
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ELISA GRANDORI GUAGENTI

Un'osservazione sull'attrito dinamico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 14
(1959), n.2, p. 142–150.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_142_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Un'osservazione sull'attrito dinamico.

Nota di ELISA GRANDORI GUAGENTI (a Milano)

Sunto. - *Si osserva che per un corpo in movimento la forza, dovuta allo attrito, che si oppone allo spostamento in una direzione, dipende dall'atto di moto e si precisa tale dipendenza.*

Summary. - *It is noted that, for a moving body, the value of the frictional force opposing resistance to the displacement in a given direction, is connected with the velocity, and this relationship is precised in some cases.*

1. È certamente noto come si spinga più facilmente una lucidatrice quando le spazzole sono in movimento anzichè quando non lo sono. Questo fatto trova spiegazione nella seguente osservazione, molto semplice, ma della quale non ho trovato traccia in sistematici studi sull'attrito dinamico ⁽¹⁾.

Un punto materiale di peso P si muova su di un piano orizzontale scabro con coefficiente d'attrito dinamico f , supposto al solito costante; e percorra il cammino rettilineo da un punto A ad un punto B del piano. Esso incontra una resistenza R_0 opposta alla velocità, in modulo data da

$$\bar{R}_0 = fP$$

e tale resistenza è naturalmente costante.

Se il punto percorre un cammino non rettilineo, che va da A a B , esso incontra una resistenza sempre di modulo R_0 , opposta alla velocità e quindi non diretta come $B \rightarrow A$: appunto per questo la resistenza nella direzione della retta AB è minore della resi-

(1) G. A. MAGGI, *Sull'attrito, in rapporto colla cinetostatica e colla classificazione dei vincoli*, «Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano», vol. V (193.), pag. 79 pag. 86.

E. DANIELE, *Sulla teoria meccanica dell'attrito*, «Nuovo Cimento», Serie V, vol. VII, febr. 1904.

E. DANIELE, *L'attrito nel movimento di un solido a contatto con un piano*, «Nuovo cimento», Serie V, vol IX, marzo 1905.

P. PAINLEVÉ, *Cours de mécanique*, Paris, 1930.

P. PAINLEVÉ, *Leçons sur le frottement*, Paris, Heilmann, 1895.

O. SESINI, *Meccanica applicata alle macchine*, Milano, 1945, Vol. II.

G. HAMEL, *Theoretische Mechanik*. Berlin, 1949.

P. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, Paris, 1926, Vol. I - Vol. II.

stenza incontrata nel moto rettilineo; inoltre tale resistenza, il cui modulo indichiamo con R_0 , non è costante ma dipende dalla velocità; più precisamente dipende non dal modulo della velocità, ma dalla sua direzione, cioè da quanto ci si scosta dall'andamento rettilineo.

Infatti se nel piano si prende una coppia di assi ortogonali x, y con l'asse x volto da A verso B e si indicano con v_x, v_y le componenti della velocità secondo tali assi, si ha

$$R_0 = fP \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}},$$

cioè, posto $c = \frac{v_y}{v_x}$,

$$R_0 = fP \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}.$$

È appunto $R_0 < \bar{R}_0$ e dipendente da c , cioè dalla velocità.

Se anziché considerare un punto materiale si considera un corpo rigido, il calcolo di R_0 diviene un po' laborioso; si può inoltre completare la discussione con qualche osservazione sul comportamento del momento resistente.

Svolgerò la discussione riferendomi allo schema che rappresenta una spazzola della lucidatrice (*).

2. Si consideri per semplicità un anello omogeneo di raggio r che si muova di moto traslatorio su di un piano orizzontale scabro con velocità di traslazione v_0 ; e indichiamo sempre con f il coefficiente d'attrito dinamico. La resistenza che si oppone all'anello risulta ovviamente

$$R = -fP \frac{v_0}{v_0}$$

dove P rappresenta il peso dell'anello. Se si introduce il peso specifico dell'anello p e si pone

$$F^* = \frac{R}{frp} \quad (*)$$

(2) Una lucidatrice consta ordinariamente di due o tre spazzole rotanti in modo che sia nullo il momento rispetto ad un suo punto invariabile.

