Giuseppe Palamà

Su di una congettura di Schinzel.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.1, p. 82–94.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_1_82_0>

Su di una congettura di Schinzel.

Nota di Giuseppe Palamà (a Lecce)

Sunto. - *È contenuto nella breve introduzione che segue.*

W. Sierpiński, [I] (1), dice numeri A_s i numeri razionali relativi che sono somme algebriche di s unità frazionarie. Noi qui, con una lieve variante, adottiamo lo stesso simbolo A_s per indicare invece i numeri razionali positivi m/n che sono somme della forma

$$\frac{1}{x_1} \pm \frac{1}{x_2} \pm \ldots \pm \frac{1}{x_s}$$

ove gli x_i sono interi positivi ed i segni $+$ e $-$ possono essere scelti comunque. Se m/n si può rappresentare con una di tali somme. $-m/n$ si può esprimere con la somma opposta.

André Schinzel, [I], della scuola di Sierpiński, ha formulato l'ardita ipotesi che ogni numero *razionale positivo* m/n *con* n *maggiore di un certo intero* k_m, *dipendente da* m, *è un* A_3.

Tale congettura è stata verificata, [1], per ogni $m < 20$. Noi qui stabiliamo un teorema dal quale segue senz'altro che la congettura di Schinzel, se si prescinde dal valore di $k(m)$ che d'altronde, per gli m qui considerati, è facile determinare, è vera per ogni $m \leq 23$ e che dà un notevole contributo alla dimostrazione (che per *taluni* m *è veramente assai complicata*, come ha rilevato il Prof. Sierpiński) della congettura per un m qualsiasi, come si vedrà anche in altro successivo Lavoro.

1. Innanzi tutto diamo tutte le soluzioni in numeri naturali delle seguenti equazioni indeterminate

$$(1_1) \qquad m/n = 1/x_1 + 1/x_2; \qquad m/n = 1/x_1 - 1/x_2;$$

$$(2_1) \qquad \begin{cases} m/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3; \qquad m/n = 1/x_1 + 1/x_2 - 1/x_3; \\ m/n = 1/x_1 - 1/x_2 - 1/x_3. \end{cases}$$

I risultati relativi alla prima delle (1_1) e delle (2_1) sono noti, [2].

(1) I numeri tra parentesi quadre rimandano alla bibliografia riportata in fine.

2. Tenendo presente che nelle due equazioni (1_1) per $m=1$, deve esse rispettivamente $x_1=n\pm k$, k intero >0, si ha che tutte le soluzioni, se ne esistono, delle (1_1) sono date da

$$(1_2)\qquad x_1=(n\pm k)/m,\qquad x_2=(k'\pm n)/m,$$

con rispettivamente $k\leq k'$, $k<k'$, se, per k, k' interi positivi complementari di n^2, cioè se per

$$kk'=n^2;\qquad 1\leq k\leq n,\qquad 1\leq k<n$$

rispettivamente, i secondi membri delle (1_2) sono interi.

3. Con le formule della precedente Sez., poichè nella prima delle (2_1) per $m=1$ deve essere $x_1>n$, si ha facilmente che tutte le sue soluzioni sono date da

$$x_1=n+k,\qquad x_2=(nx_1+A)/k,\qquad x_3=(nx_1+B)/k,$$

quando k si fa variare nell'intervallo $(1, 2n)$; A, B (con $A\leq B$) si assumano uguali a due fattori interi positivi complementari di $n^2(n+k)^2$ purchè x_2, x_3 siano interi, cioè quando è

$$1\leq k\leq 2n,\qquad AB=n^2(n+k)^2,\qquad (A\leq B),$$

ed x_2, x_3 siano interi.

