \end{pmatrix}$$

$$x(q) = [x_1(q_{(1)}) \dots x_l(q_{(l)})]$$

ed inoltre

$$y_h(p) = \int_{\tau} e^{-pt} Y_h(t) d\tau \qquad (h=1, ..., m)$$

$$y(p) = [y_1(p) \dots y_m(p)]$$

per $R(p) < \delta$, sufficientemente grande, converge anche la serie

$$\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} x^{\mu}(q) y^{\nu}(p). \tag{19}$$

([3]) P. Rizzonelli, *Estensione del teorema del Dini sulle funzioni implicite alle equazioni integro differenziali del tipo « Faltung »*, « Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere » Classe di Scienze vol. 92, 1957, pp. 117-131.

Allora, in virtù del teorema già dimostrato. possiamo affermare che la (19) è la trasformata di LAPLACE di una funzione $Z(t)$, definita dalla (18), assolutamente trasformabile per $R(p) > \delta$.

Inoltre la serie (18) converge quasi ovunque in τ. Il vettore reale δ che potremo ancora chiamare, in senso lato, ascissa di convergenza, si determina in modo che siano soddisfatte simultaneamente le seguenti disuguaglianze

$$\left| \int_{\sigma_k} e^{-\eta^{(k)} q_{(h)}} \right| X_k(\eta^{(k)}) \mid d\sigma_k \mid < R \qquad (k = 1, \ldots, l)$$

$$\left| \int_{\tau} e^{-pt} \right| Y_h(t) \mid d\tau \mid < R \qquad (h = 1, \ldots, m)$$

essendo R il raggio di convergenza della serie (17).

La funzione (18) soddisfa all'equazione (15). Infatti, essendo per ipotesi la funzione $f(x, y, z)$ analitica, essa sarà rappresentabile, in un intorno dell'origine, mediante una serie di potenze nelle $l+m+1$ variabili x_k, y_h e z che, col solito significato dei simboli, porremo nella seguente forma:

$$f(x, y, z) = \sum_{r, s, v} b_{r, s, v} x^r y^s z^v \qquad (b_{r, 0, 0} = 0). \tag{20}$$

La serie

$$f(X, Y, Z)(t) = \sum_{r, s, v} b_{r, s, v} (X^{*r}) \underset{V^r}{*} (Y^{*s}) * (Z^{*v})(t) \tag{21}$$

in cui la funzione $Z(t)$ è data dalla (18) converge, anzi assolutamente, quasi ovunque in τ. La serie (21) è poi quasi ovunque nulla. Infatti si consideri la sua trasformata di LAPLACE; indicando con $z(p)$ la trasformata di $Z(t)$ si ha:

$$f(x(q), y(p), z(p)) = \sum_{r, s, v} b_{r, s, v} x^r(q) y^s(p) z^v(p). \tag{22}$$

È inoltre $z(p) = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu, \nu} x^{\mu}(q) y^{\nu}(p)$ e quindi sostituendo nella (22) risulta

$$f(x(q), y(p), z(p)) = \sum_{r, s, v} b_{r, s, v} x^r(q) y^s(p) z^v(x(q), y(p)). \tag{23}$$

Poichè nella (17) è $c_{\mu,0}=0$ esiste, per il teorema del Dini, un $\rho>0$ tale che per $|x|<\rho$ e $|y|<\rho$ sia soddisfatta l'identità

$$\sum_{r,s,v} b_{r,s,v}x^r y^s z^v(x, y) \equiv 0.$$

Ma allora per $R(p)$ sufficientemente grande la (23) è identicamente nulla. Si può quindi affermare che la (21) è quasi ovunque nulla e pertanto la (18) rappresenta una soluzione della equazione (15). Quindi una soluzione della (15) esiste. la soluzione è inoltre unica. Supponiamo infatti che $Z(t)$ sia una soluzione dell'equazione (15) e sia assolutamente trasformabile. Si considerino le trasformate di Laplace $z(p)=\mathfrak{L}(Z(t))$ e $f(x(q), y(p), z(p))=\mathfrak{L}(f(X, Y, Z)(t))$. Avremo manifestamente

$$f(x(q), y(p), z(p)) \equiv 0. \tag{24}$$

Come già si è osservato, pur di prendere $R(p)$ abbastanza grande, la funzione $z(p)$, che soddisfa la (24), è unica ed è data dalla formula

$$z(p)=\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu}x^{\mu}(q)y^{\nu}(p)$$

dove i $c_{\mu,\nu}$ sono i coefficienti che compaiono nella (19).

