BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Silvio Cinquini

Un'osservazione sopra la figurativa degli integrali quasi-regolari seminormali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 321–326.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_321_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Un' osservazione sopra la figurativa degli integrali quasi-regolari seminormali.

Nota di SILVIO CINQUINI (a Pavia)

Sunto. - *Ricordata la definizione di integrale quasi-regolare seminormale, si rileva che, qualunque sia il numero (finito) delle dimensioni dello spazio, nel quale è contenuta la (ipersuperficie) figurativa, se l'integrale è quasi-regolare seminormale, tale figurativa non contiene mai alcuna retta.*

Résumé. - *Quelque soit le nombre (fini) des dimensions de l'espace, où est renfermé la (hypersurface) figurative, si l'integral est « quasi-regolare seminormale », sur cette figurative il n'y a aucune ligne droite.*

Le presenti righe traggono origine da una Memoria, in corso di stampa [1], dedicata a integrali curvilinei del Calcolo delle variazioni in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore.

Ricordiamo, innanzi tutto, che, come è ben noto, l'integrale

$$I_C = \int_C f(x, y, y')dx$$

si chiama *quasi-regolare positivo seminormale* [2], se in ogni punto (x, y) la derivata parziale $f_{y'}(x, y, y')$, considerata come funzione della sola y', è sempre non decrescente, e se, inoltre, in nessun punto (x, y) tale $f_{y'}(x, y, y')$ è costante per tutti i valori di y': in altre parole, in nessun punto (x, y) la (curva) figurativa

$$t = f(x, y, y')$$

si riduce a una retta.

[1] S CINQUINI, *Sopra l'esistenza dell'estremo per una classe di integrali curvilinei in forma parametrica.* In corso di stampa negli Annali di Matematica pura e applicata.

[2] L. TONELLI, *Su gli integrali del Calcolo delle variazioni in forma ordinaria*, « Annali della R Scuola Normale Superiore di Pisa », s. II, vol. III (1934), pp. 401-50. Vedi n. 1 pag. 405

È pure noto che l'integrale

$$I_D[z] = \iint_D f(x, y, z, p, q)dx\,dy$$

si chiama *quasi-regolare positivo seminormale* [3], se è $\mathcal{E}(x, y, z; \bar{p}, \bar{q}; p, q) \geq 0$ in qualunque punto (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$, e se per ogni (x, y, z) ora indicato esiste almeno una coppia $(\bar{p}, \bar{q})$ tale che sia $\mathcal{E}(x, y, z; \bar{p}, \bar{q}; p, q) > 0$ per tutte le coppie (p, q) distinte da $(\bar{p}, \bar{q})$. Inoltre L. GIULIANO ha rilevato [4] che, se $I_D[z]$ è quasi-regolare seminormale, la (superficie) figurativa, relativa a qualunque punto (x, y, z),

$$t = f(\ldots, p, q)$$

non contiene alcuna retta: tale osservazione è il fondamento della dimostrazione che ogni integrale quasi-regolare positivo seminormale è semicontinuo inferiormente.

Ciò premesso, nel caso dei problemi variazionali da noi considerati nel lavoro citato in [1]

$$\mathfrak{J}^{(2)} = \int_C F(x(s), y(s), z(s); x', y', z'; u_2, v_2, w_2)ds,$$

$$\mathfrak{J}^{(3)} = \int_C F(x(s), y(s), z(s); x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3)ds,$$

ove il parametro s rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato. ed é

$$u_2 = x'y'' - x''y', \quad v_2 = y'z'' - y''z', \quad w_2 = z'x'' - z''x';$$

$$u_3 = x'y''' - x'''y', \quad v_3 = y'z''' - y'''z', \quad w_3 = z'x''' - z'''x',$$

quale è la proprietà di cui gode la rispettiva figurativa

$$t = F(\ldots, u_2, v_2, w_2),$$
$$t = F(\ldots, u_3, v_3, w_3),$$

quando l'integrale è quasi-regolare seminormale?

[3] L. GIULIANO, *Sulle condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle variazioni.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, s. II, vol. X (1941). pp. 37-55.

[4] Vedi luogo cit. in [3], n. 1, pag. 39.

La risposta a questa domanda è contenuta come caso particolare nella presente osservazione, nella quale rileviamo che, qualunque sia il numero (finito) delle dimensioni dello spazio, nel quale è contenuta la (ipersuperficie) figurativa, se l'integrale è quasi-regolare seminormale, tale figurativa non contiene mai alcuna retta.