4. Se riteniamo $x_1>0$, a mezzo dei risultati della Sez. 2, tutte le soluzioni in numeri naturali della seconda delle (2_1) per $m=1$, se innanzi tutto è $x_1>n$, cioè se è

$$x_1=n+k,\qquad k \text{ intero} >0,$$

sono date da

$$x_1=n+k,\qquad x_2=(nx_1-A)/k,\qquad x_3=(B-nx_1)/k$$

per

$$0<A<B,\qquad AB=n^2(n+k)^2,$$

e k variabile nell'intervallo $(1, n)$, cioè per $1\leq k<n$, qualora x_2 e x_3 risultino interi.

Che sia lecito ritenere $k<n$ deriva dal fatto che in corrispondenza di ogni valore di x_1 soddisfaciente a $n<x_1<2n$ con il metodo esposto si hanno tutte le soluzioni della indicata equazione. Difatti se fosse $k\geq n$ e risultasse $n<x_2<2n$ si avrebbe una soluzione già trovata precedentemente; se nella stessa ipotesi $k\geq n$, risultasse invece $0 < x_2 < n$, si avrebbe una soluzione che si ottiene con l'altra ipotesi $x_1 < n$, cioè quando si suppone

$$x_1 = n - k, \qquad k \text{ intero positivo } < n;$$

ed allora

$$x_1 = n - k. \qquad x_2 = (nx_1 - A)/k, \qquad x_3 = (B - nx_1)/k$$

danno tutte le soluzioni di

$$1/n = 1/x_1 - 1/x_2 + 1/x_3,$$

se per

$$1 \leq k < n, \qquad 0 < A < B \qquad AB = n^2(n + k)^2,$$

x_2 e x_3 risultano interi. L'ipotesi $k > n$, in questo caso di $x_1 = n - k$, ci dà le soluzioni che si hanno nella successiva Sez.

5. In modo analogo si ha che tutte le soluzioni in numeri naturali della terza delle (2_1) per $m = 1$ sono date da

$$x_1 = n - k, \qquad x_2 = (nx_1 + A)/k, \qquad x_3 = (nx_1 + B)/k,$$

se x_2 e x_3 sono interi per

$$1 \leq k < n, \qquad 0 < A \leq B, \qquad AB = n^2(n - k)^2.$$

6. Mediante i risultati delle precedenti Sez. 3, 4, 5 si trovano tutte le soluzioni in numeri naturali delle (2_1), quando esistono. Si ha cioè:

a) Tutte le soluzioni in numeri naturali della prima delle (2_1) sono date da

$$x_1 = (n + k)/m, \qquad x_2 = (nx_1 + A')/k, \qquad x_3 = (nx_1 + B')/k,$$

se le x_i sono intere per

$$1 \leq k \leq 2n, \qquad A'B' = n^2 x_1^2, \qquad 0 < A' \leq B'.$$

b) Tutte le soluzioni in numeri naturali, se esistono, delle

$$m/n = 1/x_1 + 1/x_2 - 1/x_3, \qquad m/n = 1/x_1 - 1/x_2 + 1/x_3$$

sono date da

$$x_1 = (n + k)/m, \qquad x_2 = (nx_1 - A')/k, \qquad x_3 = (B' - nx_1)/k,$$

se tali frazioni sono intere per ogni k, A', B' definiti da

$$1 \leq k < n, \qquad A'B' = n^2 x_1^2; \qquad 0 < A' < B';$$

e da rispettivamente

$$x_1 = (n - k)/m, \qquad x_2 = (nx_1 - A')/k, \qquad x_3 = (B' - nx_1)/k$$

se questi valori di x_i sono interi, quando k, A', B' variano in modo che si abbia

$$1 \leq k < n, \qquad 0 < A' < B', \qquad A'B' = n^2 x_1^2.$$

c) Tutte le soluzioni in numeri naturali, se esistono, della terza delle (2_1) sono date da

$$x_1 = (n - k)\, m \qquad x_2 = (nx_1 + A')/k, \qquad x_3 = (nx_1 + B')/k,$$

con

$$1 \leq k < n, \qquad 0 < A' \leq B', \qquad A'B' = n^2 x_1^2,$$

se x_i sono interi.

