Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* Niccolò Tartaglia, Quesiti et inventioni diversa, Supplemento ai "Commentari" dell'Ateneo di Brescia, 1959 (M. V.)
* Luigi Bianchi, Opere, Vol. IV, Parte II, Edizioni Cremonese, Roma 1956 (Paul Vincenzini)
* Luigi Bianchi, Opere, Vol. V, Edizioni Cremonese, Roma (Paul Vincenzini)
* La disputa Leibnitz-Newton sull'Analisi, Boringhieri, Torino, 1958 (Alessandro Terracini)
* W. I. Smirnov, Lehrgang der höheren Mathematik, Teil IV, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958 (Giovanni Sansone)
* O. Onicescu, G.Mihoc, Lectii de Statistică Matematică, Editura Tehnica, Bucarest, 1958 (G. G. Vranceanu)
* H. Reichardt, Vorlesungen über Vector-und Tensorrechnung, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957 (Maria Pastori)
* R. Gouyon, Le problème de Mécanique rationelle à l'agrégation, Librairie Vuibert, Paris, 1954 (Antonio Pignedoli)
* H. Weyl, Selecta, Birkhäuser Verlag, Base e Stuttgart, 1956 (Renato Nardini)
* H. Arzeliès, La Cinématique relativiste, Gauthier-Villars, Paris, 1955 (Antonio Pignedoli)
* H. Arzeliès, La Dynamique relativiste et ses applications, Gauthier-Villars, Paris, 1957 (Antonio Pignedoli)
* E. Kröner, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958 (Renato Nardini)
* Georges Heilbroon, Intégration des équations aux dérivée partielles de second ordre par la méthode de Drach, Gauthier-Villars, Paris, 1955 (Lamberto Cattabriga)
* Seminaire "Henry Cartan" 1956-57, Quelques questions de topologie, Ecole Normale Supérieure, Paris, 1958 (Michelangelo Vaccaro)
* B. Noble, Methods based on the Wiener-Hopf tecnique for the solution of partial differential equations, Pergamon Press, London,1958 (Luigi Gatteschi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.2, p. 237–263.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_237_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

RECENSIONI

NICCOLÒ TARTAGLIA, *Quesiti et inventioni diverse*, Riproduzione in fac-simile dell'edizione del 1554 edita con parti introduttorie da Arnaldo Masotti, Supplemento ai «Commentari» dell'Ateneo di Brescia, 1959 (pp. 129 + LXXXV con 8 tavole fuori testo).

Nel IV centenario della morte di Niccolò Tartaglia, l'Ateneo di Brescia, per onorare il grande matematico bresciano ha pubblicato la ristampa dell'opera del Tartaglia *Quesiti et inventioni diverse* della prima edizione completa del 1454. La bella nuova edizione (in 900 esemplari) è stata magistralmente curata da Arnaldo Masotti.

Quest'Opera del Tartaglia, com'è noto, si divide in nove « libri » ciascuno dei quali comprende un certo numero di « quesiti » attinenti a un determinato argomento: Libro I, di 30 quesiti, sui tiri delle artiglierie; Libro II, di 12 quesiti, sulle palle di artiglieria; Libro III, di 10 quesiti, sulle polveri da sparo; Libro IV, di 13 quesiti, sull'ordinamento delle fanterie; Libro V, di 7 quesiti, sul rilevamento topografico; Libro VI, di 15 quesiti, sui requisiti delle fortificazioni; Libro VII, di 7 quesiti, sull'equilibrio delle bilance; Libro VIII, di 42 quesiti, sulla teoria dei gravi; Libro IX, di 42 quesiti, sull'aritmetica, la geometria e l'algebra (in special modo, sulla risoluzione dell'equazione cubica).

Il volume si apre con una limpida premessa del prof. Osvaldo Passerini, Presidente dell'Ateneo di Brescia, in cui espone il programma delle onoranze che Brescia ha svolto e sta per svolgere per il grande bresciano e ricorda le persone che a tale scopo hanno particolarmenfe collaborato.

Segue un'ampia, assai pregevole introduzione del Masotti.

Osserva giustamente il Masotti che i *Quesiti* del Tartaglia conservano vivo interesse essendo opera d'importanza storica per la storia di varie discipline, soprattutto quelle matematiche e quelle militari; essendo documento storico per la vita di uno degli uomini più eminenti del cinquecento; in quanto illustrano idee, metodi, persone dell'ambiente culturale italiano del Rinascimento; costituiscono la produzione più singolare del Tartaglia. La ristampa è poi particolarmente opportuna anche per la rarità delle edizioni antiche dei *Quesiti*.

Il Masotti, nella sua Introduzione, porge dapprima una visione d'insieme dei *Quesiti*: generalità sui *Quesiti*; i *Quesiti* e la biografia del Tartaglia; i *Quesiti* e l'equazione cubica; i quesiti d'aritmetica, algebra e geometria; i quesiti sull'artiglieria; i quesiti sulla tattica; i quesiti sull'agrimensura; i quesiti sulle fortificazioni; i quesiti sulla statica. Il Masotti si trattiene poi sulle varie edizioni e traduzioni. Seguono 7 tavole fuori testo (1) relative a interlocutori dei *Quesiti*: Gerolamo Cardano, Francesco Maria della Rovere, Gabriele Tadino, Don Diego de Mendoza; e a versioni

(1) Altra tavola fuori testo trovasi di fronte al frontespizio e riproduce il frontespizio dei *Quesiti* edizione del 1546.

dei *Quesiti*: la versione tedesca del Rivio (1547); la versione francese anonima (1556); la versione inglese del Lucar (1588).

Segue poi un Indice delle persone e un Indice delle date e ancora Osservazioni sulle espressioni arcaiche e sul testo riprodotto dell'Opera tartagliana.

La stampa del bellissimo volume è dovuta alla tipografia « La Nuova Cartografica » di Brescia

M. V.

LUIGI BIANCHI, *Opere*, vol. IV, *Deformazioni delle quadriche. Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche*, Ed. Cremonese, Roma, 1956, Parte I, pp. 481, L. 4.500. Parte II, pp. 365, L. 3.000.

Le volume IV des oeuvres de L. Bianchi contient l'ensemble des travaux qui ont abouti à l'édification de la théorie générale de la déformation des quadriques, oeuvre maîtresse de l'illustre auteur. Les résultats obtenus par L. Bianchi dans sa théorie de la déformation des surfaces à courbure totale constante laissaient déja pressentir la possibilité d'inclusion de cette théorie dans une théorie plus vaste, où l'élément déformé serait, non seulement la sphère (réelle ou imaginaire) mais la quadrique la plus générale. En ce qui concerne la déformation des surfaces à courbure totale constante négative (pseudosphériques) L. Bianchi, interprétant les transformations à deux paramètres de Bäcklund de ces dernières surfaces comme des transformations asymptotiques particulières (faisant passer, par l'intermédiaire de ∞^2 congruences pseudosphèriques admettant pour $1^{ère}$ nappe focale une surface pseudosphèrique S donnée, de S à ∞^2 nouvelles surfaces pseudosphèriques applicables sur S et constituées par les $2^{èmes}$ nappes focales des congruences en question) a montré comment, moyennant l'application répétée d'un important théorème de permutabilité découvert par lui à cette occasion et dont le rôle devait se montrer primordial en géométrie différentielle, on pouvait déduire des transformées de Bäcklund de S, et cela sans quadratures, une infinité de nouvelles surfaces pseudosphériques, toutes applicables sur la surface pseudospérique de départ, dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres (épuisant selon toute probabilité la totalité des surfaces pseudosphériques applicables sur la surface initiale).

Les formules analytiques traduisant la transformation des surfaces pseudosphériques dont il vient d'être question conservaient leur validité pour les surfaces à courbure totale constante positive. Les congruences réalisant la transformation asymptotique intervenant dans la transformation de Bäcklund d'une surface à courbure totale constante positive réelle donnée étaient alors imaginaires, et telles étaient les surfaces transformées; mais l'application du théorème de permutabilité à partir de deux transformations imaginaires conjuguées de Bäcklund d'une même surface à courbure totale constante positive réelle (qui lui fut suggérée par un théorème célèbre de C. Guichard sur la déformation des quadriques de révolution) a permis à L. Bianchi de déduire de cette surface une nouvelle surface réelle de même courbure totale, et d'obtenir ainsi une suite illimitée de surfaces réelles, toutes applicables sur la surface initiale et dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres, conformément au résultat obtenu pour les surfaces pseudosphèriques.

Ainsi se trouvait constituée une théorie de la déformation des surfaces à courbure totale constante, en même temps que naissait dans l'esprit de L. Bianchi l'espoir de fonder, sur la transformation asymptotique (par congruences W) d'une déformée de quadrique quelconque, et par le jeu d'un théorème de permutabilité approprié, une théorie générale de la déformation des quadriques, espoir que sept années (1900-1907) de recherches jalonnées de découvertes mémorables, devaient transformer en une merveilleuse réalité. Et c'est en grande partie la suite des travaux poursuivis pendant ces sept années, et dont l'ensemble constitue l'un des plus beaux titres de gloire de L. Bianchi et de l'Ecole mathématique Italienne, qui constitue la matière des deux parties dont se compose le Vol. IV des Oeuvres du grand géomètre. Ce volume débute par une très belle introduction de R. Calapso, où le côté historique et le fond scientifique s'allient de la façon la plus heureuse, et où l'accent est mis sur l'atmosphère de cordiale et confiante collaboration internationale dans laquelle s'est déroulée l'œuvre de L. Bianchi.

Le volume actuel comprend les travaux suivants, que nous indiquons en les affectant des numéros qui les situent dans la liste générale donnée dans le 1er volume de la publication.

1ère Partie.

(82) Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazi di curvatura costante.
(93) Intorno alle superficie applicabili sui paraboloidi ed alle loro trasformazioni.
(96) Sulla deformazione dei paraboloidi.
(108) Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche.
(106) Sulle superficie deformate per flessione dell'iperboloide rotondo a una falda.
(116) Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde.
(107) Sulla deformazione dei paraboloidi.
(113) Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi.
(111) Ricerche sulla deformazione delle quadriche.
(114) Sur la déformation des quadriques.
(115) Sulle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche.

2ème Partie.

(122) Sur la théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques.
(120) Sopra un caso limite delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche.
(127) Sulle trasformazioni di Guichard delle superficie applicabili sulle quadriche.
(138) Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformate delle quadriche.
(143) Sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sulle quadriche.
(144) Sulle deformate rigate del paraboloide iperbolico.
(146) Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche.
(172) Concerning singular transformations B_k of surfaces applicable to quadrics.
(202) La costruzione geometrica di Darboux delle superficie applicabili sul paraboloide rotondo.

(204) Costruzione geometrica di Darboux per le deformate del paraboloide rotondo.

