Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Sulle trasformazioni che posseggono un gruppo di coppie di corrispondenze in sè. Nota III.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.1, p. 42–56.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_1_42_0>

Sulle trasformazioni che posseggono un gruppo di coppie di corrispondenze in sè.

Nota III (*) di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna)

Sunto. - *Questa Nota fa seguito a due altre, dallo stesso titolo, apparse in questo Bollettino.*

Summary. - *This paper continues two other works, with the same title, published in this Bulletin.*

§ 5.

16. In questo paragrafo si studiano anzitutto le *trasformazioni puntuali* che ammettono un gruppo *transitivo* di coppie d'omografie in sè. Nei nn. 20-21 si determinano poi le *trasformazioni dualistiche* in un piano proiettivo che sono mutate in sè da un gruppo di omografie. Tutti gli enti considerati s'intendono rappresentati a meno d'omografie.

In questo numero, e nel successivo, si considerano le trasformazioni puntuali fra piani distinti che ammettono un gruppo transitivo di coppie d'omografie in sè: cominciamo a considerare il caso in cui tale gruppo è composto da due gruppi abeliani.

Come si è già osservato, i gruppi abeliani ∞^2 sono tutti isomorfi fra di loro, e non sono isomorfi ad alcun altro gruppo di omografie; essi si ricavano dalla già citata tabella di W. F. MEYER, e sono:

$$(58)\quad \begin{cases} x = x' + \lambda \\ y = y' + \mu \end{cases} \qquad (59)\quad \begin{cases} x = e^{\lambda} x' \\ y = e^{\mu} y' \end{cases}$$

$$(60)\quad \begin{cases} x = e^{\lambda} x' \\ y = y' + \mu \end{cases} \qquad (61)\quad \begin{cases} x = x' + \lambda \\ y = y' + \lambda x' + \mu, \end{cases}$$

oltre al già citato gruppo (36), che però è intransitivo.

(*) La numerazione prosegue quella delle Note I (cfr. Boll. U. M. I. (3), **13**, 486 496) e II (in questo stesso fascicolo).

Indicando con λ, μ; λ_1, μ_1 i parametri relativi a due trasformazioni, e con λ_p, μ_p quelli del loro prodotto, si ha, per i primi tre gruppi:

$$\lambda_p = \lambda + \lambda_1 \qquad \mu_p = \mu + \mu_1 ,$$

e, per il gruppo (61)

$$\lambda_p = \lambda + \lambda_1 \qquad \mu_p = \lambda\lambda_1 + \mu + \mu_1 .$$

Posto, per quest'ultimo,

$$\tilde{\mu} = \mu - \frac{\lambda^2}{2} ,$$

si ha allora

$$\tilde{\mu}_p = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu} ;$$

rispetto ai parametri λ, $\tilde{\mu}$ la legge di composizione del gruppo (61) è perciò additiva. Le equazioni degli isomorfismi fra due gruppi del tipo (58), (59), (60) sono allora

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\lambda} &= a\lambda + b\mu \\ \bar{\mu} &= c\lambda + d\mu ; \end{aligned}\right. \tag{62}$$

se poi il gruppo g è del tipo (61), mentre il gruppo $\bar{g}$ è d'uno dei tre tipi precenti, l'isomorfismo è dato da

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\lambda} &= a\lambda + b\left(\mu - \frac{\lambda^2}{2}\right) \\ \bar{\mu} &= c\lambda + d\left(\mu - \frac{\lambda^2}{2}\right) , \end{aligned}\right. \tag{63}$$

mentre se entrambi i gruppi sono del tipo (61) si hanno le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\lambda} &= a\lambda + b\left(\mu - \frac{\lambda^2}{2}\right) \\ \bar{\mu} &= \frac{1}{2}\left[a\lambda + b\left(\mu - \frac{\lambda^2}{2}\right)\right]^2 + c\lambda + d\left(\mu - \frac{\lambda^2}{2}\right) . \end{aligned}\right. \tag{64}$$