(3) L'asterisco sta ad indicare che si tratta di un parametro adimensionale.

risulta

$$F^* = 2\pi.$$

Anzi ch  far traslare l'anello, lo si ponga ora in rotazione attorno all'asse verticale baricentrale. Sia ω il vettore velocit  angolare. Le forze dovute all'attrito si riducono in tal caso ad una coppia di momento

$$M = -rfP \frac{\omega}{\omega}$$

e ponendo

$$M^* = \frac{M}{r^2fp}, \quad M^* = 2\pi.$$

Anche in tal caso il momento di attrito non dipende dalla velocit .

Facciamo infine muovere l'anello, sempre sul piano orizzontale, di moto rototraslatorio con velocit  di ogni punto pari alla somma delle due precedenti. Si trova in tal caso, come per il punto materiale, che il risultante delle forze d'attrito nella direzione di v_0 ed il momento (per esempio rispetto al centro O) di tali forze dipendono dalla velocit  pur essendo costante il coefficiente d'attrito f ; precisamente si trova che risultante e momento delle forze d'attrito

1) dipendono solo dal rapporto tra velocit  di traslazione e velocit  di rotazione;

2) sono sempre rispettivamente minori della resistenza d'attrito nel moto traslatorio e del momento d'attrito nel moto rotatorio;

3) sono fra loro legati da una semplice relazione.

La resistenza d'attrito in un generico istante   data da

$$R = - \int_0^{2\pi} frp \frac{v}{v} dx$$

dove v   la velocit  di un generico punto Q dell'anello che   data da

$$v = v_0 + \omega \wedge (Q - O),$$

α rappresenta l'angolo che il vettore $Q-O$ forma con v_0 . Diciamo R_0 il modulo della componente di R secondo v_0 , R_n il modulo della componente di R ad essa normale; si ha

$$R_n = \int_0^{2\pi} frp \frac{\omega r \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 r^2 - 2v_0 \omega r \sin \alpha}} dx = 0$$

ci  non ci sono resistenze dovute all'attrito nella direzione normale alla traslazione nel piano dell'anello.

Per la componente R_0 si ha invece, ponendo

$$F^* = \frac{R}{frp} \quad \text{e} \quad c = \frac{v_0}{\omega r},$$

$$(1) \quad F^* = \int_0^{2\pi} \frac{c - \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 + c^2 - 2c \operatorname{sen} \alpha}} d\alpha = F^*(c).$$

Analogamente per il momento d'attrito si trova

$$(2) \quad M^* = \int_0^{2\pi} \frac{1 - c \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 + c^2 - 2c \operatorname{sen} \alpha}} d\alpha = M^*(c)$$

dove

$$M^* = \frac{M}{fr^2p}.$$

L'andamento di F^* e di M^* al variare di c si possono mettere in luce mediante la (1) e la (2) prima di passare alla valutazione degli integrali ellittici in esse contenuti.

Per $c = 1$ cioè per $v_0 = \omega r$ gli integrali (1) e (2) coincidono e non sono ellittici; si ha semplicemente, ponendo $\alpha = \frac{\pi}{2} + \delta$,

$$F^* = M^* = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen} \alpha}}{2} d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left| \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \right| d\delta = 4.$$

Per $c \neq 1$ il denominatore delle (1) e (2) non si annulla certamente mai. Infatti

$$1 + c^2 > 2c \quad \text{per} \quad c \neq 1$$

e quindi a fortiori

$$1 + c^2 > 2c \operatorname{sen} \alpha.$$

Le funzioni integrande della (1) e (2) sono pertanto finite e continue. Fissiamo ora l'attenzione sulla (1). Per quanto detto vale la relazione

$$\lim_{c \rightarrow c_1} F^*(c) = \int_0^{2\pi} \lim_{c \rightarrow c_1} \frac{c - \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 + c^2 - 2c \operatorname{sen} \alpha}} d\alpha.$$

Si ha pertanto che

$$\lim_{c \rightarrow 0} F^* = 0, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} F^* = 2\pi.$$

Queste esprimono che per $c \rightarrow 0$, cioè per grande velocità di rotazione, F^* tende al valore nullo che le compete nel moto rotatorio; e che per $c \rightarrow \infty$, cioè per grande velocità di traslazione, F^* tende al valore 2π che le compete nel moto traslatorio. Inoltre mentre c varia da zero all'infinito, F^* è funzione crescente di c .

