Bollettino
Unione Matematica Italiana

P. Attilio Lerda

Invarianti proiettivi di due elementi curvilinei spaziali di ordini due e quattro.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.1, p. 28–36.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_1_28_0>

Invarianti proiettivi di due elementi curvilinei spaziali di ordini due e quattro. (*)

Nota di P. ATTILIO LERDA (a Varallo Sesia).

Sunto. - *Nello studio di un* E_2 *ed un* E_4 *in posizione generica, ho trovato tre invarianti. Ne ho data una interpretazione geometrica come funzioni razionali di particolari birapporti di certi punti appartenenti alle cubiche aventi contatti di vari ordini coi nostri elementi differenziali e a certe quadriche contenenti a due a due le dette cubiche o ai piani tangenti alle quadriche nei centri degli elementi stessi.*

In una nota dal titolo « Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei » in Rend. Lincei, (6), 22, 1935, il BOMPIANI considera un E_2 ed un E_3 in posizione generica in S_3, ricava un invariante finito di tale coppia e ne dà una interpretazione geometrica. A tale scopo considera due cubiche sghembe definite l'una dal contenere l'E_3 ed essere tangente all'E_2, l'altra dal contenere sia l'E_2 dato che l'E_2 dell'E_3, considera inoltre una quadrica contenente le due cubiche. Ora su ciascuna delle due cubiche vi sono quattro punti particolari, cioè i centri dei due elementi dati e gli ulteriori punti d'intersezione della cubica con i piani tangenti nei centri stessi alla quadrica, punti il cui birapporto è l'invariante proiettivo in parola.

Io mi sono occupato invece di un E_2 ed un E_4; ho notato che, se questi sono in posizione generica, dei tre invarianti che, conforme al normale computo dei parametri, se ne deducono, uno ovviamente coincide con il suddetto invariante di BOMPIANI, cioè dipende dall'E_2 e dall' E_3 dell'E_4. Ho cercato perciò una interpretazione analoga degli altri due.

Sulla traccia del BOMPIANI considero pertanto le due cubiche già da lui studiate per un E_2 ed un E_3, ed in più una terza cubica contenente l'E_4 e l'E_0 dell'E_2. Considero inoltre delle quadriche, di cui una già considerata dal BOMPIANI, contenenti due delle predette cubiche

Si trova allora che i tre invarianti in studio si possono espri-

(*) Il contenuto della presente nota è estratto dalla dissertazione di Laurea da me presentata all'Università di Torino nella Sessione dell'autunno 1958.

mere come funzioni razionali di particolari birapporti di certi punti delle cubiche suddette, e precisamente dei centri dei due elementi, delle intersezioni (fuori dei centri) delle cubiche stesse coi piani tangenti nei centri alle quadriche in esame, ed infine del punto che una cubica ha in comune, fuori dei centri, con la quadrica cui non appartiene.

Indicando dunque con A, a, α e B, b, β centro, tangente e piano osculatore rispettivamente dell'E_2 ed E_4 e, posto, in un opportuno riferimento proiettivo omogeneo:

$$A_3 \equiv A, \quad A_4 \equiv B, \quad A_2 \equiv a\beta, \quad A_1 \equiv \alpha b; \quad A_3A_2 \equiv a, \quad A_4A_1 \equiv b,$$
$$A_3A_2A_1 \equiv \alpha \equiv (x_4 = 0). \quad A_4A_2A_1 \equiv \beta \equiv (x_3 = 0)$$

si ottengono, per i due elementi, le seguenti rappresentazioni (dove indichiamo con x_i le coordinate proiettive omogenee di punto nell'S_3):

$$E_4 \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_4} = a_2\left(\dfrac{x_1}{x_4}\right)^2 + a_3\left(\dfrac{x_1}{x_4}\right)^3 + a_4\left(\dfrac{x_1}{x_4}\right)^4 + [5] \\ \dfrac{x_3}{x_4} = \qquad\qquad b_3\left(\dfrac{x_1}{x_4}\right)^3 + b_4\left(\dfrac{x_1}{x_4}\right)^4 + [5] \end{cases}$$

$$E_2 \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_3} = a_2'\left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^2 + [3] \\ \dfrac{x_4}{x_3} = \qquad [3]. \end{cases}$$

Applicando omografie del tipo:

$$\begin{cases} x_1 = ly_1 \\ x_2 = \quad my_2 \\ x_3 = \qquad ny_3 \\ x_4 = \qquad\quad y_4 \end{cases}$$

e con un calcolo abbastanza semplice si ottengono i tre invarianti:

$$\boxed{I_1 = \frac{a_2 a_4}{a_3^2}} \qquad \boxed{I_2 = \frac{a_2 b_4}{a_3 b_3}} \qquad \boxed{I_3 = \frac{a_2^2 a_2'}{b_3}}.$$

Il terzo è quello del Bompiani.