Si hanno manifestamente dieci tipi di trasformazioni che sono mutate in sè da un gruppo di coppie d'omografie, costituenti due gruppi abeliani ∞^2; esse sono:

I. g e $\bar{g}$ sono del tipo (58):

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= ax + by \\ \bar{y} &= cx + dy. \end{aligned} \right. \tag{65}$$

II. g e $\bar{g}$ sono del tipo (59):

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= x^c y^b \\ \bar{y} &= x^c y^d. \end{aligned} \right. \tag{66}$$

III. g e $\bar{g}$ sono del tipo (60):

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= x^a e^{by} \\ \bar{y} &= c \lg x + dy. \end{aligned} \right. \tag{67}$$

IV. g e $\bar{g}$ sono del tipo (61):

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= ax + b\left(y - \frac{x^2}{2}\right) \\ \bar{y} &= \frac{1}{2}\left[ax + b\left(y - \frac{x^2}{2}\right)\right]^2 + cx + d\left(y - \frac{x^2}{2}\right). \end{aligned} \right. \tag{68}$$

V. g è del tipo (58), $\bar{g}$ del tipo (59):

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= e^{ax+by} \\ \bar{y} &= e^{cx+dy}. \end{aligned} \right. \tag{69}$$

VI. g è del tipo (58), $\bar{g}$ del tipo (60):

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= e^{ax+by} \\ \bar{y} &= cx + dy. \end{aligned} \right. \tag{70}$$

VII. g è del tipo (61), $\bar{g}$ del tipo (58):

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= ax + b\left(y - \frac{x^2}{2}\right) \\ \bar{y} &= cx + d\left(y - \frac{x^2}{2}\right). \end{aligned} \right. \tag{71}$$

VIII. g è del tipo (59), $\bar{g}$ del tipo (60):

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{x}=x^a y^b\\ \bar{y}=c\, lgx+d\, lgy.\end{array}\right. \tag{72}$$

IX. g è del tipo (61), $\bar{g}$ del tipo (59):

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{x}=e^{ax+b\left(y-\frac{x^2}{2}\right)}\\ \bar{y}=e^{cx+d\left(y-\frac{x^2}{2}\right)}\end{array}\right. \tag{73}$$

X. g è del tipo (61), $\bar{g}$ del tipo (60):

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{x}=e^{ax+b\left(y-\frac{x^2}{2}\right)}\\ \bar{y}=cx+d\left(y-\frac{x^2}{2}\right).\end{array}\right. \tag{74}$$

Si constata infine facilmente che non esistono gruppi abeliani d'omografie piane a $k(\geq 3)$ parametri [22].

17. Passiamo ora ai gruppi non abeliani ∞^2; essi sono tutti isomorfi:

$$x=x'+\lambda, \qquad y=e^{\lambda}y'+\mu \tag{75}$$

$$x=e^{\lambda}x', \qquad y=\mu x'+y'+\lambda \tag{76}$$

$$x=\lambda x', \qquad y=\lambda^{\alpha}y'+\mu x' \tag{77}$$

$$x=\lambda x', \qquad y=\lambda y'+\mu \tag{78}$$

$$x=\lambda^2 x'+2\lambda\mu y'+\mu^2, \qquad y=\lambda y'+\mu, \tag{79}$$

oltre al già citato gruppo intransitivo (35).

[22] Ciò può dedursi dalla già citata tabella di W. F. MEYER, come pure dalle ricerche di JORDAN sui gruppi abeliani (cfr. C. JORDAN, *Groupes abéliens généraux dans les groupes linéaires à moins de sept variables*. « Journ. de Math. » (6) 3, 213-266 (1907)).