7. I risultati della precedente Sez. si possono condensare nell'unico seguente

TEOREMA I. - *Tutte le soluzioni intere relative, (con* $x_1 > 0$*), della*

$$m/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3,$$

sono date da

$$(1_7) \qquad x_1 = (n \pm k)/m, \quad x_2 = (nx_1 \pm A')/(\pm k), \quad x_3 = (nx_1 \pm B')/(\pm k)$$

ove A', B' *sono fattori complementari concordi di* $n^2 x_1^2$*, cioè è*

$$A'B' = n^2 x_1^2$$

ed in cui se k *ha il segno* $+$*;* A' *e* B' *possono avere entrambi il segno* $+$ *od il segno* $-$*; ed analogamente se* k *ha il segno* $-$*; avendosi inoltre*

$$1 \leq k \leq 2n, \qquad \text{oppure} \qquad 1 \leq k < n,$$

a seconda che k, A' *e* B' *hanno il segno* $+$ *oppure no; con*

$$0 < |A'| < |B'| \qquad \text{oppure} \qquad 0 < A' \leq B'$$

a seconda che A', B' *hanno il segno* $-$ *o rispettivamente il segno* $+$*, purchè* x_i *siano interi.*

8. A mezzo del Teorema precedente si stabilisce agevolmente che non sono A_3 i seguenti numeri razionali:

$20/29$, $21/29$. $22/31$. $23/13$. $24/59$, $25/11$, $26/41$, $27/37$, $28/41$, $29/37$, $30/37$. $31/43$. $32/41$, $33/43$. $34/43$, $35/43$, $36/47$, $37/47$, $38/47$, $39/53$, $40/49$, $41/53$. $42/47$. $43/53$, $44/61$, $45/53$. $46/53$. $47/61$, $48/53$, $49/67$. $50/59$. $51/59$, $52/61$. $53/61$. $54/61$. $55/67$. $56/71$, $57/67$. $58/67$, $59/67$, $60/67$. $61/79$. $62/67$. $63/73$, $64/79$, $65/79$, $66/73$, $67/79$, $68/73$, $69/89$, $70/79$, $71/93$. $72/79$, $73/83$, $74/83$. $75/83$, $76/89$. $77/89$. $78/83$, $79/97$, $80/97$, $81/103$, $82/89$. $83/91$. $84/97$, $85/101$. $86/97$. $87/97$, $88/97$. $89/101$. $90/101$, $91/103$, $92/101$, $93/103$, $94/103$, $95/109$. $96/103$, $97/107$. $98/103$. $99/107$. $100/107$.

Pertanto i denominatori delle precedenti frazioni danno un limite inferiore di $k(m)$, per m uguale al rispettivo numeratore, cioè si ha

$$k(20) \geq 29, \quad k(21) \geq 29, \quad k(22) \geq 31, \ldots, \quad k(100) \geq 107.$$

Vanno notati i limiti inferiori troppo bassi di $k(m)$ per $m=23$. $m=25$.

Numerosi poi sono i numeri razionali m/n, con $m/n<3$ (evidentemente gli $m/n>3$ non possono essere A_3) e, per esempio $m<100$. che non sono A_3. Eccone alcuni: $21/13$, $24/31$, $32/37$. $37/42$, $40/47$. $52/59$. $67/59$, $72/67$, $88/83$. $92/97$. $93/101$. $94/101$, $99/101$.

9. Se nell'intento di dimostrare la verità della congettura di SCHINZEL attribuiamo al numeratore della frazione m/n i successivi numeri della serie naturale, e supponiamo di aver dimostrato tale verità per ogni intero minore di m, se poniamo

$$n = mh \pm r$$

ed a r si fa assumere ciascun valore intero e positivo $\leq \left[\frac{m-1}{2}\right]$, $(r, m)=1$, ove al solito (r, m) sta per il M. C. D. di r ed m (se fosse $(r, m) \neq 1$. la frazione m/n si ridurrebbe ad altra con i termini più piccoli già considerata precedentemente), e se infine poniamo

$$h = rh' + s, \quad \text{con} \quad 0 \leq s < r, \qquad (s, r) = 1$$

ed h' intero positivo od eventualmente nullo, si ha che per dimostrare la congettura di SCHINZEL occorre provare innanzi tutto che la frazione m/n, che assume la forma

$$\frac{m}{mrh' + sm \pm r},$$

quando ad r e ad s si fanno percorrere i valori indicati, è un A_3, esclusa al più qualche frazione m/n in cui il valore di n si ha con $h' = 0$.