Les deux Mémoires (82), (84) étendent, aux espaces à courbure totale constante (positive ou négative), les résultats obtenus par L. Bianchi sur la déformation des quadriques de révolution de l'espace euclidien ordinaire. Il y est montré que dans ces espaces, tout comme dans l'espace euclidien, si de chaque point M d'une surface S on mène une droite D de telle façon que l'ensemble des droites D constitue une congruence normale (D), et si l'on lie invariablement chaque droite D à l'élément de contact de S de centre M, (D) reste normale lorsque on déforme S arbitrairement. En outre, les points des différentes droites D situés sur une même surface Σ normale à la congruence (D) ne cessent de constituer une surface normale à (D) au cours de la déformation de S. Recherchant les couples $[S, (D)]$ pour lesquels l'une des surfaces Σ normales à (D) est, et reste au cours d'une déformation arbitraire de S à courbure moyenne ou totale constante [ou plus généralement (84) ne cesse de vérifier une relation de la forme $\alpha \equiv a r_1 r_2 + b(r_1 + r_2) + c = 0$, a, b, c étant des constantes et r_1, r_2 les rayons de courbure principaux réduits], L. Bianchi réalise l'extension complète aux espaces à courbure constante des théorèmes de Guichard sur la déformation des quadriques de révolution, les surfaces S étant alors les surfaces applicables sur les différentes quadriques de révolution autour de l'*axe focal* de la conique méridienne, et la construction faisant passer de S aux surfaces Σ correspondantes étant la traduction, dans ces derniers espaces, de la construction de Guichard dans l'espace euclidien ordinaire. Il montre ensuite que, comme dans l'espace euclidien, l'inversion du résultat obtenu est possible, toute surface Σ du type (α) envisagé dérivant de ∞^3 surfaces applicables sur les différents types de surfaces de révolution indiqués des espaces à courbure constante. Si S est l'une de ces ∞^3 surfaces et M_1 le symétrique du point courant M de Σ relativement au plan tangent au point correspondant de S, M_1 décrit une nouvelle surface Σ_1 de la même classe que Σ [pour laquelle dans la relation (α) les coefficients a, b, c non nuls sont les mêmes à la valeur numérique près], d'où une méthode géométrique de transformation des surfaces Σ en surfaces de même classe qui, une fois les ∞^3 surfaces Σ_1 transformées d'une même surface Σ obtenues, peut être poursuivie indéfiniment au moyen de simples calculs algébriques et de dérivations. Dans la représentation conforme habituelle de l'espace à courbure constante sur l'espace euclidien, la transformation précédente des surfaces Σ acquiert une signification euclidienne remarquable. Les images des surfaces Σ se trouvent définies par une équation de Monge-Ampère du type de l'équation générale de Weingarten du problème de la déformation des surfaces, et la transformation des différentes classes de surfaces Σ fournit, dans l'espace euclidien, une transformation des classes correspondantes de surfaces applicables. La représentation conforme de l'espace elliptique sur l'espace ordinaire conduit, en particulier, à la détermination, par de simples quadratures, d'une infinité de surfaces applicables sur le paraboloide $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2iz$ (a, b = réels) dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres. La théorie des surfaces applicables sur ce paraboloide se trouve ainsi portée au même degré de perfection que celle des surfaces à courbure totale constante, et le procédé employé s'inscrit dans tout un ensemble de recherches dans lesquelles l'illustre auteur a ramené à des considérations de géomètrie non euclidienne la solution de problèmes relatifs à l'espace euclidien ordinaire.

Le progrès réalisé dans la voie de l'édification d'une théorie générale de la déformation des quadriques par le résultat obtenu dans les deux travaux précédents au sujet du paraboloïde $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2iz$, devait inciter L. Bianchi à chercher à étendre ces résultats aux paraboloïdes les plus généraux. C'est ce qu'il fit dans les mémoires (93) et (96) où, se basant sur une nouvelle forme remarquable de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème de la déformation des quadriques, découverte par P. Calapso à travers la considération, qui devait se montrer féconde en résultats, du réseau conjugué (permanent) commun à une surface et à l'une quelconque de ses déformées, il établit que, moyennant de simples quadratures on peut déterminer, par leurs équations intrinsèques, des surfaces applicables sur les paraboloïdes généraux, dépendant d'un nombre arbitrairement grand de constantes arbitraires. Le degré de perfection réalisé pour la théorie des surfaces à courbure totale constante n'est pas encore atteint, mais la recherche des systèmes cycliques dont les cercles sont situés dans les plans tangents aux surfaces applicables sur les paraboloïdes, à la considération desquels l'a conduit une analyse minutieuse des circonstances qui ont amené P. Calapso à sa transformation du problème de l'applicabilité des surfaces, a fait pressentir à L. Bianchi [Mém. (96)], le rôle de son théorème de permutabilité dans le problème de la déformation des quadriques générales, rôle qui lui fut révélé par le fait que le problème de la détermination de ces systèmes cycliques (équivalent à celui de la déformation des paraboloïdes envisagés) dépendait, en définitive, de la composition de deux transformations réelles et opposées de Bäcklund pour les surfaces de courbure totale constante positive ou négative des espaces euclidiens à métrique définie ou indéfinie, suivies de quadratures.

Le mémoire (108) devait mettre en pleine lumière l'importance primordiale que le théorème de permutabilité (avec les transformations par congruences W) serait appelé à jouer dans la théorie générale de la déformation des quadriques. Ce mémoire, qui est l'une des productions les plus belles et les plus puissantes de L. Bianchi, est trop dense de résultats importants pour se prêter à une analyse détaillée; nous nous bornerons ici à en résumer l'essentiel. Le point de départ est un Mémoire de G. Darboux sur les congruences conformes de sphères, dans lequel l'auteur indique une transformation par enveloppe de sphères (appelée D_m par L. Bianchi), faisant correspondre à une surface isothermique quelconque donnée ∞^4 nouvelles surfaces isothermiques, transformation qui, appliquée à une famille étendue de surfaces isothermiques (dites *spéciales*) met ces dernières surfaces en relation avec le problème de la déformation des quadriques générales. L. Bianchi établit un rapprochement remarquable entre la transformation D_m de Darboux et la transformation de Bäcklund des surfaces à courbure totale constante. Il montre qu'il existe, pour la transformation D_m, un théorème de permutabilité moyennant lequel, si deux surfaces isothermiques S_1, S_2 dérivent d'une même surface isothermique S par deux transformations D_m distinctes, il existe une quatrième surface S', parfaitement déterminée et constructible en termes finis à partir de S, S_1, S_2 supposées connues; l'application indéfiniment répétée du théorème de permutabilité permet ainsi, une fois les premières transformées D_m de S obtenues, d'obtenir sans quadratures de nouvelles surfaces isothermiques dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres, et de porter ainsi la solution du problème de la transformation des surfaces isothermiques envisagé par G. Darboux au même degré de perfection que celui de la transformation de Backlund des surfaces à courbure totale constante. A partir de là L. Bianchi établit un résultat tout à fait fondamental, qui donne une assise solide à sa conviction de pouvoir mener à terme l'édification d'une théorie de la déformation des quadriques générales, et qui est le suivant: Parmi les ∞^4 transformées de Darboux d'une surface isothermique *spéciale* il en existe ∞^3 qui sont elles-mêmes spéciales, et le théorème général de permutabilité des transformations D_m joue à l'intérieur de la famille des surfaces isothermiques spéciales.

Passant, par un procédé d'inversion remarquablement réalisé, des surfaces isothermiques spéciales aux déformées de quadriques qui leur correspondent dans la transformation D_m de Darboux, il aboutit ainsi à la détermination, à partir d'une surface applicable sur une quadrique quelconque, de ∞^3 nouvelles surfaces applicables sur la même quadrique, lesquelles, par application du théorème de permutabilité, permettent de construire une infinité de nouvelles surfaces, dépendant d'un nombre arbitrairement de paramètres, toutes applicables sur la déformée de quadrique initiale.

Si le point de vue analytique adopté dans cette recherche ne confondait pas le réel et l'imaginaire le but poursuivi serait pleinement atteint, et les efforts de L. Bianchi vont, dès à présent, tendre à effectuer précisément la séparation du réel et de l'imaginaire afin d'aboutir à une théorie complète des déformations réelles des quadriques générales réelles. L'exemple des transformations des surfaces applicables sur les surfaces pseudospèriques lui suggére l'idée, qui devait se trouver brillament confirmée par les faits, que l'instrument fondamental susceptible de mener ses recherches à terme ne pouvait se trouver que dans les congruences *W* considérées comme réalisant la transformation de leur deux nappes focales l'une dans l'autre. Pour donner force à cette suggestion et la transformer en certitude, il ne pouvait être question d'aborder le cas général, mais d'en éprouver la valeur dans les cas les plus accessibles au calcul. C'est là l'objet des travaux (106) et (116), (107) et (113). Les deux premiers sont consacrés à la déformation des quadriques de révolution [(106) traitant du cas, le plus immédiat, où la quadrique est un hyperboloide de révolution à une nappe, et (116) de celui où elle est la quadrique de révolution la plus générale], les deux autres abordent le problème de la déformation dans le cas où la quadrique envisagée cesse d'être de révolution et mènent sa solution à terme pour les paraboloïdes généraux.

En (106) il est montré que toute surface Σ applicable sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe est la 1ère nappe focale de ∞^2 congruences *W* dont la 2ème nappe focale est applicable sur l'hyperboloïde même. La transformation faisant passer de Σ à l'une quelconque des ∞^2 surfaces applicables revient à la détermination des groupes de quatre solutions quadratiques, $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ [liées par la relation $\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 - \xi_0{}^2 = 1$] d'une même équation de Moutard, ce qui ramène la théorie des transformations des surfaces applicables sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe à celle de la transformation des réseaux de Voss de l'espace à courbure constante négative, développée par l'auteur dans un mémoire antérieur, et pour laquelle est établie l'existence d'un théorème de permutabilité. Il existe donc également un théorème de permutabilité pour la théorie des transformations des surfaces applicables sur l'hyperboloïde de révolution à una nappe. L. Bianchi établit d'ailleurs que ces transformations admettent une autre interprétation, euclidienne cette fois, ramenant le problème de la déformation de l'hyperboloïde de révolution à une nappe à celui des transformations de Bäcklund d'une classe spéciale de surfaces pseudospèriques *imaginaires*, rattachant ainsi le théorème de permutabilité en question au théorème de permutabilité des transformations de Bäcklund. La note actuelle marque un grand pas vers l'achèvement de la théorie des transformations des surfaces applicables sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe; mais le résultat souhaité, à savoir sa présentation sous forme définitive *réelle* n'est pas encora atteint: il le sera dans le grand mémoire (116).

Dans ce nouveau travail ce sont les surfaces applicables sur les quadriques de révolution *générales* qui sont prises en considération. Ces surfaces sont réparties en deux familles, les surfaces de la 1ère famille [dites de 1ère espèce] comprenant l'ellipsoïde allongé, l'hyperboloïde à deux nappes et le paraboloïde, celles de la 2ème [dites de 2ème espèce] comprenant: *a*) l'hyperboloïde réglé, *b*) l'ellipsoïde applati, *c*) l'ellipsoïde imaginaire. Pour les quadriques de 1ère espèce (de révolution autour de l'axe focal), L. Bianchi avait déja, dans un mémoire antérieur, publié sous le n° (77) dans le volume *V* de ses Oeuvres, résolu de façon complète le problème de la déformation en le ramenant, grâce à son inversion des théorèmes de Guichard, à celui de la déformation des surfaces à courbure totale constante. Le mémoire actuel a précisément pour objet de compléter la théorie par l'étude des surfaces réelles applicables sur les quadriques de révolution de 2ème espèce, l'adjonction de l'ellipsoïde imaginaire *c*) auprès des types réels *a*) et *b*) trouvant sa justification dans le fait qu'il existe diverses classes de surfaces *réelles* applicables sur *c*) et justiciables des mêmes méthodes de transformation que *a*) et *b*). Il y est montré que, comme cela a lieu pour les surfaces applicables sur les quadriques de révolution de 1ère espèce, toute surface applicable sur une quadrique de révolution Q de 2ème espèce est la 1ère nappe focale de ∞^1 congruences W dont les deuxièmes nappes focales sont autant de nouvelles surfaces applicables sur Q. Des deux constantes arbitraires intervenant dans les formules analytiques réalisant le passage d'une surface quelconque S_0 applicable sur Q à l'une quelconque de ses ∞^1 transformées, l'une est une constante d'intégration, et l'autre est la distance focale (τ) de la congruence pseudospérique imaginaire correspondante dont il a été question précédemment. Par analogie avec les transformations de Bäcklund des surfaces à courbure totale constante, L. Bianchi appelle B_τ la transformation de S en l'une quelconque de ses ∞^1 transformées relatives à une valeur déterminée de τ. et, relativement à cette transformation, il établit un théorème de permutabilité amenant la théorie des surfaces applicables sur les quadriques de révolution de 2eme espèce au degré de perfection atteint par la théorie des surfaces pseudosphériques. Il montre ensuite que les considération développées pour les quadriques de révolution de 2ème espèce peuvent, a condition de renoncer à la réalité des congruences W transformatrices, s'étendre aux quadriques de 1ère espèce, la combinaison de deux transformations B_τ sucessives imaginaires conjuguées convenables donnant une transformée réelle d'une surface réelle applicable sur une quadrique de révolution de 1ère espèce. Ainsi se trouve réalisée une théorie des surfaces applicables sur les quadriques de révolution générales, tout à fait assimilable à la théorie des surfaces à courbure totale constante et l'englobant, les surfaces applicables sur les quadriques de révolution de 2ème ou de 1ère espèce se comportant respectivement comme les surfaces pseudospèriques ou les surfaces à courbure totale constante positive.