I primi tre si scriveranno più convenientemente così:

$$(75') \qquad x = x' + lg\lambda \qquad y = \lambda y' + \mu$$

$$(76') \qquad x = \frac{x'}{\lambda} \qquad y = \frac{\mu}{\lambda} x' + y' - lg\lambda$$

$$(77') \qquad x = \lambda^{\beta} x' \qquad y = \lambda y' + \mu \qquad \left(\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$$

così che la legge di composizione risulta per tutti e cinque quella del gruppo delle sostituzioni lineari intere, e gli isomorfismi fra i gruppi (75'), (76'), (77'), (78), (79) sono

$$\bar{\lambda} = \lambda \qquad \bar{\mu} = a\mu + b\lambda - b.$$

Il gruppo (78) si presenta come un caso particolare di (77').

Si hanno così dieci tipi di trasformazioni con un gruppo non abeliano d'omografie in sè:

I. g e $\bar{g}$ sono del tipo (75'):

$$(80) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = ay + be^{x} - b. \end{cases}$$

II. g e $\bar{g}$ sono del tipo (76'):

$$(81) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = (1 - a) lgx + ay - bx - b. \end{cases}$$

III. g e $\bar{g}$ sono del tipo (77'):

$$(82) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = ay + bx^{\frac{1}{\beta}} - b. \end{cases}$$

IV. g e $\bar{g}$ sono del tipo (79):

$$(83) \qquad \begin{cases} \bar{x} = (x - y^2) + (ay + b\sqrt{x - y^2} - b)^2 \\ \bar{y} = ay + b\sqrt{x - y^2} - b. \end{cases}$$

V. g è del tipo (75′), $\bar{g}$ del tipo (76′):

$$(84) \qquad \begin{cases} \bar{x} = e^{-x} \\ \bar{y} = aye^{-x} + b - be^{-x} - x. \end{cases}$$

VI. g è del tipo (77′), $\bar{g}$ del tipo (75′):

$$(85) \qquad \begin{cases} \bar{x} = lgx^{\frac{1}{\beta}} \\ \bar{y} = ay + bx^{\frac{1}{\beta}} - b. \end{cases}$$

VII. g è del tipo (79), $\bar{g}$ del tipo (75′):

$$(86) \qquad \begin{cases} \bar{x} = lg\sqrt{x - y^2} \\ \bar{y} = ay + b\sqrt{x - y^2} - b. \end{cases}$$

VIII. g è del tipo (76′), $\bar{g}$ del tipo (77′):

$$(87) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x^{-\beta} \\ \bar{y} = \frac{a}{x}(y - lgx) + \frac{b}{x} - b. \end{cases}$$

IX. g è del tipo (79), $\bar{g}$ del tipo (76′):

$$(88) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x - y^2}} \\ \bar{y} = \dfrac{ay + b\sqrt{x - y^2} - b}{\sqrt{x - y^2}} - lg\sqrt{x - y^2}. \end{cases}$$

X. g è del tipo (79), $\bar{g}$ del tipo (77′):

$$(89) \qquad \begin{cases} \bar{x} = (x - y^2)^{\frac{\beta}{2}} \\ \bar{y} = ay + b\sqrt{x - y^2} - b. \end{cases}$$

Tralascio per brevità la ricerca delle trasformazioni con due gruppi ∞^k $(k \geq 3)$ di omografie, che si possono trovare, senza difficoltà, fra i tipi precedenti.

18. Si possono pure trovare le trasformazioni fra piani sovrapposti che ammettono un gruppo g transitivo di omografie in sè. I gruppi (59), (60) si scriveranno, per semplicità, nella forma:

$$x = \lambda x' \qquad y = \mu y' \tag{59'}$$

$$x = \lambda x' \qquad y = y' + \mu. \tag{69'}$$

Si hanno così nove tipi di trasformazioni fra piani sovrapposti che ammettono un gruppo ∞^2 d'omografie in sè:

I. g è del tipo (58):

$$\begin{cases} \bar{x} = x + p \\ \bar{y} = y + q \end{cases} \tag{90}$$

il gruppo (58) è perciò autoreciproco.