Infatti, essendo soddisfatte le condizioni per cui

$$\frac{d}{dc} F^* = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial c} \frac{c - \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 + c^2 - 2c \operatorname{sen} \alpha}} dx,$$

si ha

$$(3) \quad \frac{d}{dc} F^* = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{(1 + c^2 - 2c \operatorname{sen} \alpha)^3}} dx > 0.$$

Quindi nel moto rototraslatorio, per una data velocità di rotazione, la resistenza alla traslazione cresce con la velocità di traslazione stessa, ma si mantiene sempre minore della resistenza relativa al moto traslatorio; a tale valore limite si avvicina tanto più rapidamente quanto più ω è piccolo.

Si noti che per $c = 1$ l'integrale che compare nella (3) diviene infinito; pertanto il grafico della F^* in funzione di c ha tangente verticale per $c = 1$, e in tale punto per la (3) la curva presenta un flesso.

Per $c \neq 1$

$$\frac{d^2 F^*}{dc^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-3 \cos^2 \alpha (c - \operatorname{sen} \alpha)}{\sqrt{(1 + c^2 - 2c \operatorname{sen} \alpha)^5}} dx.$$

Per $c = 0$

$$\frac{d^2 F^*}{dc^2} = 0.$$

Per c piccolo rispetto all'unità

$$\frac{d^2 F^*}{dc^2} = \int_0^{2\pi} (-3c \cos^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha)(1 + 5c \operatorname{sen} \alpha) dx = \frac{3}{4} \pi c > 0.$$

Per $c > 1$ certamente

$$\frac{d^2 F^*}{dc^2} < 0.$$

Pertanto per $c=0$ c'è un altro flesso e non ce ne sono altri per $c > 1$.

Per potere meglio tracciare il diagramma della F^* valuto

$$\left(\frac{dF^*}{dc}\right)_{c=0} = \pi, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{dF^*}{dc} = 0.$$

L'andamento della F^* è pertanto quello rappresentato dalla fig. 1 (4).

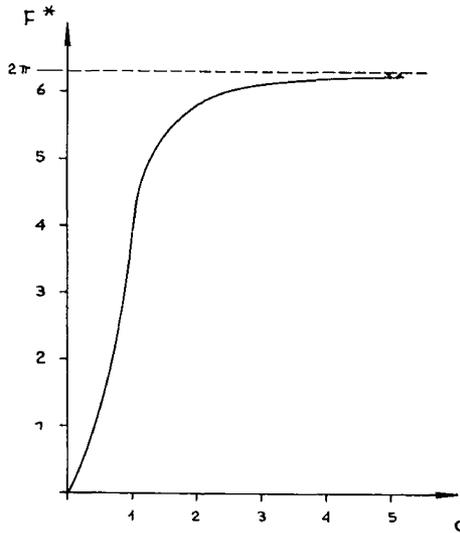


Fig. 1

Passiamo ora a studiare le proprietà di M^* . Notiamo subito che se nell'integrale (1) poniamo $\frac{1}{c}$ al posto di c otteniamo M^* e

(4) Si vede dalla fig. 1 che per una data velocità di rotazione, la forza d'attrito che si oppone alla traslazione è circa proporzionale alla velocità di traslazione, purchè ω sia abbastanza grande.

cioè F^* valutato in $\frac{1}{c}$ uguaglia M^* valutato in c

$$(4) \quad M^*(c) = F^*\left(\frac{1}{c}\right).$$

Si può constatare inoltre che

$$(5) \quad \frac{dM^*}{dc} = -c \frac{dF^*}{dc}$$

quindi M è funzione decrescente di c e precisamente

$$\lim_{c \rightarrow 0} M^* = 2\pi, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} M^* = 0.$$

Per $c \rightarrow 0$ e quindi per grande velocità di rotazione, M^* tende al valore 2π che gli compete nel moto rotatorio; per $c \rightarrow \infty$ e cioè per grande velocità di traslazione, M^* tende al valore zero che gli compete nel moto traslatorio.