La note (107) et le mémoire (113) confirment, pour les surfaces applicables sur les paraboloïdes (surfaces du 2ème degré privées de centre), les prévisions relatives au rôle des congruences W comme élément fondamental de transformation des surfaces applicables sur les quadriques générales. Toute surface S applicable sur le paraboloïde général (elliptique ou hyperbolique) est la 1ère nappe focale de ∞^2 congruences W dont les 2èmes nappes focales sont ∞^2 surfaces S' applicables sur S. De plus, parmi les deux constantes arbitraires intervenant dans les formules définisant le passage de S à l'une quelconque de ses ∞^2 transformées, l'une (σ) joue exactement le rôle de k dans la transformation B_k de Backlund des surfaces pseudospériques, notamment en ce qui concerne l'existence d'un théorème de permutabilité et de son application répétée. En outre, et cette remarque géométrique devait puissamment contribuer à l'achèvement de la théorie des surfaces applicables sur les quadriques générales, le lieu des points M' relatifs à un même point M, des ∞^1 surfaces S' transformées de S par les différentes B_σ correspondant à une valeur déterminée de σ, est une conique, invariable de forme et de position dans le plan tangent en M à S lorsque S se déforme arbitrairement. Une étude approfondie de la nature de l'applicabilité de S (supposée réelle) sur l'une quelconque S' de ses transformées réelles, a conduit L. Bianchi à distinguer (conformément à une notion introduite par K. M. Peterson) entre deux espèces d'application, dites propres ou impropres suivant qu'elles font correspondre à une région réelle de S une région réelle ou imaginaire de S', et à préciser à cet égard les comportements respectifs des paraboloïdes hyperboliques.

et elliptiques. La considération des déformées impropres du paraboloïde hyperbolique conduit, en particulier, à la découverte d'une classe de surfaces réelles applicables sur des quadriques *à centre* imaginaires (tangentes au cercle de l'infini), préludant ainsi à la phase finale de la recherche, à savoir la détermination des surfaces applicables sur les quadriques centrées les plus générales.

Le mémoire (111) est une première prise de contact avec le problème général. Il y est montré qu'il existe des classes de congruences W dont les deux nappes focales sont applicables sur deux quadriques différentes et non plus nécessairement sur la même quadrique, résultat remarquable puisqu'il permet d'effectuer le passage des déformées d'une quadriques à celles d'une autre quadrique. Et en fait, L. Bianchi peut ainsi transformer le problème (antérieurement résolu) de la recherche des surfaces applicables sur les quadriques de révolution autour de l'axe focal, en celui de la recherche des déformées (réelles) des quadriques imaginaires de Darboux tangentes au cercle de l'infini. Parmi les congruences W dont les deux nappes focales sont applicables sur des quadriques différentes, envisagées dans le mémoire actuel, il y en a dont les nappes focales sont elles-mêmes des quadriques, toute quadrique Q étant la première nappe focale de ∞^5 congruences W dont les 2^{èmes} nappes focales sont de nouvelles quadriques projectives à Q.

La solution définitive du problème général de la déformation des quadriques est annoncée dans les notes (114^a), (114^b). (115), et exposée en détail dans le Mémoire (122), couronné par l'Académie des Sciences de Paris, dont nous nous bornerons ici à résumer les résultats essentiels. S étant une surface quelconque applicable sur une quadrique quelconque Q, il existe ∞^2 congruences W de 1ère nappe focale S et dont les 2èmes nappes S_1 sont aussi applicables sur Q. Si F et F_1 sont deux points correspondants quelconques sur S et sur l'une des S_1 (foyer de la congruence W transformant S en S_1), et si l'on suppose les différents segments $(F F_1)$ entraînés par S dans l'application amenant S sur Q, après cette déformation les points F_1 viennent se distribuer sur une certaine quadrique homofocale à Q, et l'une des deux constantes dont dépend la transformation générale ($S \longrightarrow S_1$) réalisée par les ∞^2 congruences W ci-dessus, est le paramètre k fixant cette quadrique homofocale Q_k (la transformation elle-même étant désignée par B_k). Pour k donné, B_k donne ∞^1 surfaces S_1 transformées de S, dépendant d'une équation de Riccati dont l'intégration introduit la 2ème constante de la transformation. Quant au point qui correspond à un point quelconque F de S dans l'application de S sur l'une quelconque S_1 de ses ∞^1 transformées B_k (k donné), ce n'est pas le point F_1 où le rayon de la congruence W transformatrice touche S_1 mais celui qui correspond, dans cette même application, à l'homologue de F dans l'affinité d'Ivory transformant Q en Q_k. La transformation B_k présente, comme la transformation de Bäcklund des surfaces à courbure totale constante, un théorème de permutabilité suivant lequel, si S_1 et S_2 sont deux transformées de S par une B_{k_2} et une B_{k_1}, il existe une 4ème déformée S' de Q correspondant à S_1 dans une B_{k_2} et à S_2 dans une B_{k_1}. S' se déduit de S, S_1, S_2 par une construction, en termes finis, que l'auteur présente sous une forme géométrique remarquablement simple, et moyennant laquelle, une fois intégrée l'équation de Riccati relative à S pour les ∞^1 valeurs de k, on peut, par de simples calculs algébriques, obtenir des surfaces applicables sur Q et dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres. En ce qui concerne la réalité, il y a lieu de distinguer les cas où Q_k appartient à la même famille de quadriques du système homofocal déterminé par Q ou à des familles différentes; dans le 1er cas les deux surfaces S et S_1 sont applicables régions réelles par régions réelles (application *réelle*), mais dans le 2ème à une région réelle de S correspond une région imaginaire de S_1 (application *idéale*). Le mémoire contient de nombreux résultats géométriques, concernant notamment les réseaux conjugués persistants de deux quadriques transformées S, S_1, et la déformation de S autour d'une de ses asymptotiques supposée rigide. S se déformant autour d'une asymptotique (A), l'une quelconque de ses ∞^1 transformées B_k se déforme autour d'une asymptotique (A_1), de sorte que les transformations B_k des surfaces applicables sur les quadriques peuvent être regardées comme transformations de *courbes* (les asymptotiques des surfaces S).

La considération des couples Q, Q de quadriques *conjuguées en déformation* conduit à une nouvelle transformation des déformées des quadriques générales, la transformation (H), transformant les quadriques applicables, non plus sur Q, mais sur la quadrique $\overline{Q}$ conjuguée en déformation de Q. Cette transformation (H), qui s'applique aussi aux quadriques des espaces à courbure constante, jouit de propriétés remarquables, notamment de celle de transformer à la fois les asymptotiques et géodésiques d'une surface quelconque S en celles de l'une quelconque de ses transformées, d'avoir la période 2, et d'être permutable avec la transformation B_l.

Le cas limite des transformations B_k appliquées aux coniques (envisagées comme quadriques dégénérées d'un système homofocal) donne lieu à une théorie des transformations des coniques *tordues* (courbes gauches déduites d'une conique ordinaire par modification arbitraire de la torsion et conservation de la courbure en chaque point), théorie à laquelle se prêtent mal les formules générales de la transformation B_k, et que l'auteur étudie directement dans la note (120).

Le mémoire (122) a été récompensé en même temps qu'un autre de C. Guichard, présentant sous un aspect tout à fait différent le problème de la transformation des surfaces applicables sur les quadriques. Ce dernier géomètre avait été amené à envisager deux groupes différents de transformation des quadriques générales, les transformations du 1^er^ groupe n'exigeant que l'intégration d'une équation de Riccati et des quadratures, celle du second ramenant le problème à celui de la formation d'un déterminant orthogonal du 4ème ordre dont les rotations étaient conuues. G. Darboux, dans son rapport sur les travaux respectifs de L. Bianchi et C. Guichard, posa la question de chercher les relations qui pouvaient exister entre les transformations B_k de L. Bianchi et les deux groupes de transformations de C. Guichard. Ce problème fait l'objet de la note (127), dans laquelle L .Bianchi montre que les transformations du 1er groupe de Guichard se décomposent en produits de transformations B_k. Pour la décomposition analogue relativement aux transformations du 2ème groupe de Guichard, opération qui se présentait comme devant être d'une difficulté redoutable, L. Bianchi se borna à émettre une hypothèse favorable, que P. Calapso devait brillamment confirmer en montrant que toute transformation de Guichard du 2ème groupe était le produit de transformations B_k et d'une nouvelle transformation (B_γ) non encore considérée jusqu'alors.

Les travaux qui suivent se rattachent de façon plus ou moins directe aux recherches fondamentales qui précèdent. La note (138) est consacrée aux réseaux conjugués permanents des déformées S d'une quadrique Q (se correspondant sur S et Q); il y est démontré que sur toute S les tangentes aux lignes du réseau conjugué permanent forment des congruences W particulières; et ce résultat entraine la possibilité de soumettre S à deux déformations infinitésimales dans lesquelles les déplacements des différents points de S ont lieu dans les directions des binormales aux courbes du réseau permanent, propriété qui est, en particulier, appliquée aux transformations infinitésimales des surfaces à courbure totale constante.

On retrouve les transformations infinitésimales dans la note (144), consacrée à la recherche des déformées réglées du paraboloïde hyperbolique. Les déformées en question sont en relation avec les solutions de l'équation de Liouville $\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} = e^\theta\right)$; à toute solution θ de cette équation correspondent ∞^3 de ces déformées, et pour toutes ces déformées le problème de la recherche des transformations infinitésimales est le même.

La note (143) et le mémoire (146) généralisent un résultat relatif à l'existence de familles de Lamé (appartenant à un système triple orthogonal) formées de surfaces à courbure totale constante, et inaugurent la théorie générale des systèmes triplement conjugués (u, v, w) dont une famille de surfaces (les surfaces $w = \text{const.}$ par exemple) est formée de déformées de quadriques. Le principal intérêt des systèmes envisagés réside en ce que, conformément à ce qui a lieu pour les systèmes triplement orthogonaux dont une famille de surfaces est composée de surfaces à courbure totale constante, le réseau (u, v) intercepté sur les différentes déformées de quadriques ($w = \text{const.}$) par les surfaces ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$) des deux autres familles est le réseau conjugué permanent de ces déformées (c'est à dire le réseau conjugué de l'une quelconque de ces déformées restant conjugué lorsque celle-ci affecte la forme quadrique), tandis que les courbes d'intersection des surfaces $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ déterminent sur les déformées de quadriques $w = \text{const.}$ une correspondance conservant les réseaux conjugués.

L'étude débute par la considération des systèmes triplement conjugués dont une famille est formée de surfaces applicables sur le catenoïde ou sur les développées des surfaces à courbure constante positive, systèmes qui présentent des propriétés très voisines de ceux pour lesquels une famille est formée de surfaces applicables sur les quadriques. Sont ensuite examinés les systèmes (déterminables en termes finis par des quadratures ou par l'intégration d'équations différentielles ordinaires) dont une famille est formée de surfaces réelles applicables, soit sur les quadriques de révolution, soit sur les paraboloïdes généraux réels ou imaginaires, soit sur les quadriques imaginaires à centre de Darboux (tangentes au cercle de l'infini). Dans les deux derniers cas, les surfaces $w = \text{const.}$ sont, pour raison de simplicité, supposées applicables sur la *même* quadrique, l'extension au cas général étant aisée. Dans tous les cas les systèmes triplement conjugués obtenus admettent des transformations asymptotiques, lesquelles pour chaque surface $w = \text{const.}$ prise en particulier ne sont autres que les B_k de la théorie générale des transformations des quadriques, et qui admettent, avec toutes ses conséquences, le théorème de permutabilité établi pour ces mêmes B_k.