II. g è del tipo (59'):

$$\begin{cases} \bar{x} = px \\ \bar{y} = qy. \end{cases} \tag{91}$$

Anche il gruppo (59') è autoreciproco.

III. g è del tipo (60'):

$$\begin{cases} \bar{x} = px \\ \bar{y} = y + q. \end{cases} \tag{92}$$

Anche tale gruppo è autoreciproco.

IV. g è del tipo (61):

$$\begin{cases} \bar{x} = x + p \\ \bar{y} = px + y + q. \end{cases} \tag{93}$$

Anche tale gruppo è autoreciproco ([23]).

([23]) Sfruttando le considerazioni di L. Bianchi (op. cit. in (5), § 104) si trova che *il gruppo delle trasformazioni che mutano in sè un gruppo ad* r *parametri, non semplicemente transitivo, possiede meno di* r *parame-*

V. g è del tipo (75):

(94)
$$\begin{cases} \bar{x} = x + p \\ \bar{y} = qe^{x} + y \end{cases}$$

VI. g è del tipo (76):

(95)
$$\begin{cases} \bar{x} = px \\ \bar{y} = (1 - p)\, lg\, x + py + q. \end{cases}$$

VII. g è del tipo (77):

(96)
$$\begin{cases} \bar{x} = px \\ \bar{y} = qx^{\gamma} + py. \end{cases}$$

VIII. g è del tipo (78):

(97)
$$\begin{cases} \bar{x} = px \\ \bar{y} = qx + y. \end{cases}$$

IX. g è del tipo (79):

(98)
$$\begin{cases} \bar{x} = p(x - y^2) + 2qy\sqrt{x - y^2} + y^2 \\ \bar{y} = q\sqrt{x - y^2} + y. \end{cases}$$

19. Passiamo ora a considerare i gruppi ∞^3:

I tipo:

(99)
$$x = x' + \lambda \qquad y = \nu x' + e^{\gamma} y' + \mu.$$

tri. Dai risultati del § 106 si deduce che *un gruppo semplicemente transitivo è autoreciproco se e solo se è abeliano;* è poi noto (cfr. op. cit., § 104) che il gruppo che muta in sè un gruppo intransitivo è infinito. Se ne conclude che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo sia autoreciproco è che sia semplicemente transitivo e abeliano,
risultato dal quale si possono ricavare le (90)-(93).

Esso ammette il sottogruppo (75), il quale muta in sè le (94); applicando a queste le (99), si ha

$$\begin{cases} \bar{x}' + \lambda = x' + \lambda + p \\ \nu\bar{x}' + e^{\lambda-1}\bar{y}' + \mu = qe^{x'+\lambda} + \nu x' + e^{\lambda}y' + \mu. \end{cases}$$

La prima coincide con (94_1); la seconda si può scrivere

$$\bar{y}' = qe^{x'} + y' - \nu pe^{-\lambda},$$

che coincide con (94_2), per qualsiasi λ, ν, se e solo se $p = 0$; le trasformazioni mutate in sè dalle (99) sono quindi:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = qe^{x} + y. \end{cases} \tag{100}$$

II tipo:

$$x = e^{\nu}x' + \lambda \qquad y = e^{\nu}(y' + \nu x') + \mu, \tag{101}$$

che ammette il sottogruppo (58); applicando alle (65) le omografie (101), esse restano invariate per $p = 0$; si hanno così le trasformazioni

$$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = y + q. \end{cases} \tag{102}$$

III tipo:

$$x = x' + \lambda \qquad y = \nu x' + y' + \mu, \tag{103}$$

che ammette il sottogruppo (58); procedendo come sopra, si ritrovano le trasformazioni (102) (omologie speciali). Un'omologia speciale ammette quindi due distinti gruppi ∞^3 in sè.