Un contributo a quest'ultima dimostrazione si ottiene se applichiamo il Teor. I, considerando separatamente i due casi (le formule cui si perviene valgono qualunque siano (r, m) ed (s, r)):

$a)$ $n = mrh' + sm + r$;

$b)$ $n = mrh' + sm - r$

e si assume rispettivamente $k = \mp r$.

Difatti se

$a)$ $n = mrh' + sm + r, \qquad k = -r,$

dalle (1_7) si trae

$$x_1 = rh' + s,$$

$$x_2 = \frac{nx_1 + A'}{-r}, \qquad x_3 = \frac{nx_1 + B'}{-r},$$

con

$$A'B' = n^2 x_1^2$$

$$0 < |A'| < |B'|, \qquad \text{oppure} \qquad 0 < A' \leq B'$$

a seconda che A', B' sono entrambi negativi o entrambi positivi rispettivamente.

Ma in generale i valori che si possono attribuire ad A' sono

$$A' = \pm 1, \qquad \pm x_1, \qquad \pm x_1^2, \qquad nx_1, \qquad \pm n$$

ai quali corrispondono rispettivamente i seguenti valori di B':

$$B' = \pm n^2 x_1^2, \qquad \pm n^2 x_1, \qquad \pm n^2, \qquad nx_1. \qquad \pm nx_1^2.$$

Si ha così rispettivamente sostituendo nelle (I_9), se si pone

$$-(mh' + 1)x_1 - smh' = P,$$

$a_1)$ $\quad x_1 = rh' + s, \qquad x_2 = P - \dfrac{s^2 m \pm 1}{r}, \qquad x_3 = \pm nx_1 x_2,$

nelle quali si corrispondono fra loro i segni superiori e fra loro gli inferiori: cosa analoga accade nelle formule che seguono;

$a_2)$ $\quad x_1 = rh' + s, \qquad x_2 = P \mp h' - \dfrac{s(sm \pm 1)}{r}, \qquad x_3 = \pm nx_2:$

$a_3)\quad x_1=rh'+s,\quad x_2=P\mp h'x_1\mp sh'-\dfrac{s^2(m\pm1)}{r},\quad x_3=\pm nx_2/x_1;$

$a_4)\quad x_1=rh'+s,\quad x_2=x_3=2P-\dfrac{2s^2m}{r};$

$a_5)\quad x_1=rh'+s,\quad x_2=P\mp(mh'+1)-\dfrac{sm(s\pm1)}{r},\quad x_3=\pm x_1x_2.$