Determiniamo dunque un significato geometrico per I_1 ed I_2.

Considero le due cubiche del BOMPIANI, cioè:

γ^3 contenente i due E_2

$\bar{\gamma}^3$ » l'E_3 dell'E_4 e l'E_1 dell'E_2

più una terza Γ^3 contenente l'E_4 e l'E_0 dell'E_2.

Per scrivere le equazioni parametriche di una cubica sghemba generica, dal momento che il parametro è definito a meno di una sostituzione lineare fratta, si può fissarne il valore ad arbitrio in tre punti particolari della cubica stessa. Assegno per ora due valori del parametro τ nei centri dell'E_2 e dell'E_4; sia

$$\tau = \infty \quad \text{in } A_3 \text{ centro di } E_2$$

$$\tau = 0 \quad \text{in } A_4 \text{ centro di } E_4 .$$

Tenuto conto di queste posizioni e imponendo i contatti dei varî ordini che la natura stessa delle cubiche stabilisce nei centri degli elementi con gli elementi differenziali stessi, si possono dedurre per le cubiche, le seguenti equazioni parametriche

$$\gamma^3 \left\{ \begin{aligned} \rho x_1 &= p_1 \tau \\ \rho x_2 &= q_2 \tau^2 \\ \rho x_3 &= \frac{q_2^2}{p_1} a_2' \tau^3 \\ \rho x_4 &= \frac{p_1^2}{q_2} a_2 \end{aligned} \right.$$

$$\bar{\gamma}^3 \left\{ \begin{aligned} \rho x_1 &= p_1 \tau \\ \rho x_2 &= \frac{a_2 p_1^2}{s_0} \tau^2 \\ \rho x_3 &= \frac{b_3 p_1^3}{s_0^2} \tau^3 \\ \rho x_4 &= s_0 + \frac{a_3 p_1}{a_2} \tau \end{aligned} \right.$$

$$\Gamma^3 \left\{ \begin{aligned} \rho x_1 &= p_1 \tau + p_2 \tau^2 \\ \rho x_2 &= \frac{a_2^2 b_3 p_2}{a_2^2 b_4 - 2 a_3 b_3} \tau^2 \\ \rho x_3 &= \frac{a_2^2 b_3^3 p_2^2}{p_1 (a_2 b_4 - 2 a_3 b_3)^2} \tau^3 \\ \rho x_4 &= \frac{p_1^2 (a_2 b_4 - 2 a_3 b_3)}{a_2 b_3 p_2} + \frac{p_1 (2 a_2 b_4 - 3 a_3 b_3)}{a_2 b_3} \tau + \end{aligned} \right.$$

$$+ \frac{p_2 (a_2 b_4 - a_3 b_3)^2 + a_2 b_3 (a_4 b_3 - a_3 b_4)}{a_2 b_3 (a_2 b_4 - 2 a_3 b_3)} \tau^2$$

essendo ρ un fattore arbitrario di proporzionalità, e p_i, q_i, s_i parametri per ora arbitrari. Per l'arbitrarietà di ρ possiamo moltiplicare i secondi membri delle equazioni parametriche delle γ^3, $\bar{\gamma}^3$ e Γ^3 rispettivamente per

$$\frac{q_2}{p_1^{\,2}}, \quad \frac{1}{s_0}, \quad \frac{p_2}{p_1^{\,2}}.$$

Chiamando poi μ rispettivamente il valore di

$$\frac{q_2}{p_1}, \quad \frac{p_1}{s_0}, \quad \frac{p_2}{p_1}$$

e ponendo inoltre $\mu\tau = t$, le equazioni precedenti si ridurranno a:

$$\gamma^3 \left\{ \begin{aligned} \rho' x_1 &= t \\ \rho' x_2 &= t^2 \\ \rho' x_3 &= a_2' t^3 \\ \rho' x_4 &= a_2 \end{aligned} \right.$$

$$\gamma^3 \left\{ \begin{aligned} \rho' x_1 &= t \\ \rho' x_2 &= a_2 t^2 \\ \rho' x_3 &= b_3 t^3 \\ \rho' x_4 &= 1 + \frac{a_3}{a_2}\, t \end{aligned} \right.$$