IV tipo:

$$x = \lambda x' + \nu y' \qquad y = \mu x' + \rho y', \qquad \text{con} \quad \lambda\rho - \mu\nu = 1, \tag{104}$$

che ammette il sottogruppo

$$x = \lambda x' \qquad y = \mu x' + \lambda^{-1}y',$$

caso particolare del gruppo (77); fra le (96), si trovano quindi le seguenti trasformazioni, invarianti rispetto al gruppo (104):

$$(105)\qquad \begin{cases} \bar{x} = px \\ \bar{y} = py. \end{cases}$$

V tipo:

$$(106)\qquad x = \lambda x' \qquad y = \mu y' + \nu,$$

che ammette il sottogruppo (59′); fra le (91), si trovano le seguenti trasformazioni, che ammettono il gruppo (106) in sè:

$$(107)\qquad \begin{cases} \bar{x} = px \\ \bar{y} = y, \end{cases}$$

cioè, come nel caso precedente, un'omologia generale. Queste posseggono quindi due distinti gruppi ∞^3 d'omografie in sè.

VI tipo:

$$(108)\qquad x = \lambda x' \qquad y = \lambda^{\alpha} y' + \mu x' + \nu,$$

che ammette il sottogruppo (77); fra le (96), si trovano le seguenti trasformazioni. che ammettono il gruppo (108) in sè:

$$(109)\qquad \begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = qx^{\alpha} + y. \end{cases}$$

Infine, i seguenti gruppi ∞^3:

$$(110)\qquad x = \lambda x' + \mu \qquad y = \lambda\mu x' + \lambda^2 y' + \nu$$

$$(111)\qquad x = \nu^{\alpha-1} x' + \lambda \qquad y = \nu^{\alpha} y' + \mu$$

$$(112)\qquad x = \nu x' + \lambda \qquad y = \nu y' + \mu$$

$$(113)\qquad x = \frac{\lambda^2 x' + 2\lambda\mu y' + \mu^2}{\nu^2 x' + 2\nu\rho y' + \rho^2} \qquad y = \frac{\lambda\nu x' + (\lambda\rho + \mu\nu) y' + \mu\rho}{\nu^2 x' + 2\nu\rho y' + \rho^2},$$

che posseggono i sottogruppi (79), (58), (58), (79) rispettivamente, non mutano in sè alcuna trasformazione, all'infuori dell'identità.

Le trasformazioni (100), (109) che, all'infuori delle omologie, sono le sole trasformazioni fra piani sovrapposti con un gruppo ∞^3 d'omografie in sè, si possono così costruire: *si consideri,* nel piano, *un fascio* |𝔉| *di rette, una retta r fuori di questo e una curva di* KLEIN-LIE L, *che sia incontrata in un sol punto da ogni retta di* |𝔉|. *Su ogni retta di* |𝔉| *si consideri la proiettività parabolica in cui è unito il centro del fascio, e nella quale si corrispondono i punti d'intersezione con r e con* L. *Si ottiene così nel piano, una trasformazione che é quella cercata.*

Con procedimento analogo, si trova che le trasformazioni fra piani sovrapposti, che ammettono un gruppo ∞^4 di omografie in sè, sono le omologie speciali [(102)], che sono trasformate in sè dal gruppo

$$x = \lambda x' + \mu \qquad y = \nu x' + y' + \rho :$$

e le omologie generali [(107)], che sono trasformate in sè dal gruppo (delle « centro affinità »)

$$x = \lambda x' + \mu y' \qquad y = \nu x' + \rho y'.$$

Infine, non esistono trasformazioni fra piani sovrapposti, oltre l'identità, che ammettono un gruppo $\infty^k (k \geq 5)$ di omografie in sè: infatti, un tale gruppo possiede sempre dei sottogruppi che non mutano in sè alcuna trasformazione: e ciò accade, a maggior ragione, per il gruppo stesso.

20. In questo numero e nel successivo determiniamo, seguendo il metodo indicato nel n. 4, le trasformazioni dualistiche $\mathfrak{T}$ nel piano (24) che ammettono un gruppo d'omografie in sè.

Cominciamo a considerare il caso d'un gruppo intransitivo: esso appartiene ai tipi (31)-(37).