Si, revenant aux transformées B_k d'une déformée S d'une quadrique donnée Q, telles qu'elles ont été définies dans l'analyse du mémoire (122), on associe les ∞^1 points F_1 correspondant pour une valeur donnée de k à un même point F de S, et si l'on envisage les ∞^1 facettes des ∞^1 surfaces S' centrées en ces ∞^1 points F_1, l'ensemble des ∞^3 facettes relatives aux ∞^1 points F_1 de S est *stratifiable*, les ∞^2 surfaces de stratification étant précisément les ∞^1 transformées B_k de S. En outre lorsque on déforme S, chacune des facettes précédentes (de centre F_1) restant invariablement liée à l'élément de contact de S centré au point correspondant F, l'ensemble des ∞^3 facettes ne cesse d'être stratifiable, les ∞^1 surfaces de stratification étant toujours les ∞^1 surfaces applicables sur S (et sur Q) transformées B_k de S dans chacune de ses configurations. Le problème de la déformation des quadriques, tel qu'il a été présenté en (122), peut donc êthe regardé (conformément d'ailleurs au point de vue de Bäcklund), comme un problème de déformation des ensembles stratifiables de facettes. Dans la publication (173), après quelques indications générales sur ce dernier problème, L. Bianchi étudie le cas singulier, où l'application de S sur Q, transforme l'ensemble stratifiable envisagé en un ensemble de facettes centrées dans le plan de l'une des coniques du système homofocal à Q.

Le volume se termine par un article (202), de caractère plutôt didactique, consacré à une nouvelle exposition d'une construction géométrique de Darboux des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution, en relation avec les théorèmes généraux de Weingarten sur la déformation des surfaces de révolution générales.

PAUL VINCENSINI

L. Bianchi, *Opere*, vol. V, *Trasformazioni delle superficie e delle curve*, pp. 538, Roma, Ed. Cremonese, L. 500.

Les travaux contenus dans le Vol. V des oeuvres de L. Bianchi se rattachent au thème principal de la transformation des courbes et des surfaces. Ils sont certes loin d'épuiser la totalité des publications qui pourraient se réclamer du titre de ce Volume, mais, outre qu'il eut été impossible de délimiter l'ensemble des travaux de l'illustre auteur touchant à l'idée de transformation, idée dont toute l'oeuvre est imprégnée et qui est comme l'essence vitale de cet arbre gigantesque, les notes ou mémoires rassemblés dans cet ouvrage de plus de 500 pages, suffisent à mettre en lumière l'exceptionnelle puissance des istruments d'investigation dont L. Bianchi a enrichi le matériel géométrique, au premier rang desquels il convient de placer le *théorème de permutabilité*, né dans la Note (46) de ce même Volume et qui devait avoir la prodigieuse carrière que l'on sait.

Le Volume débute par une introduction de Pietro Tortorici, qui, ayant été l'élève de L. Bianchi et ayant orienté ses propres recherches dans plusieurs des voies ouvertes par l'illustre Maître, était particulièrement indiqué pour le présenter au public mathématique, ce qu'il a fait, bien qu'il s'en défende, avec une incontestable autorité. Il comprend 25 notes ou mémoires dont nous commencerons par donner la liste, les numéros désignant ces différentes publications étant ceux-là mêmes qu'elles ont dans la liste générale figurant au début du Vol. des oeuvres de L. Bianchi:

(3) Sulle trasformazioni univoche nel piano e nello spazio;
(6) Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi;
(7) Ricerche sulle superficie elicoidali;
(8) Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano e nello spazio;
(9) Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung;
(11) Sulle superficie a curvatura costante positiva;
(13) Sulle curve a doppia curvatura;
(27) Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante;
(36) Sopra una classe di rappresentazioni equivalenti della sfera sul piano;
(46) Sulla trasformazione di Backlund per le superficie pseudosferiche;
(48) Sulla trasformazione di Backlund pei sistemi tripli ortogonali pseudosferici;
(56) Sulla interpretazione geometrica del teorema di Moutard;
(71) Sopra le superficie a curvatura costante positiva;
(73) Sulle trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva;
(74) Sulle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante;
(75) Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie d'area minima;
(77) Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante;
(87) Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie;
(90) Sulle quadriche coniugate in deformazione;
(117) Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle supercie;
(139) Sulla teoria delle trasformazioni delle curve di Bertrand e delle superficie pseudosferiche;
(136) Formole generali per le superficie riferite alle loro linee asintotiche con alcune applicazioni;

(137) Superficie con un sistema di asintotiche a torsione costante e loro trasformazioni;

(163) Sulle trasformazioni di Ribaucour di una classe di superficie;

(184) Sur les couples de surfaces à lignes de courbure associées.

L'ensemble des travaux ci-dessus peut être divisé en deux groupes; les travaux du 1.er groupe [(3), (13), (8), (117), (139)] ressortissant plus spécialement à la théorie des courbes, les autres à la théorie différentielle des surfaces.

Dans le 1.er groupe, les notes (3) et (8) sortent un peu du cadre général qui est celui de la géométrie différentielle, et se rapportent à des sujets spéciaux touchant à la géométrie algébrique. En (3) il est donné un moyen géométrique de construire autant de systèmes homaloïdaux de courbes planes que l'on veut, et cela à partir du fait que dans chaque système homaloïdal de courbes la somme des ordres de multiplicité des trois points fondamentaux de l'ordre le plus élevé est supérieur à l'ordre de la courbe, d'où résulte que tout système homaloïdal du plan peut être déduit, par des transformations quadratiques, des systèmes homaloïdaux d'ordre inférieur. Il est également montré comment on peut déterminer les transformations birationnelles entre deux espaces S, S' telles qu' étant donné le couple de points correspondants (O, O') de S et S' respectivement, aux plans de S issus de O correspondent des plans de S' issus de O'.

La note (8) est relative à la transformation par rayons vecteurs réciproque du plan ou de l'espace. On sait que Liouville a montré que, dans l'espace à trois dimensions, la transformation par rayons vecteurs réciproques est (à une exception près constituée par la similitude) la seule transformation ponctuelle conservant les angles. Les choses vont différemment dans le plan où toute fonction analytique définit une transformation conforme; L. Bianchi s'est demandé si, en limitant convenablement l'ensemble des transformations ponctuelles du plan, on ne pourrait pas obtenir un théorème analogue à celui de Liouville, et il a montré qu'il en est effectivement ainsi si l'on se borne à la considération des transformations birationnelles. Il établit d'ailleurs aussi que. dans l'espace, les seules transformations birationnelles conformes (la similitude mise à part) sont les transformations par rayons vecteurs réciproques, de sorte que, dans le champ restreint des transformations indiquées, le théorème de Liouville précédemment énoncé vaut uniformément pour le plan et pour l'espace. La démonstration de ce resultat est basée sur la définition projective de Laguerre de l'angle de deux droites, et sur la considération, dans deux plans en transformation birationnelle, des courbes du système homaloïdal de chacun des plans correspondant aux droites de l'autre.

En (13), généralisant un résultat de S. Lie relatif à la transformation des courbes à torsion constante L. Bianchi donne la moyen de déduire, par de simples quadratures, d'une courbe gauche quelconque une infinité de nouvelles courbes gauches, en correspondance ponctuelle par égalité des arcs et des torsions (ou des courbures) avec la première, la loi de variation de la courbure (ou de la torsion) des courbes transformées étant arbitraire. Ce travail contient de nombreuse propositions devenues classiques, et notament la notion de couples de *courbes conjuguées*, aux points de même abscisse curviligne desquelles la courbure et la torsion sont permutées.

Le mémoire (117) est tout à fait fondamental, et a été le point de départ, en Italie et ailleurs, d'un nombre considérable de travaux du plus haut intérêt. Le sujet de ce mémoire est l'étude des configurations mobiles de Möbius dans leurs relations avec le problème des transformations asymptotiques des courbes et des surfaces. Möbius a considéré des couples de tétraèdres inscrits l'un dans l'autre, c'est à dire offrant une configuration (8_4) de 8 points et de 8 plans, tels que chaque point soit situé dans 4 des plans, chaque plan contenant 4 des points. En associant deux telles configurations (8_4) inscrites l'une dans l'autre, on obtient une configuration (16_5) formée de 16 points et de 16 plans, tels que chaque point soit situé dans 5 des plans chaque plan contenant 5 des points, et en continuant, on arrive aux configurations générales de Mobius $[(2^n)_{n+1}]$ dites d'ordre n. Considérant une configuration de cette espèce comme un élément mobile à un ou deux paramètres de l'espace, L. Bianchi établit l'existence de séries ∞^1 ou ∞^2 de configurations de Möbius, telles que les 2^n courbes décrites dans le 1.er cas par les différents sommets de la configurations aient les plans correspondants de la même configuration pour plans osculateurs, et que les 2^n surfaces décrites dans le 2.ème cas par ces mêmes sommets aient constamment les plans correspondants pour plans tangents. Les ∞^1 courbes ou les ∞^2 surfaces ainsi obtenues sont dites constituer des configurations de Möbius de courbes ou de surfaces. Ces configurations jouissent de propriétés remarquables, tant projectives que métriques. La configuration de courbes d'ordre n la plus générale de Möbius dépend de $n+2$ fonctions arbitraires d'une variable. Parmi celles-ci, il y a lieu d'attacher une importance particulière à celles pour lesquelles chaque sommet de la configuration mobile reste à des distances fixes des n sommets situés dans le plan correspondant. Si l'on suppose chaque sommet relié aux n sommets correspondants par n tiges rigides on obtient un système de n. 2^{n-1} tiges, articulées en leurs sommets, doué d'un haut degré de déformabilité, et susceptible de recevoir un mouvement à un paramètre dans lequel les différents sommets de la configuration mobile décrivent des courbes de même torsion constante, admettant constamment les plans correspondants de la configuration pour plans osculateurs.

La considération de tels systèmes articulés de Möbius a inspiré de nombreux travaux; qu'il me soit permis de signaler ici ceux de B. Gambier, l'un des géomètres qui ont le plus contribué à faire connaitre en France l'oeuvre de L. Bianchi et dont on peut trouver les titres des publications particulières relatives au sujet qui nous occupe, dans la liste complète qui en a été recemment publiée au Bulletin de l'Union Mathématique Italienne [(3), 11, 1956, pp. 599-607]

Au sujet des configurations de surfaces de Möbius, L. Bianchi a montré comment on peut construire de telles configurations de 2^n sufaces en prenant n transformées asymptotiques (par congruences W) d'une même surface S, ajoutant ainsi un perfectionnement important à la théorie des congruences W par lui créée. A la faveur de ce perfectionnement, il peut en particulier, présenter sous une forme nouvelle et susceptible d'extensions remarquables, le problème, résolu antérieurement par lui analytiquement et successivement par C. Segre sous forme géométrique, de la détermination des congruences W à nappes focales réglées. A partir des systèmes articulés de Möbius L. Bianchi a pu reprendre, et présenter de façon complète et aussi géométrique que possible, le problème déja envisagé par lui de la transformation de Bäcklund des courbes à torsion constante. Et ces mêmes systèmes articulés lui ont permis d'éclairer d'un jour nouveau la théorie des transformations de certaines familles de surfaces, telles les surfaces applicables sur le caténoïde ou les quadriques générales, au sujet desquelles il montre que toute déformée de l'une des surfaces du type envisagé donne lieu à des configurations de Möbius de surfaces du même type toutes applicables les unes sur les autres. A côté des systèmes articulés de Möbius dont il vient d'être question, L. Bianchi en a considéré d'autres, d'une espèce tout à fait différente, pouvant se mouvoir de façon que les n tiges issues d'un même sommet restent constamment orthogonales à la courbe décrite par ce sommet, et cela lui a permis, en particulier, d'établir pour les courbes à courbure constante, une méthode de transformation analogue à celle obtenue pour les courbes à torsion constante à partir des systèmes articulés de la 1.ère espèce, et moyennant la quelle, à partir d'une courbe à courbure constante donnée C, on peut construire des systèmes articulés de Möbius dont les différents sommets décrivent autant de courbes toutes à courbure constante. Si C est un cercle de rayon a, tous les sommets de la configuration susdite de Möbius sont des cercles de rayon a, et l'on arrive ainsi à la conception de systèmes de Möbius de n. 2^{n-1} tiges rigides, susceptibles d'une déformation continue à un paramètre au cours de laquelle les 2^n sommets de la configuration décrivent des cercles égaux, chaque tige restant orthogonale aux cercles décrits par ses deux extrémités. De pareils mécanismes déformables ont été envisagés par divers auteurs (E. Borel, B. Gambier, ...), mais on ne peut s'empêcher d'admirer ici la magnifique ampleur de développement imprimée au sujet par L. Bianchi.

