Bollettino Unione Matematica Italiana

Domingos Pisanelli

Sur des conséquences de théorèmes d'approximation de fonctions analytiques.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 301–306.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_301_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sur des conséquences de théorèmes d'approximation de fonctions analytiques.

Nota di DOMINGOS PISANELLI (a San Paolo)

On va donner dans ce travail deux conséquences des théorèmes:

1) de RUNGE modifié par OMAR CATUNDA ([1] - p. 28) sur l'approximation uniforme d'une function analytique (1) d'un evariable par des fonctions rationnelles à coefficients entiers complexes (2).

2) de l'approximation uniforme d'une fonction analytique de deux variables par des sommes de produits de deux fonctions d'une variable.

Les conséquences sont respectivement les suivantes:

α) Les compacts d'un ouvert de l'espace $[F]_e$ ([2] - p. 37) des germes de fonctions analityques sur un compact de la sphère de RIEMANN, admettent un système fondamental dénombrable de compacts.

β) La topologie canonique du produit tensoriel $[F_1] \otimes [F_2]$ ([3] - p. 30) (F_1 e F_2 compacts non vides de la sphère S de RIEMANN, divers de S), est identique à la topologie induite par celle de l'espace $[F_1 \times F_2]_e$ des germes de fonctions analytiques sur $F_1 \times F_2$, muni de la topologie limite inductive.

(1) Dans ce qui suit une fonction analytique seıa toujours supposée nulle sur les éventuels points à l'infini de son champ de définition.

(2) Un entier complexe est un nombre complexe à coefficients entiers.

LEMME 1. – *Une fonction analytique peut être approchée uniformément sur un compact de son ensemble de définition par des fonctions rationnelles à coefficients entiers complexes.*

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un ouvert M de la sphère de RIEMANN. Soit K un compact contenu en M et γ une séparatrice ([4] - p. 40) entre CM et K. En utilisant la formule de CAUCHY on peut approcher uniformement $f(z)$ sur K, par des sommes de fonctions rationnelles en z:

$$| f(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha_j - z} f(\alpha_j)\Delta\alpha_j | < \varepsilon/2 \qquad (| \Delta\alpha_j | < \sigma, \ z \in K).$$

Le second terme est une fonction continue de $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$, $\alpha_1, \dots \alpha_n$, z dans un compact convenable. On pourra l'approcher uniformément sur K, par des fonctions rationnelles à coefficients rationnels complexes (³) et par des coefficients entiers complexes:

$$| \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha_j - z} f(\alpha_j)\Delta\alpha_j - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} | < \varepsilon/2 \qquad (| \Delta\alpha_j | < \sigma, \ z \in K).$$

On aura:

$$| f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} | < \varepsilon \qquad (z \in K)$$

Il est évident que l'ensemble des fonctions rationnelles de $[F]$ à coefficients entiers est dénombrable.

LEMME 2. – *Une fonction analytique de deux variables peut être approchée uniformément sur un produit de compacts par des sommes de produits de deux fonctions d'une variable.*

Soit: $f(z_1, z_2)$ une fonction analytique dans un ouvert M du produit de deux sphères de RIEMANN, $K_1 \times K_2 \subset M$ un produit de compacts et $\gamma_1 \times \gamma_2$ une biséparatrice entre $\mathcal{C}M$ et $K_1 \times K_2$ [5]. En outre soient deux divisions sur γ_1 e γ_2. La formule de CAUCHY donne:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{1}{t_1 - z_1} \frac{1}{t_2 - z_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_r \sum_s \int_{\gamma_{1r}} \int_{\gamma_{2s}} \frac{1}{t_1 - z_1} \frac{1}{t_2 - z_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

(³) Un nombre rationnel complexe est un nombre complexe à coefficients rationnels.