Dalla (5) scende che anche M^* ha un flesso a tangente verticale quando c è uguale ad uno, mentre per $c \neq 1$ sempre dalla (5) si ha

$$\frac{d^2M^*}{dc^2} = -\left(\frac{dF^*}{dc} + c \frac{d^2F^*}{dc^2}\right).$$

Quindi per $0 \leq c < 1$

$$\frac{d^2M^*}{dc^2} < 0;$$

mentre per $c > 1$, poichè

$$\frac{d^2M^*}{dc^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha (2c^2 - c \sin \alpha - 1)}{\sqrt{(1 + c^2 - 2c \sin \alpha)^5}} d\alpha,$$

è

$$\frac{d^2M^*}{dc^2} > 0.$$

Valuto inoltre

$$\left(\frac{dM^*}{dc}\right)_{c=0} = 0, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{dM^*}{dc} = 0.$$

L'andamento di M^* in funzione di c è dato pertanto dalla fig. 2

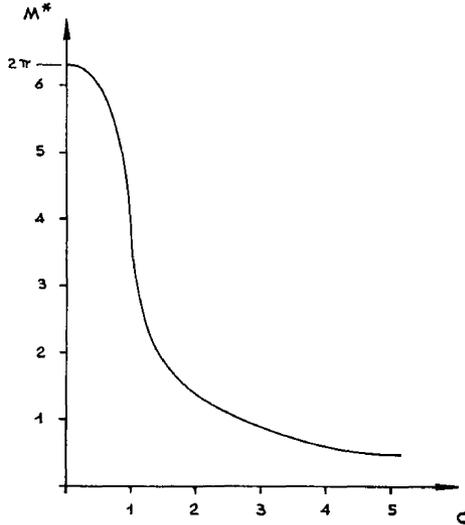


Fig. 2

Per ottenere invece le espressioni di F^* e di M^* in funzione di c , occorre valutare gli integrali che compaiono in (1) e (2) e che per $c \neq 1$ sono integrali ellittici. Poniamo

$$a = 1 + c^2$$

$$b = 2c$$

è, per $c \neq 1$, $a > b > 0$.

Il modulo degli integrali ellittici risulta essere in entrambi i casi

$$K = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}.$$

Valutiamo F^* :

$$\begin{aligned} F^* &= \int_0^{2\pi} \frac{c - \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{a - b \operatorname{sen} \alpha}} d\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c - \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{a - b \operatorname{sen} \alpha}} dx + \\ &+ 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{c - \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{a - b \operatorname{sen} \alpha}} dx = 2I_1 + 2I_2, \end{aligned}$$

con evidente significato di I_1 e I_2 .

Per mettere questi due integrali nella forma data dalle tavole,

eseguisco qualche trasformazione. Ponendo $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varpi$, il primo integrale diviene

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cd\varpi}{\sqrt{a - b \cos \varpi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varpi d\varpi}{\sqrt{a - b \cos \varpi}}.$$

Questi due integrali sono dati delle tavole ⁽⁵⁾; dopo alcune trasformazioni si giunge alla seguente forma in cui compaiono solo l'integrale ellittico incompleto di prima specie $F(\varphi, k)$ e l'integrale ellittico incompleto di seconda specie $E(\varphi, k)$

$$I_1 = \left(1 - \frac{1}{c}\right) F\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1+c}{\sqrt{2(1+c^2)}}, k\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{c}\right) E\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Ponendo invece $\alpha = \pi + \varpi$ il secondo integrale I_2 diviene, operando in modo analogo,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c + \operatorname{sen} \varpi}{\sqrt{a + b \operatorname{sen} \varpi}} d\varpi = \left(1 - \frac{1}{c}\right) F\left(\frac{\pi}{4}, k\right) + \left(1 + \frac{1}{c}\right) E\left(\frac{\pi}{4}, k\right).$$

Si ha dunque infine che

$$(6) \quad F^*(c) = 2 \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left[\frac{1}{2} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + E\left(\frac{\pi}{4}, k\right) \right] + \\ + 2 \left(1 - \frac{1}{c}\right) \left[F\left(\frac{\pi}{4}, k\right) + F\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1+c}{\sqrt{2(1+c^2)}}, k\right) \right]$$

e, tenendo conto della (3),

$$(7) \quad M^*(c) = 2(1+c) \left[\frac{1}{2} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + E\left(\frac{\pi}{4}, k\right) \right] + \\ + 2(1-c) \left[F\left(\frac{\pi}{4}, k\right) + F\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1+c}{\sqrt{2(1+c^2)}}, k\right) \right].$$

Poichè $F(\varphi, k)$ ed $E(\varphi, k)$ sono tabulate in funzione dei loro argomenti e quindi di c , le (6) e le (7) sono appunto le funzioni cercate che danno F^* ed M^* al variare di c .

⁽⁵⁾ Cfr. ad es. P. F. BYRD and M. D. FRIEDAM, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, pag. 172 e segg., Berlin, 1954.