Le formule a_2) hanno interesse quando è $sm\pm1$ divisibile per r, posto allora

$$sm\pm1=rp,\qquad p \text{ intero,}$$

si ha

$a_2')\quad x_1=rh'+s,\quad x_2=-x_1(mh'+p+1),\quad x_3=\pm nx_2,$

essendo $\quad n=mx_1+r,\quad s>1,\quad h'=0,\ 1,\dots .$

Analogamente dalle formule a_3), a_4), a_5) si ha

a_3') per $m\pm1=rp$

$x_1=rh'+s,\quad x_2=-x_1(px_1+1),\quad x_3=\mp(px_1+1)n,\quad n=mx_1+r,$

$s=0,\ h'=1,\ 2,\dots;\quad s=1,\ 2,\dots,\ r-1,\ h'=0,\ 1,\ 2,\dots;$

a_4') per $m=rp$

$x_1=rh'+s,\quad x_2=x_3=-2x_1(px_1+1),\quad n=rpx_1\pm r,$

$h'=0,\ 1,\dots;$

a_5') quando si ha $s+1=r$ è

$x_1=rh'+r-1,\quad x_2=-n(h'+1),\quad x_3=x_1x_2,$

$n=mx_1+r,\quad h'=0,\ 1,\dots;$

a_5'') quando invece è $s=1$ si ha

$x_1=rh'+1,\quad x_2=-h'n,\quad x_3=-x_1x_2,$

$n=mx_1+r,\quad h'=1,\ 2,\dots .$

10. Analogamente nel caso

$b)\quad n=mrh'+sm-r,\qquad k=r,$

se si pone

$$(mh'-1)x_1+smh'=Q,$$

dalle (1_9) si ha

b_1) per $A' = \pm 1, \qquad B' = \pm n^2 x_1^2,$

$$x_1 = rh' + s, \qquad x_2 = Q + \frac{s^2 m \pm 1}{r}, \qquad x_3 = \pm n x_1 x_2;$$

b_2) per $A' = \pm x_1, \qquad B' = \pm n^2 x_1,$

$$x_1 = rh' + s, \qquad x_2 = Q \pm h' + \frac{s(sm \pm 1)}{r}, \qquad x_3 = \pm n x_2;$$

b_3) per $A' = \pm x_1^2, \qquad B' = \pm n^2,$

$$x_1 = rh' + s, \qquad x_2 = Q \pm h'(x_1 + s) + \frac{s^2(m \pm 1)}{r}, \qquad x_3 = \pm n x_2/x_1;$$

b_4) $A' = B' = n x_1,$

$$x_1 = rh' + s, \qquad x_2 = x_3 = 2Q + \frac{2s^2 m}{r};$$

b_5) $A' = \pm n, \qquad B' = \pm n x_1^2,$

$$x_1 = rh' + s, \qquad x_2 = Q \pm (mh' - 1) + \frac{sm(s \pm 1)}{r}, \qquad x_3 = \pm x_1 x_2.$$

Anche ora le formule b_2), b_3), b_4), b_5) danno luogo alle seguenti altre:

b_2') Se $sm \pm 1 = rp$, p intero,

$$x_1 = rh' + s, \qquad x_2 = x_1(mh' + p - 1), \qquad x_3 = \pm n x_2,$$
$$s = 2, 3, \ldots, \qquad n = m x_1 - r, \qquad h' = 0, 1, \ldots;$$

Il caso $s=1$ è considerato in b_5'');

b_3') Se $m \pm 1 = rp$, p intero

$$x_1 = rh' + s, \qquad x_2 = x_1(p x_1 - 1), \qquad x_3 = \pm (p x_1 - 1) n,$$
$$n = m x_1 - r, \quad s = 0, \quad h' = 1, 2, \ldots; \quad s = 1, \ \ldots, r - 1, \quad h' = 0, 1, \ldots;$$

b_4') Se $m = rp$

$$x_1 = rh' + s, \qquad x_2 = x_3 = 2x_1(p x_1 - 1), \qquad n = rp x_1 - r,$$
$$h' = 0, 1, \ldots;$$

b_5) Se $s + 1 = r$

$$x_1 = rh' + r - 1, \qquad x_2 = (h' + 1)n, \qquad x_3 = x_1 x_2,$$
$$n = m x_1 - r, \qquad h' = 0, 1, \ldots;$$

b_5'') Se $s = 1$

$$x_1 = rh' + 1, \qquad x_2 = h'n, \qquad x_3 = -x_1x_2, \qquad n = mx_1 - r.$$
$$h' = 1, 2, \dots .$$

11. Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA II. - *Posto* n $=$ mh $\pm$ r *la frazione*

$$m/n = \frac{m}{mh \pm r}$$

è un A_3, *per* r $= 1, 2, \dots, 10$, *qualunque sia* m, *primo o no con* r, *e, per ognuno degli* r *detti, per infiniti valori di* n.