$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_r \sum_s \frac{1}{t_{1r} - z_1} \frac{1}{t_{2s} - z_2} f(t_{1r}, t_{2s}) dt_1 dt_2 =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_r \sum_s \int_{\gamma_{1r}} \int_{\gamma_{2s}} \frac{1}{t_{1r} - z_1} \frac{1}{t_{2s} - z^2} f(t_{1r}, t_{2s}) dt_1 dt_2.$$

On aura:

$$|f(z_1, z_2) - \varphi(z_1, z_2)| = \left| \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_r \sum_s \int_{\gamma_{1r}} \int_{\gamma_{2s}} \left[\frac{f(t_1, t_2)}{(t_1 - z_1)(t_2 - z_2)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{f(t_{1r}, t_{2s})}{(t_{1r} - z_1)(t_{2s} - z_2)} \right] dt_1 dt_2 \right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La continuité uniforme de $\dfrac{(t_1 - z_1)(t_2 - z_2)}{f(t_1, t_2)}$ sur $K_1 \times \times K_2 \times \gamma_1 \times \gamma_2$, donne:

$$|f(z_1, z_2) - \varphi(z_1, z_2)| < \left| \frac{1}{(2\pi i)^2} \varepsilon \gamma_1 \gamma_2 \right. \quad (|\Delta t_1| < \sigma_1, |\Delta t_2| < \sigma_2,$$
$$z_1 \in K_1, z_2 \in K_2)$$

I) Soit F un compact de la sphère de RIEMANN, et $(F_n)_{n \in N}$ une suite d'ouverts. Supposons en outre que:

1) $(F_n)_{n \in N}$ est décroissante, $F_n \supset F$ et $F_n \supset \bar{F}_{n+1}$ et pour tout ouvert $M \supset F$, il existe un $F_n \supset M$.

2) Tout composante connexe de F_n contient au moins un point de F.

Soit $[F]$ les germes de fonctions analytiques sur F, et $F_n (n \in N)$ l'espace de BANACH des fonctions analytiques bornées en F_n. Soit $[F]_\rho$ l'espace $[F]$ muni de la topologie limite inductive des espaces $[F_n]$. Les applications naturelles h_n de $[F_n]$ en $[F_n + 1]$ et $y_n \to \dot{y}_n$ de $[F_n]$ en $[F]$ sont biunivoques et continues.

Soit $B_n(\rho)$ une boule fermée de rayon ρ de F_n avec centre à l'origine. $\tilde{B}_n = \overline{h_n(B_n)}$ est compact (Théorème de Montel).

THÉORÈME 1 - *Les ensembles* $\dot{\mathrm{y}}_{\mathrm{m}} + \tilde{\mathrm{B}}_n(\rho)$ *(ρ rationnel et* y_{m} *rationnelle à coefficients entiers complexes) contenus dans un ouvert Ω de* $[\mathrm{F}]_\rho$ *forment un système fondamental dénombrable de compacts de Ω.*

On va démontrer que tout compact K d'un ouvert Ω de $[F]_e$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'ensembles $\dot{y}_m + \tilde{B}_n(\rho)$ (ρ rationnel et y_m rationnelle à coefficients entiers complexes) contenus en Ω.

K est borné. Il existe K_n borné tel que $\dot{K}_n = K$ ([6] - p. 400) $K_{n+1} = h_n(K_n)$ sera relativement compact. K_{n+1} image inverse de K est fermé et compact.

Soit $y \in K$. On aura $y_{n+2} + B_{n+2}(\rho) \subset \Omega_{n+2}$ (ρ rationnel) (4) ([6] - p. 398). Il existe alors une fonction rationnelle de $[F_{n+1}]$: $y_m \in y_{n+1} + \frac{1}{2} B_{n+1}(\rho)$ à coefficients entiers (lemme 1). On aura $y_{n+1} \in y_m + \frac{1}{2} B_{n+1}(\rho)$. La compacité di K_{n+1} donne l'existence d'un recouvrement fini $y_m + \frac{1}{2} B_{n+1}(\rho_m)(1 \leq m \leq p)$ de K_{n+1}.