Le travail (117) qui vient d'être analysé trouve un complément remarquable dans le mémoire (139) consacré à la théorie des courbes de Bertrand et des surfaces pseudosphèriques. En (117) les transformations des courbes à torsion constante que l'auteur a été conduit à envisager sont des transformations *finies*. Les développements du mémoire (139) sont au contraire dominés par la considération de transformations *infinitésimales* ou *continues*. La différence des deux points de vue est nettement soulignée dans la belle préface par laquelle débute le mémoire, où se trouve exposée dans ses traits généraux, une méthode de recherche particulièrement féconde, consistant à construire, à partir d'êtres géométriques E de nature déterminée, transformables entre eux par des séries continues de transformation infinitésimales ou finies, des êtres plus complexes susceptibles des mêmes transformations, chacun desquels est constitué par l'ensemble obtenu en soumettant l'un quelconque des premiers à une succession continue de transformations infinitésimales de la famille envisagée. Cette méthode, qui transpose dans le domaine géométrique le procédé par lequel S. Lie engendre un groupe continu au moyen de ses transformations infinitésimales est appliquée à divers exemples. Dans le cas où E est l'ensemble des courbes à torsion constante et ou les transformations auxquelles elles sont soumises sont les transformations spéciales de Bäcklund étudiées dans le mémoire (117), les êtres plus complexes auxquels il vient d'être fait allusion sont, suivant les cas, les surfaces pseudosphèriques (dont la théorie reçoit ainsi une exposition nouvelle), ou une nouvelle famille de surfaces (Φ_1) d'un grand intérêt géométrique, généralisant les surfaces pseudosphériques, et admettant deux systèmes de courbes génératrices constitués l'un par des courbes à torsion constante et l'autre par des courbes de Bertrand.

Les résultats les plus importants du mémoire sont relatifs aux cas où E est, soit une famille de Lamé composée de surfaces pseudosphériques de rayon variable ou constant, soit un système oblique de Weingarten. L'étude du premier de ces deux cas met en jeu une famille de surfaces (Φ_2) douées de ∞^1 lignes géodésiques de Bertrand, géodésiques qui appartinnent ou non à la même famille de Bertrand suivant que les surfaces pseudosphériques de la famille de Lamé envisagée sont ou non de même rayon. Si E est un système oblique de Weingarten, les surfaces (Φ_2) sont remplacées par de nouvelles surfaces (Φ_3), jouissant entre autres, de la propriété caractéristique d'admettre deux familles distinctes de courbes de Bertrand génératrices telles que les *conjuguées* (de Bertrand) des courbes de ces deux familles issues d'un même point M de la surface aient le même plan osculateur aux points correspondant à M. L'application répétée du principe général exposé dans la préface aux surfaces du type général (Φ) envisagées comme éléments E conduit à des systèmes triples de surfaces se coupant mutuellement suivant leurs courbes de Bertrand génératrices, puis à des systèmes quadruples,... etc. de ces mêmes surfaces, la considération desquels conduit à un ensemble remarquable de propriétés géométriques, dont certaines ramènent, sous une forme renouvelée, aux configurations générales de Möbius étudiées dans le mémoire (117).

La plupart des autres travaux contenus dans l'ouvrage se rapportent à la théorie des transformations des surfaces à courbure totale constante ou sont étroitement liés à cette théorie, et tirent leur origine de la thèse d'habilitation (6) qui contient en germe une vaste partie de l'oeuvre géométrique de L. Bianchi. C'est dans cette thèse qu' apparait, pour la première fois la *transformation complémentaire*, faisant passer, par l'intermédiaire d'une famille de géodésiques tracées sur une surface quelconque S, de S à une autre surface S' constituant avec S les deux nappes focales d'une même congruence normale dont les rayons sont tangents aux lignes géodésiques de la famille envisagée. Cette oeuvre de jeunesse, justement célèbre, est comme une préfiguration de ce que devait être l'oeuvre entière. La transformation complémentaire y est appliquée aux surfaces pseudosphériques et aux hélicoïdes. On y trouve les premiers exemples de transformation d'une surface quelconque S à courbure totale constante négative en autant de surfaces que l'on veut, de même courbure totale que S et par suite applicables sur S, prélude à l'ensemble remarquable de travaux qui devaient aboutir à la théorie générale de la déformation des quadriques. Et l'application de la transformation complémentaire aux hélicoïdes amène l'auteur à la découverte, au sujet de ces surfaces, d'une foule de résultats géométriques, dont l'expositions se prolonge dans le mémoire (7), et qui révèlent à la fois une grande maitrise de calcul, un remarquable pouvoir d'interprétation, et la préoccupation constante d'éclairer les théories générales par les applications particulières les plus aptes à en faire saisir la véritable portée.

La note (11) met en évidence une différence essentielle de comportement vis-a-vis de la transformation complèmentaire, entre les surfaces à courbure totale constante négative et les surfaces à courbure totale constante positive. Pour les premières de ces surfaces il y a trois possibilités quant au choix de la famille de géodésiques à adopter comme base de la transformation. Ces géodésiques peuvent passer par un point fixe réel (à distance infinie ou finie) ou bien imaginaire, et les surfaces complémentaires correspondant à ces trois cas sont respectivement les surfaces applicables sur la pseudosphère et celles applicables sur les surfaces de révolution engendrées par la tractrice raccourcie ou allongée, étudiées dans le mémoire (6) ou son complément (9). Parmi les surfaces è courbure totale constante positive $\left(\frac{1}{R^2}\right)$ étudiées en (11) il n'y a lieu de considérer que les seules familles de géodésiques issues d'un point fixe réel de la surface, et l'on n'obtient ainsi qu'une seule classe de complémentaires, à savoir les déformées de la surface de révolution ayant pour méridienne le profil méridien de l'hélicoïde développable.

La publication (27) étend aux espaces à courbure constante de Riemann ou de Lobatchewsky les résultats d'un mémoire « Sur les systèmes simples de Weingarten » de l'espace euclidien, reproduit dans le vol. III des oeuvres de L. Bianchi. Ce travail débute par l'extension aux espace à courbure constante des formules classiques de la théorie de la courbure des surfaces de l'espace euclidien ordinaire, formules qui devaient être appelées à jouer un rôle tout à fait fondamental dans les recherches ultérieures sur les espaces à courbure constante, et grâce auxquelles L. Bianchi peut ici montrer que le célèbre théorème de Weingarten sur les développées des surfaces de l'espace ordinaire dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation fixe, conserve sa validité dans les nouveaux espaces. Cette dernière circonstance permet d'étendre la transformation complémentaire des surfaces pseudosphériques de l'espace ordinaire aux surfaces pseudosphériques des espaces à courbure constante, et d'obtenir, dans ces espaces, à partir d'une surface pseudosphérique, et moyennant de simples quadratures, de nouvelles surfaces pseudosphériques dépendant d'autant de constantes arbitraires que l'on veut. Il y a lieu cependant de noter que si la construction des surfaces complémentaires d'une surface pseudosphérique donnée est toujours réelle dans l'espace de Riemann, elle ne l'est, dans l'espace de Lobatchewsky, que si la courbure de la surface pseudosphérique envisagée est en valeur absolue supérieure à celle de l'espace. Les systémes triples orthogonaux de Weingarten objet de la présente étude admettent, comme dans le cas euclidien, une 1.ère famille de surfaces constituée par les complémentaires d'une même surface pseudosphérique Σ, et, comme dans le cas euclidien les trajectoires orthogonales de ces dernières surfaces sont des cercles tracés dans les différents plans tangents de Σ, ce qui révèle l'existence de systèmes cycliques dans les espaces à courbure constante. L'influence du signe de la courbure de l'espace se manifeste ici par le fait que, si cette courbure est positive, ou bien si étant négative elle ne dépasse pas en valeur absolue celle de la surface Σ, la forme de l'élément linéaire de l'espace rapporté au système triple orthogonal envisagé est la même que pour l'espace ordinaire, de sorte que tout système de Weingarten de l'espace ordinaire en donne un de l'espace à courbure constante, auquel les transformations complémentaire ou de Bäcklund des systèmes de Weingarten restent applicables tout comme dans l'espace ordinaire. Si la courbure de l'espace de Lobatchewsky dépasse en valeur absolue celle de la surface Σ, la forme de l'élément linéaire de l'espace rapporté au système de Weingarten dont Σ fait partie change et l'appui de la considération de l'espace euclidien ordinaire fait défaut; mais l'étude analytique de la question, montre que, même dans ce cas, d'un système de Weingarten connu on peut, par une succession illimitée de transformations complémentaires ou de Bäcklund, déduire une infinité de nouvaux systèmes de Weingarten dépendant d'autant de constantes arbitraires que l'on veut. Il existe d'ailleurs, tout comme dans l'espace ordinaire, des systèmes de Weingarten pour lesquels la courbure des surfaces de l'une des trois familles composantes, tout en étant constante, varie d'une surface à l'autre.

La notion de surfaces complémentaires intervient en (36) dans une note brève mais très élégante, où il est montré comment, de chaque couple de surfaces pseudosphériques complémentaires, on peut déduire une représentation équivalente (conservant les aires) de la sphère sur le plan.

La note (46) relative à la transformation de Bäcklund des surfaces pseudospériques marque un progrès d'importance capitale pour la suite des recherches de L. Bianchi sur le problème général de la deformation des quadriques, en même temps qu'il ouvre de prometteuses perspectives sur une foule d'autres questions touchant aux thèmes les plus variés de la géomètrie différentielle. C'est, comme il a été rappelé au début de cette analyse, dans cette note qu'apparait pour la première fois le célèbre théorème de permutabilité, théorème grâce auquel, dans la publication actuelle, L. Bianchi montre comment, dês que l'on connait les premières transformées complémentaires et de Bäcklund d'une surface pseudosphérique, on peut poursuivre indéfiniment l'application de la transformation de Bäcklund, de façon à obtenir par de simples calculs algébriques et de dérivation une suite illimitée de nouvelles surfaces pseudosphériques dépendant d'un nombre de constantes arbitraires aussi grand que l'on veut. Et la note (48) montre que les résultats obtenus sont valables, non seulement pour les surfaces pseudosphériques isolées, mais pour les systèmes triples othogonaux contenant une famille de surfaces pseudosphériques, l'application du théorème de permutabilité à l'un quelconque de ces systèmes (que les surfaces de la famille pseudosphérique constituante aient la même courbure ou non) permettant d'obtenir, dès les 1.ères transformations de Bäcklund effectuées, autant de systèmes triples de même nature que l'on veut, et cela sans aucune intégration.