Posto difatti $h = rh' + s$, ($h = 1, 2, \dots$ ed eventalmente anche $h' = 0$: $s = 0, 1, \dots, r-1$), con r ed s primi fra loro o no, risulta

$$n = rmh' + sm \pm r.$$

Ora $m/(rmh' + sm \pm r)$ è un A_3 per $s = 0, 1, r-1$, qualunque siano m ed r rispettivamente per le formule a_4), b_4); a_5''), b_5''); a_5'), b_5') delle precedenti Sez. 9 e 10. Pertanto il teorema è dimostrato se proviamo che esso è vero per $r = 4$, $s = 2$; $r = 5$, $s = 2, 3$; $r = 6$, $s = 2, 3, 4$; ...; $r = 10$, $s = 2, 3, \dots, 8$.

Ora se $r = 4$, $s = 2$ le formule a_4), b_4) danno soluzioni intere per $h' = 0, 1, \dots$.

Si noti poi che per m del tipo

$$rp, \ rp \mp 1, \qquad 2rp - r$$

qualunque siano gli interi r e p e per $s = 2, 3, \dots, r-2$, in ciascuno dei tre casi si hanno soluzioni e rispettivamente con le formule a_4'), b_4'); a_3'), b_3'); a_4), b_4) con $h' = 0, 1, \dots$.

Analogamente se $r = 2r' + 1$, $m = (2r' + 1)p \mp r'$ per $s = 2$, $s = 2r' - 1$ le formule a_2'), b_2') danno in entrambi i casi soluzione intera per $h' = 0, 1, \dots$.

Notato ciò si osservi che per $r = 5$, potendo m avere una delle seguenti forme $5p$, $5p \mp 1$, $5p \mp 2$ in ciascuno di questi casi per $s = 2$ ed $s = 3$ si ha soluzione intera per $h' = 0, 1, \dots$.

Se $r = 6$, poichè ci si può limitare a considerare i casi

$$m = 3p, \qquad m = 3p \pm 1$$

si ha in ognuno di essi soluzione intera con $h' = 0, 1, \dots$.

Se $r = 7$, per l'osservazione che precede si debbono esaminare soltanto i casi

$$m = 7p \pm 2, \qquad s = 2, 3, 4, 5; \qquad m = 7p \pm 3, \qquad s = 3, 4$$

in ciascuno dei quali con le nostre formule si ha soluzione intera, $h' = 0, 1, \dots$.

Se $r = 8$, i casi da esaminare sono

$$m = 8p \pm 2, \qquad 8p \pm 3$$

in ognuno dei quali con le nostre formule si ha pure soluzione intera, con $h' = 0, 1, \dots$.

Se $r = 9$ i casi da esaminare sono

$$m = 9p \pm 2, \qquad 9p \pm 3 \text{ per } s = 2, \dots, 7; \text{ e } m = 9p \pm 4 \text{ per } s = 3, \dots, 6$$

e in ciascuno di essi si ha soluzione intera con ogni $h' = 0, 1, \dots$.

Se $r = 10$, i casi da considerare si riducono a

$$m = 10p \pm 2, \qquad 10p \pm 3, \qquad 10p \pm 4 \text{ per } s = 2, \dots, 8,$$

in ciascuno dei quali si ha soluzione con $h' = 0, 1, \dots$.

Si noti però che in quest'ultimo caso di $r = 10$, quando è

$$s = 3, \qquad m = 10p \pm 2 \quad \text{ed} \quad m = 10p \pm 4:$$

$$s = 7, \qquad m = 10p \pm 2 \quad \text{ed} \quad m = 10p \pm 4,$$

si procede come nel seguente caso $s = 3$, $m = 10p \pm 4$. Poichè è

$$x_1 = 10h' + 3, \qquad n = (10p \pm 4)(10h' + 3) \pm 10,$$

si ha

$$m/n = \frac{10p \pm 4}{(10p \pm 4)(10h' + 3) \pm 10} = \frac{5p \pm 2}{(5p \pm 2)(5h_1 + 3) \pm 5}$$

avendo posto $h_1 = 2h'$. Ora l'ultima frazione della precedente è un A_3 come si desume dalle formule relative al caso $r = 5$, quando all'h' di quelle formule si attribuiscono valori pari $0, 2, 4, \dots$.