Les ensembles $\dot{y}_m + \frac{1}{2} \dot{\tilde{B}}_{n+1}(\rho_m)$ sont contenus dans Ω:

$$\varphi \in \dot{y}_m + \frac{1}{2} \dot{\tilde{B}}_{n+1} \Rightarrow \varphi_{n+2} \in h_{n+1}(y_m) + \frac{1}{2} \tilde{B}_{n+1}$$

$$y_m \in y_{n+1} + \frac{1}{2} B_{n+1} \Rightarrow h_{n+1}(y_m) \in y_{n+2} + \frac{1}{2} \tilde{B}_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_{n+2} \in y_{n+2} + B_{n+1} \Rightarrow \varphi \in \Omega.$$

K est alors contenu dans la réunion d'un nombre fini d'ensembles $\dot{y}_m + \tilde{B}_n(\rho)$ (y_m rationnelle à coefficients entiers complexes, ρ rationnel).

II) Soient F_1 et F_2 deux compacts de deux sphères de RIEMANN S_1 et S_2. Soient (F_{1n}) et (F_{2n}) ($n \in N$) deux suites du type vu en I). $[F_1 \times F_2]$ l'espace des germes de fonctions analytiques sur $[F_{1n} \times F_{2n}]$ ($n \in N$) l'espace de BANACH des fonctions analytiques bornèe sur $F_{1n} \times F_{2n}$. $[F_1 \times F_2]$ muni de la topologie limite inductive des espaces $[F_{1n} \times F_{2n}]$ ($n \in N$) sera désigné par $[F_1 \times F_2]_e$.

a) Soit $\mathfrak{L}_e$ ($[F_1 \times F_2]$) l'ensemble des formes linéaires continues sur $[F_1 \times F_2]_e$. Elles sont données par la formule de FANTAPPIÉ [7]:

$$\dot{y} \rightarrow \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1 \times \gamma_2} u(t_1, t_2) y(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (5)$$

b) Les formes bilinéaires continues sur $[F_1]_e \times [F_2]_e$ sont données par la formule de FANTAPPIÉ ([4], [5], [6]).

(4) Si $y \in [F]$, y_n est un représentant de $\dot{y}$ en F_n (s'il existe). $\Omega_n =$ image inverve de Ω par l'application $y_n \rightarrow \dot{y}_n$.

(5) y représentant de $\dot{y}$, $\gamma_1 \times \gamma_2$ biséparatrice de l'ensemble de définition de y et de $CF_1 \times CF_2$, et $u(t_1, t_2)$ fonction analytique en $CF_1 \times CF_2$.

$$(\dot{y}_1, \dot{y}_2) \to \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_1 \times \gamma_2} u(t_1, t_2) y_1(t_1) y_2(t_2) dt_1 dt_2$$

($y_1(t_1)$ e $y_2(t_2)$ repr. de y_1 e y_2 respectivement, $u(t_1, t_2)$ analytique en $CF_1 \times CF_2$).

Il est évident que le produit tensorial $[F_1] \otimes [F_2]$ est donné par les germes de fonctions analytiques sur $F_1 \times F_2$, du type:

$$\sum_{j=1}^{n} (\dot{y}_{1j}(t_1) \dot{y}_{2j}(t_2)).$$

$[F_1] \otimes [F_2]$ est alors un sous-espace vectorial de $[F_1 \times F_2]$.

c) Il existe sur $[F_1] \otimes [F_2]$ une topologie et une seule telle que pour la restriction de l'isomorphisme $\mathfrak{L}([F_1], [F_2])$ et $\mathfrak{L}([F_1] \otimes [F_2])$ à $B([F_1] \times [F_2])$ (6), $B([F_1] \times [F_2])$ soit isomorphe a $\mathfrak{L}_{\mathfrak{T}}([F_1] \otimes [F_2])$ (ensemble des formes linéaires et continues pour $\mathfrak{T}$) ([3] - p. 30).

Soit $\mathfrak{L}_i([F_1] \otimes [F_2])$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $[F_1] \otimes [F_2]$ muni de la topologie induite par celle de $[F_1 \times F_2]_e$.

THÉORÈME 2 - *La topologie de* $[F_1] \otimes [F_2]$ *coïncide avec celle induite par la topologie de* $[F \times F_2]_e$.

On va démontrer que $B([F_1]_e \times [F_2]_e) \simeq \mathfrak{L}_i([F_1] \otimes [F_2])$.