$$\Gamma^3 \left\{ \begin{aligned} \rho' x_1 &= t + t^2 \\ \rho' x_2 &= \frac{a_2 b_3}{a_2 b_4 - 2 a_3 b_3}\, t^2 \\ \rho' x_3 &= \frac{a_2^{\,2} b_3^{\,3}}{(a_2 b_4 - 2 a_3 b_3)^2}\, t^3 \\ \rho' x_4 &= \frac{a_2 b_4 - 2 a_3 b_3}{a_2 b_3} + \frac{2 a_2 b_4 - 3 a_3 b_3}{a_2 b_3}\, t + \\ &\quad + \frac{(a_2 b_4 - a_3 b_3)^2 + a_2 b_3 (a_4 b_3 - a_3 b_4)}{a_2 b_3 (a_2 b_4 - 2 a_3 b_3)}\, t^2. \end{aligned} \right.$$

Nel nuovo parametro t esiste ancora una certa arbitrarietà che proviene dall'averne fissato il valore solo in due dei tre punti di cui potevamo disporre.

Passando ad equazioni cartesiane, mediante eliminazioni del parametro t dalle precedenti equazioni, si ha:

$$\gamma^3 \begin{cases} \dfrac{x_3}{x_1} = a_2'\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{x_4}{x_1} = a_2 \dfrac{x_1}{x_2} \end{cases}$$

$$\overline{\gamma^3} \begin{cases} \dfrac{x_3}{x_1} = \dfrac{b_3}{a_2^2}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{x_4}{x_1} = a_2 \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{a_3}{a_2} \end{cases}$$

$$\Gamma^3 \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{b_3}{a_2^2}\,\dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{a_2 b_4 - 2a_3 b_3}{a_2^2 b_3} \\[2ex] \dfrac{x_4}{x_2} = a_2\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \dfrac{a_3}{a_2}\,\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{a_2 a_4 - a_3^2}{a_2^3} \end{cases}$$

— Determino ora le quadriche F_1^2 ed F_2^2 contenenti rispettivamente γ^3 e γ^3, $\overline{\gamma^3}$ e Γ^3.

La prima, già considerata dal BOMPIANI, ha equazione:

$$(F_1^2) \quad \boxed{\begin{gathered} \frac{a_2}{a_3}\left(a_2 a_2' - \frac{b_3}{a_2}\right)^2 (x_2 x_4 - a_2 x_1^2) + \left(a_2 a_2' - \frac{b_3}{a_2}\right)(x_3 x_4 - a_2 a_2' x_1 x_2) + \\ + \frac{a_2 b_3}{a_2^2}\,(x_1 x_3 - a_2' x_2^2) = 0 \end{gathered}}$$

Per la seconda, trovo l'equazione:

$$(F_2^2) \quad \boxed{\begin{gathered} a_2 \, \frac{(a_2 b_4 - 2a_3 b_3)}{a_2 a_4 - a_3^2}\, x_1^2 + \frac{a_2 a_3 b_4 - a_3^2 b_3 - a_2 a_4 b_3}{a_2(a_2 a_4 - a_3^2)}\, x_1 x_2 - \\ - \frac{(a_2 b_4 - a_3 b_3)^2 + a_2 b_3 (a_4 b_3 - a_3 b_4)}{a_2 b_3 (a_2 b_4 - 2a_3 b_3)}\, x_1 x_3 + \\ + \frac{(a_2 b_4 - 2a_3 b_3)^2 + b_3^2 (a_2 a_4 - a_3^2)}{a_2^3 (a_2 b_4 - 2a_3 b_3)}\, x_2^2 - \\ - \frac{a_2 b_4 - 2a_3 b_3}{a_2 a_4 - a_3^2}\, x_2 x_4 + x_3 x_4 = 0 \end{gathered}}$$

— Possiamo ora determinare i piani tangenti in A_3 ed A_4 sia alla F_1^2 che alla F_2^2 (¹) per dedurne poi il valore del parametro t nei punti di intersezione, fuori dei centri, dei suddetti piani colle tre cubiche considerate. Otteniamo le seguenti equazioni:

a) Piano tangente alla F_1^2 in A_3:

$$\boxed{x_1 = \frac{a_2^2}{a_3 b_3}\left(\frac{b_3}{a_2} - a_2 a_2'\right) x_4}$$

b) Piano tangente alla F_1^2 in A_4:

$$\boxed{x_3 = \frac{a_2}{a_3}\left(\frac{b_3}{a_2} - a_2 a_2'\right) x_2}$$

c) Piano tangente alla F_2^2 in A_3:

$$\boxed{x_1 = \frac{a_2 b_3(a_2 b_4 - 2a_3 b_3)}{(a_2 b_4 - a_3 b_3)^2 + a_2 b_3(a_4 b_3 - a_3 b_4)} x_4}$$

d) Piano tangente alla F_2^2 in A_4:

$$\boxed{x_2 = \frac{a_2 a_4 - a_3^2}{a_2 b_4 - 2a_3 b_3} x_3}$$

Sostituendo alle coordinate correnti le loro espressioni in funzione del parametro, date dalle equazioni parametriche delle varie cubiche, avremo intanto, per il parametro t nei punti sottospecificati,