12. Un teorema analogo a quello della precedente Sez. sussiste anche per $r = 12, 14, 18$.

Premettiamo due osservazioni.

OSSERVAZIONE I. - (cui si è già accennato precedentemente) La frazione m/n con $n = mh \pm r$, $r \leq \left[\frac{m-1}{2}\right]$, sia tale che si abbia

$$(r, m) = d \neq 1,$$

posto $r = r'd$, $m = m'd$, $h = rh' + s$, $h' \geq 0$, la frazione m/n diventa

$$\frac{m'}{m'[r'(dh') + s] \pm r'}, \qquad m' < m,$$

ossia, se si pone ancora

$$s = s'r' + s'',$$

$$\frac{m'}{m'[r'(dh' + s') + s'']r' \pm}, \qquad h' \geq 0, \ s'' < r'$$

ed essa è un A_3 e le rispettive unità frazionarie ed il loro segno si determinano subito qualora si ammette di aver già fatto tale determinazione per ogni frazione con il numeratore minore di m ed $h' \geq 0$, con al più esclusa qualcuna di simili frazioni che si ottengono con $h' = 0$.

Osservazione II. – Se si è provato che

$$\frac{m}{m(rh' + s) \pm r}$$

è un A_3, per ogni $r = 1, \ldots, r_1 < r \leq \left[\frac{m-1}{2}\right]$, con le restrinzioni più volte dichiarate circa i valori di h', e se $(s, r) = D$ e si pone $s = s'D$, $r = r'D$, essendo però $(r, m) = 1$, la frazione m/n assume la forma

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{m}{m(r'h' + s') \pm r'}.$$

Ora essendo quest'ultima frazione un A_3 per le ipotesi fatte ed essendo $1/x_1$, $1/x_2$, $1/x_3$ le rispettive unità frazionarie, con x_1 intero positivo ed x_2, x_3 interi relativi, è anche un A_3 la frazione m/n e si ha

$$m/n = 1/Dx_1 + 1/Dx_2 + 1/Dx_3.$$

13. Teorema III. – *Se ogni frazione con il numeratore minore di* m *è un* A_3, *con* $h' \geq 0$ *(ad eccezione al più di qualcuna di tali frazioni che si ha con* $h' = 0$) *e se la stessa cosa si verifica per un dato* m *con ogni*

$$r < r_1 < \left[\frac{m-1}{2}\right],$$

allora

$$\frac{m}{m(rh' + s) \pm r},$$

($h' = 1, 2, \ldots$, *ed eventualmente anche* $h' = 0$) *è un* A_3 *per* $r = 12, 14, 18$.

Difatti se utilizziamo le due osservazioni precedenti e teniamo presente che il teorema è vero qualunque sia r per $s=0, 1, r-1$. basta limitarsi a provare il teorema soltanto per $r=12$, $s=5, 7$; $r=14$, $s=3, 5, 9, 11$; $r=18$, $s=5, 7, 11, 13$. Dimostriamo per esempio che il teorema sussiste per $r=14$, $s=3, 5, 9, 11$,; analoghe sono le dimostrazioni degli altri casi. Le forme possibili di m sono

$$14p,\quad 14p\pm1,\quad 14p\pm2,\quad 14p\pm3,\quad 14p\pm4,\quad 14p\pm5,\quad 14p\pm6,\quad 14p-7$$

per i primi due valori di m. per $m=14p-7$ e per m pari, si hanno subito soluzioni intere qualunque sia s; inoltre se

a) $m=14p\pm3$, $s=3, 5, 9, 11$ si hanno soluzioni intere a mezzo rispettivamente delle a_1), b_1); a_2'), b_2'); a_2'), b_2'); a_1), b_1);

b) $m=14p\pm5$, $s=3, 5, 9, 11$, soluzioni intere si hanno mediante rispettivamente le a_2'), b_2'); a_1), b_1); a_1), b_1); a_2'), b_2').