En effet *a*) e *b*) donnent:

$$B([F_1]_e \times [F_2]_e) \simeq \mathfrak{L}_e([F_1 \times F_2])$$

parce que tous les deux sont isomorfes à l'espace des fonctions analytiques sur $CF_1 \times CF_2$.

Soit $\mathfrak{L}_e \in \mathfrak{L}_e([F_1 \times F_2])$. La restriction de $\mathfrak{L}_e$ à $[F_1] \otimes [F_2]$ est un élément de $\mathfrak{L}_i([F_1] \otimes [F_2])$. Réciproquement $\mathfrak{L}_i \in \mathfrak{L}_i(F_1 \times F_2)$ peut être prolongée d'une manière unique è une forme linéarie continue sur $[F_1 \times F_2]_e$, parce que $[F_1] \otimes [F_2]$ est dense en $[F_1 \times F_2]_e$ (lemme 2). Il s'ensuit que:

$$B([F_1]_e \times [F_2]_e) \simeq \mathfrak{L}_i([F_1] \otimes [F_2])$$

L'isomorphisme est donné par:

$$B : (\dot{y}_1, \dot{y}_2) \in [F_1] \times [F_2] \to B(\dot{y}_1, \dot{y}_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_1 \times \gamma_2} u(t_1, t_2) y_1(t_1) y_2(t_2) dt_1 dt_2$$

$$\mathfrak{L}_e : \dot{y} \in F_1 \times F_2 \to \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_1 \times \gamma_2} u(t_1, t_2) y(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

(6) $B([F_1] \times [F_2]) =$ ensemble des formes bilinéaires continues sur $[F_1]_e \times [F_2]_e$.

$$\mathfrak{L}_1 : \Sigma\,(y_{1j}\dot{}y_{2j}) \to \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_1 \times \gamma_2} u(t_1\,,\ t_2)\, \Sigma\, y_{1j} y_{2j} dt_1 dt_2 =$$

$$= \Sigma\, B(\dot{y}_{1j}\dot{y}_{2j}).$$

La topologie induite sur $[F_1] \otimes [F_2]$ par celle de $[F_1 \times F_2]_e$ est alors identique a $\mathcal{C}$ (théorème c).

NOTE. - On pourra démontrer autrement que $[F_1]\otimes[F_2]$ est dense en $[F_1 \times F_2]_e$. Il suffit démontrer que les éléments

$$\left(\frac{1}{\alpha_1 - t_1}\right)\left(\frac{1}{\alpha_2 - t_2}\right) \in [F_1] \otimes [F_2]$$

forment un ensemble $\mathfrak{A}$ total en $[F_1 \times F_2]_e$ ([2] - p. 18). Une condition suffisante est la suivante: Si f forme linéaire et continue sur $[F_1 \times F_2]_e$ est nulle pour tout élement $x \in \mathfrak{A}$, alors $f = o$ ([2) - p. 18).

On observera que le lemme 2 est plus fort que la propriété que $[F_1] \otimes [F_2]$ est dense en $[F_1 \times F_2]_c$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] OMAR CATUNDA. *Sobre os fundamentos da teoria dos funcionais analìticos*, 1944, S. Paulo. Tese de concurso.

[2] CANDIDO L. DA SILVA DIAS, *Espaços vetoriais topológicos y sua aplicação nos espaços funcionais analìticos*, « Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo », 1952, Tese de concurso.

[3] ALEXANDRE GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Memoirs of American Mathematical Society, 1955.

[4] LUIGI FANTAPPIÉ, *Teoria de los funcionales analiticos y sus aplicaciones*, Barcelona 1955.

[5] DOMINGOS PISANELLI, *Alguns funcionais analìticos y seus campos de definição*, « Boletim da Sociedade de Matemàtica de São Paulo », 1957. Tese de doutoramento.

[6] JOSÉ SEBASTIÃO SILVA, *Su certe classi di spazi localmente convessi utili per le applicazioni*, « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », Vol. XIV, Fasc. 3, 1955.

[7] LUIGI FANTAPPIÉ, *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, « Mem. Acc. d'Italia », 1941.