Cette note (48) est complétée par plusieurs autres (71), (73), (74), et l'ensemble des résultats obtenus dans ces publications a préparé le grand mémoire (77) où est présentée de façon complète la théorie générale des transformations des surfaces à courbure totale constante. Dans ce mémoire, trop vaste pour se prêter à une analyse détaillée, L. Bianchi réalise l'unification des méthodes de transformation appliquées aux surfaces à courbure totale constante positive ou négative. Il montre que la différence des procédés initialement employés pour effectuer ces transformations suivant le signe de la courbure n'est pas essentielle, et, grâce à une opportune inversion des théorèmes de Guichard sur les quadriques de révolution, établit la possibilité de décomposer les transformations réelles de Bäcklund des surfaces à courbure totale constante (positive ou négative) en le produit de deux transformations de Bäcklund réelles ou non, le procédé s'étendant à la transformation des systèmes triples orthogonaux contenant une famille de surfaces à courbure totale constante positive ou négative. Pour les surfaces applicables sur la sphère L. Bianchi montre que les transformations envisagées sont permutables avec la transformation involutive d'Hazzidakis, et cela l'amène à déterminer tous les couples de surfaces conjuguées en déformation, c'est à dire se correspondant avec conservation des systèmes conjugués ordinaires et permanents, problème dont la résolution est ramenée (87) à celui de la détermination des couples de surfaces se correspondant par géodésiques et systèmes conjugués. La solution de ce dernier problème est fournie par les surfaces (du type de Liouville) applicables sur les surfaces de révolution, parmi lesquelles figurent, comme cas particulier, les couples de quadriques de révolution de Guichard. Et ce dernier résultat est l'origine d'une étude spécialement consacrée à la recherche de tous les couples de quadriques conjuguées en déformation, sujet qui fait l'objet de la note (90), dans laquelle il est établi, par une méthode élégante directe, extensible à l'espace euclidien à n dimension, que la solution est fournie par la transformation, par projectivité, d'un système quelconque de quadriques homofocales, les couples conjugués en déformation étant précisément ceux qui se correspondent dans les dites projectivités.

Les théorèmes de Guichard peuvent, de par leur nature, servir de base à une théorie de la transformation des surfaces minima. Une telle théorie ne saurait évidemment (vu la connaissance en termes finis de toutes les surfaces minima) présenter l'intérêt que présente le problème de la transformation des surfaces à courbure totale constante. Certains de ses aspects n'en sont pas moins fort remarquables du point de vue géométrique, tel par exemple le lien qui existe entre le problème de la déformation du paraboloïde de révolution et les congruences de Thybaut à nappes focales minima étudié dans la note (75).

Les notes restantes traitent de sujets particuliers, en marge des recherches générales dont il vient d'être question mais s'y rattachant de façon plus ou moins directe. La note (56) étend aux congruences W générales le théorème de permutabilité établi pour les congruences pseudosphériques réalisant les transformations de Bäcklund des surfaces à courbure totale constante négative, et applique le résultat obtenu aux congruences W particulières (généralisant les congruences pseudosphériques) dont les deux nappes focales ont même courbure totale aux points correspondants. Ces dernières surfaces (dites de Bianchi) sont caractérisées par l'expression $K = -[\varphi(u) + \psi(v)]^{-2}$ de leur courbure totale, u et v étant les paramètrès asymptotiques; elles jouent un rôle important en géométrie différentielle, et pour elles, tout comme pour les surfaces pseudosphériques, le théorème de permutabilité permet, une fois les premières transformées asymptotiques de l'une de ces surfaces obtenues, d'en déduire une infinité d'autres dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres, et cela au moyen de seuls calculs algébriques et de dérivation.

L'étude des surfaces de Bianchi est poursuivie dans les notes (136) et (137), à la faveur d'une nouvelle notion des équations intrinsèques d'une surface quelconque, consistant à individualiser la surface la plus générale par la donnée de deux asymptotiques de systèmes différents et par l'expression de la courbure totale en fonction des paramètres u, v des asymptotiques. De nombreux résultats géométriques peuvent être rattachés à la nouvelle conception des équations intrinsèques d'une surface, en particulier une méthode de transformation, développée en (137), des surfaces admettant un système de lignes asymptotiques à torsion constante.

Le volume se termine par deux notes (163) et (184) relatives respectivement à des classes de surfaces ou de couples de surfaces définis par des propriétés déterminées des lignes de courbure des surfaces constituantes. La note (163) étudie les surfaces admettant pour réseaux de courbure des réseaux (de Guichard-Darboux) qui, pris pour réseaux coordonnés (u. v) et moyennant un choix convenable des paramètres u, v, donnent au ds^2 la forme $ds^2 = H_1 du^2 + H_2 dv^2$, H_1 et H_2 vérifiant la relation $H_1{}^2 \pm H_2{}^2 =$ $=$ const. Ces surfaces comme aussi les hypersurfaces qui les généralisent dans l'espace auclidien S_{n+1} [d'élément linéaire $ds^2 = \Sigma\varepsilon_i H_i{}^2 du_i{}^2$, avec $\Sigma\varepsilon_i H_i{}^2 = c$, $\varepsilon_i = \pm 1$, les u_i étant les paramètres des lignes de courbure], peuvent être caractérisées par des propriétés remarquables de leur représentation sphérique, et sont susceptibles d'être transformées par la méthode de Ribaucour (faisant passer de l'une des deux nappes d'une enveloppe de sphères à l'autre avec conservation des lignes de courbure) en ∞^4 au ∞^{2n} nouvelles surfaces ou hypersurfaces de la même classe (même relation $\Sigma\varepsilon_i H_i{}^2 = c$) suivant qu'il s'agit de surfaces de l'espace ordinaire ou d'hypersurfaces de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions.

Les couples de surfaces dont il est question plus haut, étudiées en (184) sont formés de surfaces, dites à ligne de courbure *associées*, se correspondant ponctuellement avec correspondance des lignes de courbure (u_1, u_2), leurs ds^2 respectifs étant $ds^2 = H_1 du_1{}^2 + H_2 du_2{}^2$, $ds'^2 = H'_1{}^2 du_1{}^2 + H'_2{}^2 du_2{}^2$, les rotations $\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}$ de la première étant égales aux rotations $\beta'_{ki} = \frac{1}{H'_k}\frac{\partial H'_i}{\partial u_k}$ (permutation des rotations). Ces surfaces jouent un rôle important dans divers travaux de C. Guichard et G. Darboux. Les rotations étant les mêmes pour une surface quelconque et son image sphérique, la recherche des couples envisagés revient à celle des couples analogues tracés sur une sphère unitaire (éléments sphériques associés), et L. Bianchi établit, pour les éléments sphériques associés, l'existence d'une transformation, associant à tout couple de tels éléments ∞^4 nouveaux couples analogues, et tributaire d'un théorème de permutabilité, redonnant comme cas particulier le théorème de permutabilité des transformations de Bäcklund des surfaces pseudosphériques.

PAUL VINCENSINI

La disputa Leibniz-Newton sull'Analisi, « Enciclopedia di autori classici diretta da Giorgio Colli, 2 ». Scelta da documenti degli anni 1672-1716, traduzione e note di Gianfranco Cantelli. pp. 239, Torino, Boringhieri, 1958, L. 1200.

Le fondamentali scoperte di Newton e di Leibniz sul calcolo differenziale e integrale dettero luogo, come è notissimo, ad una celebre polemica, che, per dirlo con le parole di Guido Castelnuovo, « se getta delle ombre su Leibniz, non mette nella miglior luce la figura di Newton il quale, senza mai comparire, contribuì notoriamente a raccogliere ed aggravare le accuse contro il rivale, a cui non aveva risparmiato elogi nei primi scritti » (CASTELNUOVO: *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Bologna, Zanichelli, v. p. 97).

La polemica affondava le sue radici lontano nel tempo. Comunque, nel 1711 Leibniz scrisse a Hans Sloane segretario della Royal Society protestando contro affermazioni di Keill pubblicate nelle Philosophical Transactions; Sloane trasmise a Leibniz una replica altezzosa di Keill, e Leibniz si rivolse nuovamente a Sloane affermando che non a lui stesso spettava difendere la propria buona fede, alla sua età, e dopo tutte le prove che ne aveva date nella sua vita, e chiamando in causa lo stesso Newton (« Itaque vestrae eaquitati committo, annon coercendae sint vanae et injustae vociferationes, quas ipsi Newtono, Viro insigni et gestorum optime conscio, improbari arbitror; ejusque sententiae suae libenter daturum Indicia mihi persuadeo »). Interviene allora la Royal Society nominando una Commissione incaricata di esaminare tutti i documenti e le lettere in proprio possesso e di far conoscere il proprio parere. La Commissione sentenziò (il 24 aprile 1712) favorevolmente a Newton, nè importa qui esaminare le cause. La breve Sentenza ed i materiali che erano stati utilizzati furono pubblicati nel *Commercium epistolicum*, uscito a Londra nel 1712, e in seconda edizione — con varie aggiunte, tra cui la « Recensio libri qui inscriptus est Commercium epistolicum... », anonima ma di mano di Newton, e con parecchie varianti — nel 1722.

Dopo la prima edizione, Leibniz avrebbe desiderato di pubblicare per parte sua un altro Commercium epistolicum, ma ne fu impedito dalla morte sopravvenuta nel 1716. Nel 1856 uscì a Parigi una nuova edizione, curata da Biot e Lefort, che riproduce le due precedenti, notandone le varianti, e contiene inoltre altri documenti, che sopperiscono forse a quelli che a suo tempo avrebbe potuto pubblicare Leibniz.

Il volumetto testè pubblicato contiene, in una fluente traduzione italiana, i principali documenti atti a illuminare la questione, tratti in parte dal Commercium epistolicum (edizione di Biot et Lefort), in parte dalla raccolta degli Scritti matematici di Leibniz, in parte da altre fonti.

Se qualche modestissimo e sporadico appunto si può muovere alla bella e benvenuta pubblicazione, esso però forse riguarda la scelta stessa del titolo (che nella chiusa può apparire un poco fiacco), e l'eccessiva sobrietà delle parole introduttive e delle note. Se per esempio il Cantelli avesse citati i *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis* e *Zur Keimesgeschichte der Leibnizschen Differentialrechnung* di D. MAHNKE, quella « curiosità più immediata — quasi pettegola, sia pure ad un alto livello — di sapere cioè chi dei due, Newton o Leibniz, avesse in definitiva ragione », rimasta insoddisfatta nel Cantelli, avrebbe forse potuto guidare il lettore alla ricerca di altri elementi di giudizio.

Comunque, il pregio dell'opera non si esaurisce nell'aver posto tra le mani del lettore un'ampia raccolta di documenti atti ad illuminare la polemica, considerata sia come conflitto tra persone, sia — dice bene il Cantelli — come riflesso di una più ampia rivalità tra inglesi e continentali. L'avvicinamento agli scritti dei grandi, per il lettore sensibile a questo genere di emozioni, è fonte di vero godimento. Come esempi, in queste lettere, basti citare l'affiorare della descrizione del modo in cui un risultato è stato intravisto per la prima volta, o di particolari autobiografici (« ma l'epidemia di peste » scrive Newton a Oldenburg nel 1676 « mi costrinse a quel tempo a fuggir via di qua e a pensare ad altre cose »), o la presenza di passi che ci presentano un grande scienziato in veste non togata (« mi vergogno di dire a quante figure applicai questi calcoli, libero come ero da altri impegni. Allora mi compiacevo troppo di queste ricerche »).

All'editore Boringhieri va tributata ampia e incondizionata lode per l'opera da lui coraggiosamente svolta per la diffusione della cultura.

ALESSANDRO TERRACINI

W. I. SMIRNOW, *Lehrgang der höheren Mathematik*, Teil IV, - mit. 20 Abbildungen; (Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958) XII + 708.

Sulla traduzione in lingua tedesca della I e II parte del terzo volume del grande trattato russo di matematiche superiori di W. I. Smirnow il collega Guido Zappa ed io abbiamo già riferito in questo Bollettino ((3), 11 (1956), pp. 290-292).

Esce ora la traduzione della seconda edizione del quarto volume, pubblicato in URSS nel 1951, contenente quattro ampi capitoli dedicati rispettivamente alle equazioni integrali, al calcolo delle variazioni, alla teoria generale delle equazioni alle derivate parziali, e ai problemi al contorno.

La trattazione conserva le solite caratteristiche: ogni argomento è perfettamente delineato nei suoi sviluppi fino ai più recenti, i risultati di importanza fondamentale sono posti in giusto risalto, e ai giovani studiosi vien data la possibilità di passare alla lettura delle memorie specializzate pertinenti ai vari capitoli.