Quanto abbiamo asserito segue dal risultato di GIULIANO sopra citato, in modo molto rapido, mediante semplici considerazioni di Geometria degli iperspazi.

Nel chiudere queste righe introduttive, desideriamo ringraziare il collega e amico V. E. GALAFASSI per lo scambio di idee avuto con lui.

1. Siano μ e ν due numeri interi positivi e siano x e u due punti variabili rispettivamente negli insiemi di punti E_x (di uno spazio a μ dimensioni) e E_u (di uno spazio a ν dimensioni), che non è necessario precisare ulteriormente, e sia $f(x; u; t_1, t_2, \dots, t_n)$ una funzione (reale di variabili reali) finita e continua, assieme alle proprie derivate parziali del primo ordine $f_{t_1}, f_{t_2}, \dots, f_{t_n}$, per ogni x di E_x, per ogni u di E_u e per tutti i valori finiti di $t_1, t_2, \dots, t_n$ ([5]).

Fissato x in E_x e u in E_u, consideriamo nello spazio a $n+1$ dimensioni riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali $(t_1, t_2, \dots, t_n; \tau)$ la (ipersuperficie) *figurativa*

$$\tau = f(x;\ u;\ t_1,\ t_2, \dots,\ t_n).$$

Per ogni x di E_x, per ogni u di E_u e per tutti i valori reali di $t_1, t_2, \dots, t_n; \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n$, definiamo la funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS

$$\mathcal{E}(x;\ u;\ \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n;\ t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x;\ u;\ t_1, t_2, \dots, t_n) -$$

$$- f(x;\ u;\ \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n) - \sum_{j=1}^{n} (t_j - \bar{t}_j) f_{t_j}(x;\ u;\ \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n),$$

e teniamo presente che essa rappresenta la differenza, calcolata nel punto $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, tra la τ della figurativa e la τ dell'iperpiano tangente alla figurativa nel punto $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n; \bar{\tau} = f(x;\ u;\ \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n))$.

([5]) Come è ben noto, le considerazioni fatte nella presente Nota si possono sviluppare, in forma opportunamente modificata, anche in ipotesi più ampie di quelle indicate nel testo. In altre parole si tratta di una concavità, intesa in senso opportuno.

Considerata una classe C di funzioni (che è superfluo precisare), l'integrale (del Calcolo delle variazioni) della funzione composta $f(x;\ u;\ t_1, t_2, \dots, t_n)$, nella quale le derivate di ordine massimo delle funzioni della classe C compaiono soltanto in $t_1, t_2, \dots, t_n$ [6], si chiama *quasi-regolare positivo*, se, qualunque siano i punti x di E_x e u di E_u, è

$$\text{(I)} \qquad \mathcal{E}(x;\ u;\ \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n;\ t_1, t_2, \dots, t_n) \geq 0$$

per tutti i valori reali di $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n,\ t_1, t_2, \dots, t_n$. Se, oltre alla condizione ora indicata, in corrispondenza ai punti x di E_x e u di E_u, esiste almeno una n-pla $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n)$ tale che sia

$$\text{(II)} \qquad \mathcal{E}(x;\ u;\ \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n;\ t_1, t_2, \dots, t_n) > 0$$

per tutte le n-ple $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ non coincidenti con $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n)$, allora l'integrale si chiama *seminormale.*

È evidente che la definizione di integrale *quasi-regolare negativo seminormale* si ottiene invertendo il senso delle disuguaglianze (I) e (II).

2. *La figurativa relativa a un integrale quasi-regolare seminormale non contiene alcuna retta.*

Infatti, in base alla definizione data al n. 1, se l'integrale è quasi-regolare seminormale, la figurativa (relativa a una qualunque coppia di punti x, u, con x appartenente a E_x e u appartenente a E_u)

$$\text{(1)} \qquad \tau = f(x;\ u;\ t_1, t_2, \dots, t_n)$$

è una ipersuperficie tale che: *a*) considerato un qualunque iperpiano Π ad essa tangente, la ipersuperficie è tutta contenuta in uno solo dei due semispazi individuati da Π; *b*) esiste almeno un iperpiano Π_0 ad essa tangente, il quale ha a comune con la ipersuperficie un solo punto. Sia

$$\text{(2)} \qquad \tau = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n + a_{n+1}$$

[6] Gli integrali $\mathfrak{I}^{(2)}$ e $\mathfrak{I}^{(3)}$, sopra citati, illustrano pienamente quanto è detto nel testo in forma sommaria. Un ulteriore esempio è fornito dagli integrali $\iint_D f\left(x,\ y,\ z(x,\ y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dxdy$, di cui ci siamo occupati alcuni anni fa.

l'equazione di Π_0, e sia $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_n; \bar{\tau} = f(x; u; \bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_n))$ lo unico punto che tale iperpiano ha a comune con la ipersuperficie (1).