Se g è del tipo (31), le sue equazioni in coordinate plückeriane non omogenee $\zeta_1 = \frac{u_1}{u_3}$, $\zeta_2 = \frac{u_2}{u_3}$ sono

$$\zeta_1 = \frac{\zeta_1'}{\lambda} \qquad \zeta_2 = \frac{\zeta_2'}{\lambda^\gamma} :$$

(24) Si considerano qui solo trasformazioni dualistiche fra piani sovrapposti, in quanto quelle fra piani distinti sono proiettivamente equivalenti a trasformazioni puntuali.

assumiamo, come varietà V, $\mathfrak{V}$ (cfr. n. 4), la curva $x = 1$ e l'inviluppo $\zeta_1 = f(\zeta_2)$, ed indichiamo con $u[\bar{u}]$ la $y[\zeta_2]$ di un punto [retta] di $V[\mathfrak{V}]$. Sia poi $\bar{u} = \varphi(u)$ l'equazione di Γ. Il gruppo g trasforma un punto [retta] di $V[\mathfrak{V}]$ in

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = u\lambda^\alpha \end{cases} \qquad \left[\begin{cases} \zeta_1 = \dfrac{f(\bar{u})}{\lambda} \\ \zeta_2 = \dfrac{\bar{u}}{\lambda^\alpha} \end{cases}\right]$$

Eliminando λ, $\bar{u}$, u si trovano le equazioni

$$\zeta_1 = \frac{\psi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}\right)}{x}, \qquad \zeta_2 = \frac{\chi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}\right)}{y}$$

(dove $\psi(z) = f(\varphi(z))$, $\chi(z) = \varphi(z) \cdot z$); al punto (x, y) la $\mathfrak{T}$ fa corrispondere quindi la retta

$$y\psi\left(\frac{y}{x^\alpha}\right)X + x\chi\left(\frac{y}{x^\alpha}\right)Y + xy = 0. \tag{114}$$

Negli altri casi, la $\mathfrak{T}$ fa corrispondere al punto (x, y) la retta:

$$yX + \psi\left(\frac{y}{e^x}\right)Y - xy + y\chi\left(\frac{y}{e^x}\right) = 0 \qquad (g \text{ è del tipo } (32)); \tag{115}$$

$$X + \psi(y)Y - x + \chi(y) = 0 \qquad (g \text{ è del tipo } (33)); \tag{116}$$

$$\left[-x + \psi\left(y - \frac{x^2}{2}\right)\right]X + Y + \frac{x^2}{2} + x\psi\left(y - \frac{x^2}{2}\right) + \chi\left(y - \frac{x^2}{2}\right) = 0 \text{ [25]} \tag{117}$$

$(g$ è del tipo $(34))$;

[25] Ciascuno dei quattro tipi contiene delle corrispondenze di tipo nullo; esse si ottengono associando ad ogni punto A del piano la tangente in A alla curva di una delle «famiglie invarianti» rispetto al gruppo g (famiglie dipendenti complessivamente da una funzione arbitraria di una variabile): essendo i gruppi (31-34) simili, tali insiemi di famiglie, relativi a due gruppi, sono topologicamente equivalenti se i due gruppi sono entrambi aperti o entrambi chiusi; localmente, sono sempre equivalenti. Ad esempio, per il gruppo (33), esse sono date da

$$x + \int \psi(y)dy = c$$

con c costante arbitraria, e ψ funzione arbitraria.

si verifica facilmente che *le corrispondenze Σ indotte da $\mathcal{T}$ fra le curve $\mathcal{F}$ e gli inviluppi $\bar{\mathcal{F}}$ sono proiettività*, in ognuno dei quattro casi. [26] Si ha poi che *non esistono trasformazioni dualistiche che ammettono un gruppo intransitivo ∞^2 o ∞^3 d'omografie in sè*: infatti i gruppi (35), (36), (37) che operano intransitivamente sul piano punteggiato, operano transitivamente sul piano rigato.