Ci limitiamo in questa breve recensione a segnalare alcuni argomenti che entrano forse per la prima volta in un trattato generale: le equazioni integrali con nucleo di Cauchy nel primo capitolo; il problema dell'estremo assoluto nel secondo capitolo; il metodo di Sobolev per le equazioni di tipo parabolico nel terzo capitolo; nel quarto il procedimento di Ritz per il calcolo delle autofunzioni e degli autovalori per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, il metodo delle funzioni soprarmoniche e delle funzioni sottarmoniche per la risoluzione del problema di Dirichlet per le equazioni di tipo ellittico; l'impiego delle funzioni superparaboliche e sottoparaboliche per l'equazione del calore.

Gli indici dei vari capitoli, quello della materia e molte indicazioni bibliografiche completano, così come nei precedenti, questo volume frutto della mirabile operosità del celebre trattatista di Leningrado.

GIOVANNI SANSONE

Lecţii de Statistică Matematică, O. ONICESCU e G. MIHOC, 730 pag., Editura Tehnica, 1958, Bucarest.

« Lezioni di Statistica Matematica » di O. Onicescu e G. Mihoc si aggiunge alle numerose Opere di matematica pubblicate recentemente nella Repubblica Popolare Romena. Questo libro è il primo pubblicato in questo campo, benchè il calcolo delle probabilità e la statistica matematica costituiscano un indirizzo assai coltivato fra i matematici romeni.

Gli AA. suppongono note le nozioni del calcolo delle probabilità e rinviano per dettagli al libro « Calculul probabilitaţ si aplicaţii » di O. Onicescu, G. Mihoc e Ionescu Tulcea, Bucareşti, 1955.

Il volume è diviso in tre parti e contiene ventitre capitoli. La prima parte contiene tredici capitoli e tratta le distribuzioni statistiche unidimensionali, momenti, valori tipici usuali (la media aritmetica, mediana, quartile, il modulo, intervallo di variazione, ecc.). Si passa poi allo studio di ripartizione bidimensionale e multidimensionale. Gli altri capitoli sono dedicati alle ripartizioni classiche normali, binomiali, multinomiali, ipergeometrica, Poisson, binomiali con esponente negativo, Pearson, Student, ecc., dandosi per ogni funzione di ripartizione le caratteristiche corrispondenti.

Nel capitolo X dedicato alla ripartizione di Poisson, si studia in modo esauriente la ripartizione di eventi rari e le diverse generalizzazioni assegnate da G. Mihoc in legame con le probabilità limite di una catena di Marcov.

La seconda parte (cap. XII - XV) è rivolta alla teoria della selezione e vi si espongono i principi del metodo di selezione, il problema di estimazione corretta e assolutamente corretta e le caratteristiche di selezione.

Si passa poi alla selezione di una collettività normale trattando la ripartizione di momento centrato di selezione di secondo ordine e la ripartizione di rapporto tra la deviazione media di selezione specialmente per il caso di una ripartizione normale multidimensionale.

Il problema di sondaggio con una fase inseguita determina l'estimazione della media di una popolazione statistica con il metodo di selezione. Sono esposti il metodo di sondaggio per la repartizione infinita, i sondaggi di una collettività finita, il sondaggio semplice e quello stratificato semplice.

L'ultimo capitolo di questa parte si occupa del problema di sondaggio con una sola caratteristica e con più caratteristiche. Nella terza parte (cap. XVI - XXIII) sono esposte in primo luogo la teoria di estimazione per le famiglie di distribuzioni con un parametro e con più parametri, applicandola poi alle famiglie di distribuzioni classiche (Bernoulli, Poisson, la legge dei grandi numeri; la ripartizione normale, Cauchy, ecc).

Il problema di intervalli di confidenza è abbordato nel capitolo XIX.

Il capitolo XX intitolato « Teoria di estimazione per le variabili dipendenti » contiene quasi esclusivamente i risultati degli autori. Per una buona comprensione del problema di estimazione, sono esposte prima di tutto alcune proprietà di catene con legami completi (nozione introdotta dagli autori stessi nella Nota « Sur les chaines à liaisons complètes », C.R. t. 200 Paris 1935) e di catene di Marcov. Si deduce poi la legge limite di somme di variabili aleatorie formando una catena Marcov continua semplice e costante $x_1+x_2+..+x_n-n\theta$, θ essendo una costante, valutando poi i momenti del primo e del secondo ordine. Questo problema è stato considerato dagli autori nel lavoro « Les chaînes de variables aléatoires-problèmes asymptotiques », 1943, Académie Roumaine, Études et Recherches, XIV).

Dal comportamento asintotico della funzione caratteristica si ottiene in certe condizioni la legge normale per la legge ridotta della variabile somma $x_1+x_2+..+x_n$.

I risultati ottenuti sono validi anche per una catena di Marcov finita semplice e costante, e si esamina più particolarmente questo caso. In questo modo si precisano le relazioni funzionali tra le funzioni caratteristiche corrispondenti come anche i loro valori.

Si studiano poi le radici dell'equazione caratteristica e si mettono in evidenza le matrici scomponibili e inscomponibili. Si valutano i momenti dei primi due ordini e le leggi limite ridotte per un insieme finito. Si estendono queste considerazioni alle somme di vettori incatenati. Si passa poi alle funzioni di estimazione efficienti per le catene di Marcov con due stati e con un solo parametro di stima e anche il caso di una catena di Marcov con più parametri. Poi si considera il problema di verosimiglianza massima con applicazioni alle catene con legami completi. Il capitolo finisce con qualche osservazione sopra un caso di estimazione di Chartier (« L'estimation statistique dans le cas d'observations non indépendantes » tesi presentata all'Istituto di Statistica dell'Università di Parigi, 1947). Il metodo di lavoro che predomina in questo capitolo è il metodo della funzione caratteristica suggerita dagli autori.

Il capitolo XXI è dedicato ai diversi metodi di estimazione delle funzioni di ripartizione. Si danno prima i diversi teoremi di convergenza di frequenza verso la probabilità e poi si studia la convergenza della funzione di ripartizione empirica verso la funzione di ripartizione della variabile considerata e poi qualche teorema generale di limite. Si considerano poi diversi tipi di funzioni di frequenza e il confronto di due funzioni di frequenza.

Il penultimo capitolo si riferisce alla statistica di ordine per le variabili esponenziali e omogenee nonchè le applicazioni della statistica di ordine. Sono dati i risultati ottenuti in questa direzione da S. Gheorghiu.

L'ultimo capitolo si occupa del problema della verifica delle ipotesi, che presenta un interesse speciale per le applicazioni pratiche.

Si considera prima il modo di verifica delle ipotesi, gli errori di prima e di seconda specie e poi si passa alla potenza di un test, esaminando il caso di un parametro unico, che prende due valori.

Come risulta dalla prefazione del libro, un nuovo volume consacrato esclusivamente alle applicazioni della statistica matematica deve seguire questo importante lavoro.

Essendo scritto in lingua romena, il libro può essere facilmente acces sibile a chi conosce una lingua neolatina e non c'è dubbio che la lettura del libro sarà interessante per un grande numero di lettori.

G. G. VRANCEANU

H. REICHARDT, *Vorlesungen über Vector-und Tensorrechnung.* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957, pp. XI + 499, D. M. 41,20).

La presentazione dei concetti e degli algoritmi è molto generale ed astratta, conforme alle vedute ed alla trattazione di N. Bourbaki per quel che concerne la parte algebrica, ispirata alla classica concezione gruppale di Klein per il resto.

Dopo una breve introduzione geometrica, viene dato il concetto di vettore, per mezzo di un insieme di assiomi, e quello di spazio vettoriale; viene poi sviluppata l'algebra vettoriale affine, del piano, dello spazio tridimensionale e di quello n-dimensionale, con applicazioni alla geometria.

Le nozioni metriche sono volutamente ritardate perchè sia messo in evidenza tutto ciò che dalla metrica è indipendente. Tale è ad esempio il principio di dualità; esso viene infatti stabilito prima della introduzione della metrica vettoriale e basato sul concetto di « covettore » e di spazio duale di uno spazio vettoriale. Di questo principio verrà fatto largo uso anche nel seguito, lungo tutto il trattato. Dopo l'introduzione della metrica vettoriale, vengono sviluppate le nozioni con essa collegate e ne vengono fatte applicazioni nello spazio euclideo di punti.

Segue l'analisi vettoriale ordinaria, con applicazioni geometriche e cinematiche e teoremi sopra la trasformazione di integrali. Alcune applicazioni, qui e nel seguito, formano oggetto di esercizi, sviluppati o proposti.

Si passa poi a questioni più generali, trattando degli spazi vettoriali (a un numero finito di dimensioni) sopra « corpi » non commutativi e sopra « corpi » commutativi, delle forme plurilineari alternanti, dei multivettori, dei sistemi di equazioni lineari, e infine della metrica degli spazi vettorali generali. Vengono poi studiati gli spazi lineari di punti e, in particolare, gli spazi affini, euclidei, proiettivi.

Si introducono in seguito i tensori e gli spazi tensoriali, partendo dal prodotto « libero » o tensoriale di vettori e spazi vettoriali e viene sviluppata l'algebra tensoriale. Si passa poi alla metrica degli spazi tensoriali mediante l'introduzione di un tensore fondamentale, e infine all'analisi tensoriale, sviluppandola anche in coordinate curvilinee per spazi affini o euclidei.

Un capitolo è dedicato alle varietà differenziabili (affini nell'infinitesimo) e alla differenziazione esterna; un altro capitolo agli spazi a connessione affine e al trasporto lineare, e infine l'ultimo capitolo agli spazi riemanniani a metrica definita o indefinita.

Chiude il volume una bella « Appendice » sopra gli spazi funzionali e le equazioni integrali.

Il trattato è pregevole per gli argomenti esposti e per le vedute moderne e generali cui si ispira. D'altra parte, la voluta generalità ed astrattezza dell'esposizione e il simbolismo serrato ne rendono in qualche punto un po' faticosa la lettura. Forse sarebbe stato desiderabile che i casi particolari e gli esempi, che pure non mancano, avessero sistematicamente preceduto il caso generale, così da renderne più agevole la concezione.

MARIA PASTORI

R. GOUYON, *Le problème de Mécanique rationnelle à l'agrégation*, Librairie Vuibert, Paris, 1954; pag. 253, prezzo fr. 2000 + T.L..

È una raccolta dei temi di concorso per l'« agrégation » relativi al ventennio 1932-1952, molto utile per chi, dopo un primo studio della Meccanica razionale, voglia perfezionarsi nella medesima affrontando problemi d'una certa elevatezza.

La raccolta è preceduta da quattro note. La prima di esse riguarda la teoria delle equazioni di Lagrange, esposta facendo intervenire il lavoro di tutte le forze in giuoco; la seconda nota riguarda le generalizzazioni del teorema del momento della quantità di moto.

La terza nota è dedicata alla teoria degli urti con attrito e la quarta alla stessa teoria dal punto di vista dell'uso delle equazioni di Lagrange.

ANTONIO PIGNEDOLI

H. WEYL, *Selecta*, Birkhäuser Verlag, Basel e Stuttgart, 1956, pp. 592, con fotografia dell'Autore.

Questo volume è stato edito a cura del Politecnico di Zurigo e dell'Institute for Advanced Study di Princeton per onorare l'illustre Scienziato in occasione del suo 70° compleanno, a cui, purtroppo, a distanza di pochi giorni, è seguita la sua scomparsa.

Il criterio di scelta dei 19 lavori raccolti è basato sul desiderio di mettere in luce la profondità dell'Autore in molti rami della matematica.

Segue l'elenco dei 16 libri e delle 159 pubblicazioni che costituiscono l'opera completa di H. Weyl.

RENATO NARDINI

H. ARZELIÈS, *La Cinématique relativiste*, Paris, Gauhtier-Villars, 1955, vol. in 8° di pag. 228 con 57 fig. nel testo, prezzo fr. 2500.