(¹) Osservo che, in generale, γ^3 e Γ^3 non appartengono ad una stessa quadrica. Perchè ciò avvenga, devono essere verificate certe relazioni tra i parametri dell'E_2 ed E_4, cioè deve annullarsi la seguente espressione:

$$a_2^2 a_2' a_3(a_2 b_4 - 2a_3 b_3) + b_3(a_2 a_4 - a_3^2)(a_2^2 a_2' - b_3)$$

oppure deve essere:

$$a_2 b_4 - a_3 b_3 = 0$$

cioè:

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{b_3}{b_4}$$

i seguenti valori:

Su γ^3
$$\begin{cases} 1)\ t = \infty \text{ in } A_3 \\ 2)\ t = 0 \text{ in } A_4 \\ 3)\ t = -\dfrac{a_2^3}{a_3 b_3}\left(a_2 a_2' - \dfrac{b_3}{a_2}\right) \text{ nell'intersezione di } \gamma^3 \text{ col piano tangente a } F_1^2 \text{ in } A_3 \\ 4)\ t = -\dfrac{a_2}{a_2' a_3}\left(a_2 a_2' - \dfrac{b_3}{a_2}\right) \text{ nell'intersezione di } \gamma^3 \text{ col piano tangente a } F_1^2 \text{ in } A_4. \end{cases}$$

Su $\bar\gamma^3$:
$$\begin{cases} 1)\ t = \infty \text{ in } A_3 \\ 2)\ t = 0 \text{ in } A_4 \\ 3)\ t = -\dfrac{a_2' a_2' - b_3}{a_2 a_2' a_3} \text{ nell'intersezione di } \bar\gamma^3 \text{ col piano tangente alla } F_1^2 \text{ in } A_3 \\ 4)\ t = -\dfrac{a_2(a_2^2 a_2' - b_3)}{a_3 b_3} \text{ nell'intersezione di } \bar\gamma^3 \text{ col piano tangente a } F_1^2 \text{ in } A_4 \end{cases}$$

Su Γ^3:
$$\begin{cases} 1)\ t = \infty \text{ in } A_3 \\ 2)\ t = 0 \text{ in } A_4 \\ 3)\ t = \dfrac{(a_2 b_4 - 2a_3 b_3)^2}{b_3^2(a_2 a_4 - a_3^2) - (a_2 b_4 - 2a_3 b_3)^2} \text{ nell intersez. di } \Gamma^3 \text{ col piano tg. a } F_2^2 \text{ in } A_3. \\ 4)\ t = \dfrac{(a_2 b_4 - 2a_3 b_3)^2}{b_3^2(a_2 a_4 - a_3^2)} \text{ nell'intersezione di } \Gamma^3 \text{ col piano tangente a } F_2^2 \text{ in } A_4. \end{cases}$$

Sulle γ^3 e $\bar\gamma^3$ il birapporto dei quattro valori di t che abbiamo precisato, non è altro che l'invariante di Bompiani, da noi indicato con I_3. Sulla γ^3 non si trovano altri punti di particolare significato geometrico. Invece su $\bar\gamma^3$ ci sono altri due punti significativi, e precisamente le intersezioni, fuori dei centri, di $\bar\gamma^3$ coi piani tangenti ivi alla F_2^2. Si ottiene per i rispettivi valori del parametro:

$$\bar\gamma^3 \begin{cases} 5)\ t = \dfrac{a_2 b_3 (a_2 b_4 - 2a_3 b_3)}{(a_2 b_4 - 2a_3 b_3)^2 + a_2 a_4 b_3^2 - a_3^2} \text{ nell'intersez. di } \bar\gamma^3 \text{ col piano tangente a } F_2^2 \text{ in } A_3 \\ 6)\ t = \dfrac{a_2(a_2 b_4 - 2a_3 b_3)}{b_3(a_2 a_4 - a_3^2)} \text{ nell'intersez. di } \bar\gamma^3 \text{ col piano tangente a } F_2^2 \text{ in } A_4. \end{cases}$$