21. Passiamo ora al caso in cui g è transitivo; incominciamo con il gruppo (61). In coordinate plückeriane non omogenee $\zeta_1 = \frac{u_1}{u_2}$, $\zeta_3 = \frac{u_3}{u_2}$ le sue equazioni si scrivono

$$\zeta_1 = \zeta_1' - \lambda \qquad \zeta_3 = -\zeta_1' + \zeta_3' + \lambda^2\mu.$$

Al punto $A(0, 0)$, ed alla retta $a(p, q)$ il gruppo g fa corrispondere il punto e la retta

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases} \qquad \begin{cases} \zeta_1 = p - \lambda \\ \zeta_3 = -p\lambda + q + \lambda^2 - \mu. \end{cases}$$

Eliminando λ, μ si ha che $\mathcal{T}$ fa corrispondere al punto (x, y) la retta

$$(p - x)X + Y + (q - px + x^2 - y) = 0. \tag{118}$$

Si tratta, com'è facile verificare, di una *corrispondenza polare, cremoniana quadratica* (*di 3ª specie*), purchè $q \neq 0$. [27]

([26]) Ciò è immediato quando le curve (gli inviluppi) $\mathcal{F}$ ($\bar{\mathcal{F}}$) sono rette o coniche (fasci di rette o coniche-inviluppo); negli altri casi la proprietà enunciata scende dal fatto che le corrispondenze Σ sono rappresentabili con

$$\bar{\sigma} = \sigma + c \qquad (\sigma \text{ arco proiettivo}). \tag{*}$$

Infatti, per le (114), le Σ sono date da

$$\zeta_1 = \frac{a}{x} \qquad (a \text{ costante})$$

e gli archi proiettivi sono dati da

$$\sigma = lgx^k \quad \bar{\sigma} = -lg\zeta_1{}^k,$$

dove k è una costante, avente lo stesso valore per tutte le curve $\mathcal{F}$. Sostituendo nell'ultima relazione, si ha la (*). Analogamente per la (115).

([27]) Infatti, la $\mathcal{T}$ si ottiene a partire dalla superficie Σ di Klein-Lie

$$z = ce^{\frac{2y + 2px - x^2}{2q}},$$

nel senso che essa fa corrispondere alla proiezione di un punto P di Σ dal punto $(0, 0, 1, 0)$ sul piano $z = 0$ la sezione col piano tangente a Σ in P.

Analogamente si trovano le altre seguenti trasformazioni dualistiche, che al punto (x, y) fanno corrispondere la retta:

(119) $$X + pe^{-x}Y + q - x - pye^{-x} = 0 \qquad (g \text{ è del tipo } (75));$$

(120) $$\left(\frac{p}{x} - \frac{qy}{x^{\alpha+1}}\right)X + \frac{q}{x^{\alpha}}Y + 1 = 0 \qquad (g \text{ è del tipo } (77));$$

(121) $$\frac{p}{x}X + Y + q - y = 0 \qquad (g \text{ è del tipo } (60')),$$

si tratta di *trasformazioni polari, quadratiche (di 2ª specie) purchè* $p + q \neq 0$ [28].

(122) $$\frac{pX}{x} + \frac{qY}{y} + 1 = 0 \qquad (g \text{ è del tipo } (59'))$$

anche queste sono *trasformazioni polari, quadratiche (di 1ª specie)*, purchè $p + q + 1 \neq 0$. [29]

(123) $$X + (p\sqrt{x - y^2} - 2y)Y + q(x - y^2) - py\sqrt{x - y^2} + y^2 = 0 \ [30]$$
$$(g \text{ è del tipo } (79)).$$

I gruppi (58), (78) operano intransitivamente sul piano rigato. e quindi non mutano in sè alcuna trasformazione dualistica; il gruppo (76) è duale del gruppo (75), e da luogo ad una trasformazione, correlativa a (119).