In virtù della corrispondenza biunivoca esistente fra le funzioni e le loro trasformate di Laplace possiamo affermare che la soluzione dell'equazione è unica ed è data dalla (18).

3. La proposizione dimostrata precedentemente si estende al caso di un sistema di n equazioni integrali del tipo Faltung. Siano assegnate $l+m$ funzioni $X_1(\eta^{(1)}), \dots, X_l(\eta^{(l)})$, $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$ con $m \geq 1$ definite rispettivamente negli spazi $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ e τ ad $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ ed N dimensioni con $0<\alpha_k<N$ $(k=1, \dots, l)$. Siano inoltre assegnate in τ l varietà lineari V_k di equazioni

$$\xi_{(k)}=t-A_{(k)}\eta^{(k)}.$$

Le matrici $A_{(k)}$ e le funzioni $X(\eta)=[X_1(\eta^{(1)}) \dots X_l(\eta^{(l)})]$ e $Y(t)=$ $=[Y_1(t) \dots Y_m(t)]$ soddisfino alle stesse ipotesi già enunciate nel paragrafo precedente: in particolare le funzioni $X(\eta)$ e $Y(t)$ siano assolutamente trasformabili per $R(p) > \beta$. Cercheremo di determinare sotto quali condizioni esiste una ed una sola soluzione $Z(t) = [Z_1(t) \ldots Z_n(t)]$, assolutamente trasformabile che soddisfi il seguente sistema

$$f_i(X,\ Y,\ Z)(t) = 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{25}$$

La (25) si ottiene sostituendo i prodotti integrali definiti dalle (8) e (14) ai prodotti algebrici nel sistema

$$f_i(x,\ y,\ z) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{26}$$

Le n *funzioni* $f_i(x,\ y,\ z)$ *delle* $l + m + n$ *variabili* $x = [x_1 \ldots x_l]$ $y = [y_1 \ldots y_m]$ *e* $z = [z_1 \ldots z_n]$ *sono analitiche, nulle nel punto* $x = y = z = 0$ *e tali che sia* $f_i(x,\ 0,\ 0) \equiv 0$. *Inoltre si fa l'ipotesi che risulti diverso da zero, nell'origine, il determinante jacobiano delle funzioni* f_i *rispetto alle variabili* z_j:

$$\left| \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} \right|_{(x=0,\ y=0,\ z=0)} \neq 0.$$

Il sistema (26) è allora, per il teorema del Dini, univocamente risolubile rispetto alle z_j in un intorno dell'origine. Le n funzioni $z_j(x,\ y)$ che si ottengono sono analitiche e pertanto saranno rappresentate dalle seguenti serie:

$$z_j(x,\ y) = \sum_{\mu,\nu} c^{(j)}_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu \qquad \text{con} \quad c^{(j)}_{\mu,0} = 0, \tag{27}$$

ove μ e ν sono vettori rispettivamente ad l ed m componenti intere non negative.

Si dimostra che nelle ipotesi fatte, la soluzione del sistema (25), *assolutamente trasformabile, esiste, è unica ed è data dalla n-pla di funzioni*

$$Z_j(t) = \sum_{\mu,\nu} c^{(j)}_{\mu,\nu} (X^{*\mu}) \overset{*}{_{V\mu}} (Y^{*\nu})(t) \tag{28}$$

dove i coefficienti $c^{(j)}_{\mu,\nu}$ *sono gli stessi che compaiono nella* (27) *ed i simboli usati nella* (28) *hanno il significato già illustrato. Le funzioni* $Z_j(t)$ *sono nulle per* $t < 0$ *ed assolutamente trasformabili per* $R(p) > \delta$, *con* δ *sufficientemente grande. Inoltre le serie* (28) *convergono quasi ovunque in* τ.

La dimostrazione del teorema ora enunciato è del tutto analoga a quella esposta nel paragrafo 2 riguardante la soluzione di un'equazione integrale.