È ovvio che, posto

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv f(x; u; t_1, t_2, \ldots, t_n) - [a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_n t_n + a_{n+1}],$$

l'ipersuperficie

$$\tau = g(t_1, t_2, \ldots, t_n) \tag{3}$$

gode ancora della proprietà a). e che l'iperpiano

$$\tau = 0 \tag{4}$$

ha a comune con essa soltanto il punto di tangenza $\bar{P} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_n; 0)$: siamo così ricondotti a dimostrare che l'ipersuperficie (3) non contiene alcuna retta.

A tal uopo supponiamo, se è possibile, che esista una retta r tutta costituita di punti appartenenti all'ipersuperficie (3).

Evidentemente la retta r non può essere costituita di punti appartenenti all'iperpiano (4), nè può incontrare tale iperpiano (perchè in tal caso l'ipersuperficie (3) avrebbe punti in entrambi i semispazi individuati dall'iperpiano (4)); vale a dire r è parallela all'iperpiano $\tau = 0$, pertanto le equazioni di r si possono porre sotto la forma

$$\left\{ \begin{aligned} t_1 &= b_1 \omega + c_1 \\ t_2 &= b_2 \omega + c_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ t_n &= b_n \omega + c_n \\ \tau &= c, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

ove $c \neq 0$ e ω è un parametro che assume tutti i valori di $(-\infty, +\infty)$.

Consideriamo la retta $\bar{r}$, ortogonale all'iperpiano (4) nel punto $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_n; 0)$,

$$t_1 = \bar{t}_1, \ t_2 = \bar{t}_2, \ldots, \ t_n = \bar{t}_n. \tag{6}$$

Siccome l'ipersuperficie (3) è incontrata al più una sola volta da ogni retta parallela all'asse τ, le rette (5) e (6) non hanno punti a comune, vale a dire non può essere simultaneamente

$$\frac{\bar{t}_1 - c_1}{b_1} = \frac{\bar{t}_2 - c_2}{b_2} = \dots = \frac{\bar{t}_n - c_n}{b_n}.$$

Pertanto, supposto per fissare le idee

$$\frac{\bar{t}_1 - c_1}{b_1} \neq \frac{\bar{t}_2 - c_2}{b_2}, \tag{7}$$

le equazioni del S_3 individuato dalle rette r e $\bar{r}$ si possono porre sotto la forma

$$\begin{vmatrix} t_1 - \bar{t}_1 & t_2 - \bar{t}_2 & t_j - \bar{t}_j \\ b_1 & b_2 & b_j \\ c_1 - \bar{t}_1 & c_2 - \bar{t}_2 & c_j - \bar{t}_j \end{vmatrix} = 0, \qquad (j = 3, 4, \dots, n), \tag{8}$$

ossia, in virtù della (7),

$$t_j = d_j' t_1 + d_j'' t_2 + d_j''', \qquad (j = 3, 4, \dots, n). \tag{8'}$$

Intersecando la ipersuperficie (3) con tale S_3, si ottiene la superficie

$$\tau = g(t_1, t_2, d_3' t_1 + d_3'' t_2 + d_3''', \dots, d_n' t_1 + d_n'' t_2 + d_n'''), \tag{9}$$

la quale contiene la retta r: ma ciò è assurdo.

Infatti ragioniamo nel S_3 individuato dalle equazioni (8'), rilevando che qualunque piano tangente alla superficie (9), quale intersezione di un iperpiano tangente alla ipersuperficie (3) con (8'), lascia tutta la superficie (9) da una stessa parte, mentre il piano intersezione di (4) e di (8') è tangente alla superficie (9) nel punto $\bar{P}$ e ha a comune con la superficie stessa soltanto il punto di tangenza. Pertanto [7] la superficie (9) non può contenere alcuna retta, e il nostro asserto è così provato.

([7]) Vedi L. GIULIANO, luogo cit. in ([4]).