In tutti i casi detti di $r=12, 14, 18$ soluzioni intere si hanno per ogni $h'=0, 1, \dots$.

14. Per dimostrare la verità della congettura di Schinzel per $m=19, 20, 21, 22, 23$, basta determinare il corrispondente $k(m)$.

Ora essendo

$$(1_{14})\qquad n=m(rh'+s)\pm r,$$

a noi interessa per la determinazione di $k(m)$ il caso

$$h'=0, \qquad s=1.$$

Per tali valori di h' ed s la (1_{14}) diventa

$$(2_{14})\qquad n=m\pm r.$$

a) se $m=19$, per $r\leq\left[\dfrac{19-1}{2}\right]=9$,

dalla (2_{14}) si ha

$$10\leq n\leq 28.$$

Ora il Teor. I dà immediatamente soluzione per $n=12, 13, \dots, 28$; invece per $n=11$, si ha che 19/11 non è un A_3, quindi

$$k(19)=11.$$

In modo analogo si ottiene che

$b)$ $k(20) = 29$;
$c)$ $k(21) = 29$;
$d)$ $k(22) = 31$,
$e)$ $k(23) = 13$.

15. I teoremi dimostrati danno un notevole contributo alla dimostrazione della verità della congettura di SCHINZEL per altri valori di m.

Se per es. $24 \leq m \leq 37$, tenendo presente i teoremi precedenti, la congettura di SCHINZEL è dimostrata se proviamo soltanto che sono A_3 le frazioni che si hanno per ogni r ed s indicati a fianco di ciascun m, quando si sia determinato il corrispondente valore di $k(m)$:

$m = 24$, $r = 11$, $s = 2, 3, 8, 9$;
$m = 25$, $r = 11$, $s = 3, 5, 6, 8$;
$m = 26$ $r = 11$, $s = 2, 4, 7, 9$;
$m = 27$, $r = 11$, $s = 4, 5, 6, 7$;
$m = 28$, $r = 11$, $s = 4, 5, 6, 7$; $r = 13$, $s = 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11$;
$m = 29$, $r = 11$, $s = 2, 4, 7, 9$; $r = 13$, $s = 5, 6, 7, 8$;
$m = 30$, $r = 11$, $s = 3, 5, 6, 8$; $r = 13$, $s = 2, 5, 8, 11$;
$m = 31$, $r = 11$, $s = 2, 3, 8, 9$; $r = 13$, $s = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11$;
$m = 32$, $s = 13$, $s = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$; $r = 15$, $s = 2, 4, 11, 13$;
$m = 33$, $r = 13$, $s = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$;
$m = 34$, $r = 13$, $s = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11$;
$m = 35$, $r = 11$, $s = 2, 3, 8, 9$; $r = 13$, $s = 2, 5, 8, 11$;
$r = 16$, $s = 3, 7, 9, 13$;
$m = 36$, $r = 11$, $s = 3, 5, 6, 8$; $r = 13$, $s = 5, 6, 7, 8$;
$r = 17$, $s = 2, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 15$;
$m = 37$, $r = 11$, $s = 2, 4, 7, 9$; $r = 13$, $s = 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11$;
$r = 15$, $s = 4, 7, 8, 11$; $r = 16$ $s = 5, 7, 9, 11$;
$r = 17$, $s = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15$.

16. Il Teor. I consente di dare un ulteriore contributo alla questione che ci interessa, come si vedrà in altro succcessivo Lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. SIERPINSKI. *Sur les décompositions de nombres rationnels en fractions primaires*, « Mathesis », LXV, (1956), pp. 16-32;
[2] G. MIGNOSI. *Sulla equazione dell'Ottica*. « Rendiconti del Sem. della Facoltà di Sc. della Univ. di Cagliari ». Fasc. Ott.-Dicem. 1931.