Combinando opportunamente questi sei valori di t su $\bar\gamma^3$ si hanno, oltre a quello già visto, i seguenti birapporti significativi (indichiamo per brevità i vari valori del parametro t col loro numero d'ordine):

$$(1265) = 1 + \frac{(I_2 - 2)^2}{I_1 - 1}$$

$$(1246) = - \frac{(I_3 - 1)(I_1 - 1)}{I_2 - 2}.$$

— Per la Γ^3 infine, oltre ai quattro punti già indicati, rileviamo ancora l'intersezione, fuori di A_4, di Γ^3 col piano tangente ivi alla F_1^2 (quella col piano tangente in A_3 non conduce a risultati di interesse), e l'intersezione di Γ^3 con F_1^2 distinta dalle intersezioni in A_3 e A_4. Si ottiene:

Γ^3

5) $t = - \dfrac{(a_2^2a_2' - b_3)(a_2b_4 - 2a_3b_3)}{a_1b_3^2}$ nell'intersezione di Γ^3 col piano tang. ad F_1^2 in A_4

6) $$t = \frac{(a_2b_4 - 2a_3b_3)(a_2^2a_2' - b_3)\{a_3(a_2b_4 - 2a_3b_3) + {}'(a_2a_4 - a_3^2)(a_2^2a_2' - b_3)\}}{a_3[(a_2^2a_2' - b_3)\{(a_2b_4 - 2a_3b_3)^2 + b_1^2(a_2a_4 - a_3^2)\} + a_2^2a_2'a_3b_3(a_2b_4 - 2a_3b_3)]}$$

nella ulteriore intersezione di Γ^3 con F_1^2 oltre a quelle in A_3 ed A_4.

Dei suddetti sei punti su Γ^3 registriamo quei birapporti che conducono a risultati interessanti:

$$(1234) = 1 - \frac{(I_2 - 2)^2}{I_1 - 1}$$

$$(1245) = - \frac{(I_3 - 1)(I_1 - 1)}{I_2 - 2}$$

$$(1265) = - \frac{(I_3 - 1)\{(I_2 - 2)^2 + (I_1 - 1)\} + I_3(I_2 - 2)}{(I_2 - 2) + (I_1 - 1)(I_3 - 1)}.$$

— Tenuto conto delle espressioni dei vari birapporti trovati mediante I_1, I_2, I_3, segue che, inversamente, detti invarianti si esprimono come funzioni razionali di quelli, e precisamente:

Su γ^3:

$$I_1 = 1 + \frac{(1246)^2\{(1265) - 1\}}{\{(1234) - 1\}^2}$$

$$I_2 = \frac{2\{(1234) - 1\} + (1246)\{1 - (1265)\}}{(1234) - 1}$$

$$I_3 = (1234).$$

Su Γ^3:

$$I_1 = 1 + \frac{(1245)^2 \{(1234) - 1\}}{(1265)\{(1245)+1\}[(1265)\{(1245)+1\} - 2(1234)(1245) - 2] + (1234)(1245)\{(1234)(1245)+2\} + 1}$$

$$I_2 = 2 + \frac{(1245)\{(1234) - 1\}}{(1265)\{(1245)+1\} - (1234)(1245) - 1}$$

$$I_3 = (1265)\{(1245)+1\} - (1234)(1245).$$

— CONCLUDENDO: i tre invarianti di un E_2 ed un E_4 in posizione generica si possono esprimere, mediante le formule precedenti, come funzioni dei birapporti di sei punti particolari sulle cubiche, e precisamente:

su $\bar{\gamma}^3$ (contenente l'E_3 dell'E_4 e l'E_1 dell'E_2):

1) I centri dei due elementi
2) Le due intersezioni, fuori dei centri, di $\bar{\gamma}^3$ coi piani tangenti ivi alla F_1^2 determinata dalla $\bar{\gamma}^3$ stessa e dalla γ^3 di BOMPIANI contenente i due E_2
3) Le due intersezioni, fuori dei centri, di $\bar{\gamma}^3$ coi piani tangent ivi alla F_2^2 determinata dalla $\bar{\gamma}^3$ e Γ^3.

Su Γ^3 (contenente l'E_4 e l'E_0 dell'E_2):

1) I centri dei due elementi
2) Le due intersezioni, fuori dei centri, di Γ^3 coi piani tangenti ivi alla F_2^2
3) L'intersezione, fuori di A_4, di Γ^3 col piano tangente ivi alla F_1^2
4) L'ulteriore intersezione di Γ^3 con F_1^2 distinta da quelle nei centri.