Fra i gruppi ∞^3, quelli dei tipi (99), (101), (103), (106), (108), (111), (112) non trasformano in sè alcuna $\mathfrak{T}$: infatti il gruppo (112) opera intransitivamente sul piano rigato; i gruppi (99), (103), (108), (106) ammettono un sottogruppo — del tipo (36) per i primi tre, e del tipo (35) per l'ultimo – che opera transitivamente sul piano rigato e intransitivamente su quello punteggiato; i gruppi (101), (111) ammettono il sottogruppo (58), transitivo nel piano punteggiato, ed intransitivo in quello rigato. Restano da considerare i casi:

[28] Infatti, la $\mathfrak{T}$ si ottiene a partire dalla superficie di KLEIN-LIE
$$z = c(x^p e^y)^{\frac{1}{p+q}} \qquad (\text{cfr. } (^{27})).$$

[29] Infatti, la $\mathfrak{T}$ si ottiene a partire dalla superficie di KLEIN-LIE
$$z = cx^{\frac{p}{p+q+1}}\, y^{\frac{q}{p+q+1}} \qquad (\text{cfr. } (^{27})).$$

[30] In ciascun tipo vi sono ∞^1 corrispondenze di tipo nullo; esse si ottengono considerando una famiglia $\mathfrak{G}$ di curve invariante rispetto al

I. g è del tipo (104), ed ammette quindi (per $\nu=0$) un sottogruppo che rientra nel tipo (77) per $\alpha=-1$. In tal caso, g trasforma in sè la $\mathcal{C}$ che al punto (x, y) fa corrispondere la retta:

$$(124) \qquad -qyX+qxY+1=0.$$

Si tratta delle correlazioni la cui omografia associata è un'omologia (necessariamente armonica).

II. g è del tipo (110), ed ammette quindi il sottogruppo (61). Fra le (118), si trova allora la trasformazione che al punto (x, y) fa corrispondere la retta

$$(125) \qquad -xX+Y+x^2-y=0.$$

Si tratta di una corrispondenza di tipo nullo, che si ottiene considerando *un fascio di coniche iperosculantisi, ed associando ad ogni punto P la tangente alla conica passante per P.* Il gruppo g è appunto costituito dalle omografie che conservano l'E_3 base del fascio.

III. g è del tipo (113), ed ammette quindi il sottogruppo (79). Imponendo alle (123) di essere trasformate in sè da g, si trova che *le trasformazioni dualistiche che godono di tale proprietà sono le polarità*; g è il gruppo delle omografie che lasciano invariata la conica fondamentale.

Si verifica infine facilmente che non esistono trasformazioni dualistiche che ammettano un gruppo $\infty^k (k \geq 4)$ di omografie in sè.

gruppo g, ed associando ad ogni punto A del piano la tangente ivi alla curva della famiglia passante per A.

Le (118) sono di tipo nullo se e solo se $q=0$; in tal caso $\mathcal{G}$ ha equazione

$$y=\frac{x^2}{2}-px+c \qquad (c \text{ parametro}).$$

Le (119) sono di tipo nullo se e solo se $q=0$; in tal caso $\mathcal{G}$ ha equazione

$$y=-\frac{e^x}{p}+c.$$

Le (120) sono di tipo nullo se e solo se $p=-1$, ed allora $\mathcal{G}$ ha equazione

$$y=\frac{x^\alpha}{q(\alpha-1)}+cx.$$

Le (121) sono di tipo nullo se e solo se $p+q=0$, ed allora $\mathcal{G}$ ha equazione

$$x=ce^{-\frac{y}{p}}.$$

Le (122) sono di tipo nullo se e solo se $p+q+1=0$; $\mathcal{G}$ ha equazione

$$y=cx^{\frac{p}{1+p}}$$

Le (123) sono di tipo nullo se e solo se $q=-1$; $\mathcal{G}$ ha allora equazione

$$x-y^2=\left(c-\frac{p}{2}y\right)^2$$