L'opera, la quale preannuncia già il volume seguente dedicato, dallo stesso autore, alla Dinamica relativistica, consta di dieci capitoli. È preceduta da una lucida prefazione ed è seguita da tre appendici. I primi quattro capitoli costituiscono la prima parte del volume, consistente in una introduzione generale alla Fisica relativistica (misura delle lunghezze, dei tempi, scelta dei sistemi di riferimento, struttura delle teorie fisiche).

La seconda parte dell'opera è più propriamente dedicata alla Cinematica relativistica (trasformazione di Lorentz-Eintein e sue principali conseguenze) e si conclude con una trattazione dell'Universo di Minkowski.

Caratteri fondamentali del volume, di indubbio interesse, sono: la semplicità dei mezzi matematici, la costante attenzione alle questioni di misura, il deliberato proposito di ridurre le difficoltà rappresentate dalle impostazioni quadridimensionali, lo spiccato senso fisico.

ANTONIO PIGNEDOLI

H. ARZELIÈS, *La Dynamique relativiste et ses applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1957, vol. in 8° di 304 pagg, con 77 fig. nel testo, fascicolo I (senza indicazione di prezzo).

Quello che potremmo chiamare, con linguaggio musicale, il « leit-motiv » o « grund-motiv » dell'opera è la considerazione della Meccanica come scienza fondamentale. L'Autore asserva appunto che, verso la fine del XIX secolo, le teorie costruite allo scopo di interpretare la variazione della massa con la velocità (osservata nei raggi catodici) avevano scosso la concezione essenziale meccanicistica dell'Universo imperante in Fisica, accrescendo via via dell'importanza delle leggi dell'Elettromagnetismo, non fino al punto da assorbire in esso la Meccanica ma certo in modo tale da dare ad esso una costruzione del tutto autonoma.

Nel suo volume, l'Autore riprende la via classica e ciò gli è, naturalmente consentito dalla sostituzione della Dinamica newtoniana con quella einsteiniana. Come Egli dichiara, gli appare più corretto e più comodo, dal punto di vista epistemologico, nonchè più fisicamente significativo, partire da postulati meccanici molto semplici, e ridurre ad essi l'Elettromagnetismo, piuttosto che porre le equazioni di Maxwell, molto più complesse e contenenti dei concetti riducibili.

L'Elettromagnetismo viene così dedotto dall'autore come applicazione della Meccanica relativistica alle leggi dell'Elettrostatica. E le stesse equazioni di Maxwell finiscono per delinearsi come equazioni meccaniche. Altro carattere essenziale del libro è l'osservazione che esistono effetti relativisticamente importanti non solo alle alte velocità od a seguito, o, meglio, in corrispondenza di misure di alta precisione; ma anche per velocità basse (considerazioni del primo ordine in $\beta = v/c$); e la enucleazione netta e limpida del concetto che il banco di prova più notevole della Relatività risiede nelle inter-azioni fra cariche elettriche in movimento; le considerevoli forze che agiscono nelle dinamo e nei motori sono, invero, effetti relativistici.

L'opera consta di due parti: la prima, dedicata alla Dinamica del punto lentamente accelerato, è costituita da dieci capitoli, nei quali l'Autore, prendendo le mosse dalla esposizione delle equazioni fondamentali, e dopo aver esaminato la trasformazione relativistica delle principali grandezze della Meccanica, passa alla Dinamica del punto nell'universo di Minkowski, per dedicarsi poi ad una analisi dei campi di forza derivanti da un potenziale scalare e di quelli derivanti da un potenziale scalare e da un potenziale vettore, indi ai metodi variazionali e concludere, infine, con una discussione sul concetto di forza e su quello di massa.

La seconda parte dell'opera consta di quattro capitoli ed è dedicata all'inter-azione fra particelle newtoniane in moto uniforme ed all'Elettrodinamica di Maxwell-Lorentz.

Mentre i primi tre capitoli di tale seconda parte del libro trattano, rispettivamente, dell'inter-azione fra due cariche debolmente accelerate, del campo elettromagnetico di una particella carica in modo uniforme e delle correnti elettriche e dei magneti permanenti, l'ultimo capitolo è dedicato alle equazioni generali del campo elettromagnetico di Maxwell-Lorentz nel vuoto.

Seguono quattro appendici, con valori numerici, citazioni bibliografiche particolarmente utili al lettore e chiarificazioni sul linguaggio usato nell'opera.

L'opera stessa, che integra la Cinematica relativistica dello stesso autore e che prevede altri fascicoli connessi con gli sviluppi più recenti e con le applicazioni più interessanti, è scritta in termini matematici snelli e nella tensione e ricerca continua di quella limpida semplicità che costituisce valido mezzo per la comprensione dei fenomeni fisici e dei corpi di dottrina ad essi legati.

ANTONIO PIGNEDOLI

E. KRÖNER, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Ergebnisse der angewandten Mathematik, N° 5, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958, con 39 fig. e pp. VII + 179, DM 32.

È un'importante monografia nella quale è esposta la recentissima teoria sorta dal concetto che le dislocazioni, causa di deformazioni plastiche e sorgenti elementari di autotensioni, quando si presentano in numero grandissimo, si prestano ad essere studiate con i metodi relativi ai mezzi continui.

Dopo un'introduzione in cui si espongono la genesi storica e l'interesse teorico del concetto di dislocazione, seguono cinque capitoli che, nell'ordine, trattano i seguenti argomenti: I. e II. Dislocazioni nei continui: geometria; statica. III. Dislocazioni nei cristalli. IV. Geometria non riemanniana delle dislocazioni. V. Applicazioni.

Segue infine un'ampia bibliografia.

RENATO NARDINI

GEORGES HEILBRONN, *Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach*, Mémorial des Sciences Mathématiques, CXXIX, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

Il fascicolo contiene una esposizione del « metodo di integrazione logica » di Drach per equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine (*) $f(x, y, p, q, r, s, t) = 0$ [Cfr. per es. Drach, Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par l'usage explicite des caractéristiques d'Ampère, Bologna, 1928]. Si tratta di una generalizzazione del metodo classico ideato da Ampère per ottenere l'integrale generale della equazione (*), la cui idea fondamentale consiste nell'introduzione sistematica delle variabili caratteristiche della (*).

L'A. ritiene che la difficoltà di lettura delle memorie originali di Drach sia la sola ragione che ha impedito alla teoria di raggiungere la notorietà che essa merita e di dar luogo ai risultati di cui è capace. Da ciò la ragione del lavoro dell'A. il quale per conferma porta anche alcuni suoi contributi alla teoria stessa, esposti qui nel cap. IV. Si può tuttavia osservare che l'attuale indirizzo assunto dallo studio delle equazioni differenziali a derivate parziali non sembra conforme allo spirito ed ai fini del metodo esposto.

Dei quattro capitoli dell'opera il primo è dedicato a nozioni generali introduttive sulla equazione (*) riguardanti in particolare le sue curve caratteristiche ed i suoi invarianti ed involuzioni del primo e secondo ordine. Nel cap. II è esposto il metodo di Drach, con speciale riguardo al caso in cui la (*) ammetta caratteristiche del primo ordine (equazione di Monge-Ampère, equazioni lineari ecc.) ed alla equazione $f(r, s, t) = 0$. I capp. III e IV trattano infine della equazione $s = f(x, y, z, p, q)$ nonchè delle equazioni $s = f(x, y, z, p, q, r)$ ammettenti un invariante del secondo ordine.

LAMBERTO CATTABRIGA

Seminaire "HENRY CARTAN", 9e année: 1956-57, *Quelques questions de topologie*, Ecole Normale Supérieure, Paris (1958) 73 p.

Si tratta del nono dei famosi seminari intestati a Henry Cartan, e da lui diretti, che hanno avuto inizio nel 1948 e di cui i più famosi ed i più citati sono i primi tre. Mentre però questi ultimi hanno avuto il carattere peculiare di un vasto giro di orizzonte sulla situazione, in quell'epoca, della topologia algebrica, il presente ha invece un carattere più modesto e saltuario e si interessa di argomenti, sempre di topologia algebrica, più che altro dedicati agli specialisti in materia.

Sono riportati soltanto sei resoconti di conferenze (o gruppi di conferenze) tenute a Parigi nell'anno 1956-57. Inoltre si accenna all'esistenza di due resoconti (di Godement) ivi non stampati, poichè mai furono redatti, mentre di quelli riportati ben due si riferiscono a conferenze che « non hanno mai avuto luogo » (testuale).

I resoconti stampati sono:

tre di H. CARTAN, rispettivamente su: « La teoria di Kan », « Il funtore Hom (X, Y) nella teoria simpliciale » e « Teoria dei fibrati principali »;

uno di A. GROTHENDIECK, su: « I fasci algebrici e i fasci analitici coerenti »;

uno di A. HAEFLICHER su: « Le singolarità delle applicazioni differenziabili »;

e infine uno in collaborazione di HAEFLICHER e KOSINSKI su: « Un teorema di Thom sulle singolarità delle applicazioni differenziabili ».

Ritengo inutile entrare, almeno in questa sede, nei dettagli piuttosto difficili ed elevati dei suddetti resoconti, limitandomi invece alla seguente « perla »: nella scarna bibliografia del primo resoconto vengono citati, con disinvoltura, alcuni « papiers secrets » di Kan. Ritengo ciò un indice sintomatico di come si svolge e si sviluppa la ricerca matematica in Francia, almeno per quel che riguarda la topologia algebrica.

MICHELANGELO VACCARO

B. NOBLE, *Methods based on the Wiener-Hopf tecnique for the solution of partial differential equations*, « International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics », Pergamon Press, London 1958, pp. X+246, 65s.

Il presente volume è un'amplia ed aggiornatissima esposizione di quanto è stato fatto con il cosiddetto metodo di Wiener-Hopf nel campo della risoluzione di certi problemi al contorno per equazioni a derivate parziali di tipo ellittico.

L'equazione integrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\infty K(x-y)\, \varphi(y)\, dy = 0, \qquad 0 < x < \infty,$$

che Wiener e Hopf studiarono nel 1931 e che solo molti anni più tardi si rivelò importantissima in alcune questioni di acustica, idrodinamica ed elettromagnetismo, si tratta, com'è noto, con una tecnica speciale che consiste nell'« *algebrizzare* » l'equazione integrale per mezzo della trasformazione di Fourier nel campo complesso.

In gran parte del volume del Noble si abbandona la via classica, cioè quella di passare dal dato problema al contorno all'equazione integrale e di applicare successivamente la trasformazione di Fourier, ma si ricorre invece ad un procedimento recente, dovuto a D. S. Jones, col quale l'algebrizzazione è ottenuta direttamente mediante applicazione della trasformazione all'equazione a derivate parziali. Questo metodo appare più semplice del primo almeno nel caso di condizioni al contorno di tipo particolare. Vi sono però nel volume sufficienti riferimenti al metodo delle equazioni integrali da permettere al lettore di seguire agevolmente la letteratura.

Il volume è composto di 6 capitoli dei quali il primo è dedicato a quei complementi di teoria delle funzioni analitiche che in generale non vengono svolti negli ordinari corsi universitari, ed a famigliarizzare il lettore con l'uso della trasformazione di Fourier nel campo complesso. Nel capitolo secondo si espongono i vari metodi « alla Wiener-Hopf » di risoluzione dell'equazione delle onde $\Delta_2\Phi + K^2\Phi = 0$ nel semipiano $\infty < x < \infty, y \geq 0$.

Nel terzo si risolvono particolari problemi al contorno sempre per l'equazione delle onde. Le generalizzazioni e le limitazioni del metodo di Wiener-Hopf-Jones sono trattate nel quarto capitolo, i metodi approssimati nel quinto. Il sesto capitolo è infine dedicato alla risoluzione dell'equazione integrale di Wiener-Hopf. Ogni capitolo è corredato da una utilissima raccolta di esercizi e di risultati.

Tutta la struttura della Monografia è organicamente sistemata e la ricca bibliografia ne aumenta il pregio. Ottima la veste tipografica che è quella solita della collezione cui il volume appartiene.

LUIGI GATTESCHI