UMI

Recensioni.

* F. Severi, Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica, Ed. Cremonese, Roma, 1958 (Francesco Gherardelli)
* Alberto Pasquinelli, Introduzione alla logica simbolica, Einaudi, Torino, 1957 (Carlo Augusto Viano)
* M. Nicolescu, Analiza matematica, vol. II°, Ed. Tehnica, Bucarest, 1958 (S. M. I.)
* A. Froda, Algebra superiora, Ed. Acad. R. P. R., Bucarest, 1958 (S. M. I.)
* R. Zürmuhl, Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, II Ed., Springer-Verlag, 1957 (Francesco G. Tricomi)
* Albert Einstein scienziato e filosofo, Autobiografia di Einstein e saggi di vari autori a cura di P. A. Schilpp, Einaudi, Torino, 1958 (Cataldo Agostinelli)
* F. Smithies, Integral Equations, Cambridge University Press, 1958 (Francesco G. Tricomi)
* Arbeiten zur Informationstheorie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957 (Bruno de Finetti)
* W. Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953 (U. C.)
* W. Lietzmann, Wo steckt der Fehler?, B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953 (U. C.)
* Franz von Krbek, Eingefangenes Unendlich, Akad. Verlagsgesellschaft Gaest & Portig K. Y. G., Leipzig, 1954 (U. C.)
* L. Schmetterer, Grundlagen der mathematischen Statistik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957 (Bruno de Finetti)
* Théo Kahan, Physique des ondes, Faculté des Sciences de Paris, 1956 (G. Toraldo di Francia)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.4, p. 586–600.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_586_0>

RECENSIONI

F. SEVERI, *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*, Ed. Cremonese, Roma, 1958, pp. IV + 463.

Questo volume esce, a sedici anni di distanza, come secondo del Trattato iniziato con *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*. Insieme a questo offre un quadro quasi completo dell'opera profonda di Francesco Severi nella geometria algebrica.

Gli argomenti trattati in questo secondo volume sono fra i primi affrontati dal Severi in alcune sue famose Memorie giovanili e su cui egli è spesso tornato onde affinarne e completarne le soluzioni. Sistemi continui, teoria della base, integrali semplici di 1ª e 2ª specie. Problemi tutti centrali nella teoria delle varietà algebriche e in cui si devono al Severi vedute e risultati che resteranno per un pezzo decisivi.

Il presente volume è una rielaborazione ampia e sistematica di questi argomenti: ne risulta un documento irrefutabile dei risultati che si debbono alla scuola geometrica italiana e al Severi in particolare. E il Severi tiene giustamente a farlo rilevare nelle citazioni sparse qua e là per il libro e nelle ampie notizie storico-critiche, che raccontano con animo appassionato i travagli attraverso cui è passata la sua generazione per costruirsi gli strumenti idonei a superare le gravisime difficoltà che la teoria delle superficie presentava rispetto alla geometria sopra una curva. Difficoltà che nascevano dalla mancanza di analogie, dal fatto che, spesso, l'ambiente proiettivo, in cui si muoveva la geometria classica, non era il più naturale od adatto, dall'inesistenza o quasi di potenti strumenti analitici e topologici e quei profondi e svariati concetti poi introdotti dalla moderna algebra; difficoltà che soltanto un fortissimo ingegno poteva superare.

I concetti di varietà virtuale, di serie caratteristica di un sistema continuo, di equivalenza nelle sue varie accezioni, per dirne soltanto alcuni, sono certamente fra i più belli e più riposti che siano stati introdotti nella geometria algebrica. Altro merito non indifferente del Severi è di essere stato il primo che ha cercato, fin dove era possibile, di passare dalla geometria sopra una curva e sopra una superficie a quella sopra una varietà di dimensione qualunque, senza avere quel certo timore reverenziale « dei numeri più grandi di due » dei suoi predecessori.

L'esposizione, in questo volume, come sempre nei lavori di Severi, è limpida e chiara; le difficoltà sono affrontate e superate per gradi, tenendo conto della generazione storica delle idee e insistendo sulle insidie più nascoste; i teoremi più importanti sono sempre accompagnati da esempi caratteristici, che valgono a illuminarli.

Scorriamo ora rapidamente il volume. Esso è diviso in sei capitoli, che si raggruppano naturalmente in tre parti.

La prima parte (cap. I-III) è dedicata al teorema della completezza delle serie caratteristica.

Nel cap. I si premettono definizioni e concetti importanti relativi ai sistemi algebrici di curve sopra una superficie; nozione di falda analitica e di suo ordine; studio approfondito delle varietà delle curve piane di dato ordine con d nodi; definizione di serie (lineare o di equivalenza), caratteristica di un sistema algebrico di curve piane e di un sistema algebrico completo $\{C\}$ di curve di una superficie sopra una sua curva C_0.

Con queste premesse nel cap. II si affronta, su solide basi, il teorema della serie caratteristica. Teorema fondamentale, che afferma, sotto opportune ipotesi, la completezza della serie caratteristica di un sistema algebrico completo di curve $\{C\}$ di una superficie F su una sua curva C_0.

Questo teorema, che è stato uno dei più travagliati nello sviluppo della geometria algebrica, rappresenta uno dei punti culminanti di tutta la teoria delle superficie algebriche. Basti ricordare che da esso si trae una caratterizzazione delle superficie irregolari come quelle che contengono sistemi continui completi non lineari di curve.

È nota la storia di questo teorema; Enriques se dette una prima dimostrazione (1904) che soltanto nel 1921 Severi riconobbe fallace. Però, in quello stesso lavoro, in cui espose la sua critica, Severi dimostrò il teorema per sistemi algebrici completi aritmeticamente effettivi (in particolare per le curve regolari), sulla base di un risultato trascendente di Poincaré. Da allora numerosi sono stati i tentativi di dimostrazione del teorema per via algebrico-geometrica. Questi tentativi, con cui si cercava altresì di allargare la portata del teorema a curve irriducibili qualunque, non sono stati coronati dal pieno successo. In una Memoria di revisione critica del 1944, Severi dimostrò, sempre sul fondamento del risultato trascendente, il teorema della serie caratteristica per le curve irriducibili non singolari, che siano emiregolari. Precisamente, se C_0 è una curva irriducibile emiregolare della superficie F, Severi dimostra che esiste ed è unico il sistema algebrico completo $\{C\}$, cui appartiene C_0; C_0 è in $\{C\}$ origine di una falda lineare e su C_0 la serie caratteristica di $\{C\}$ è completa. Da alcuni esempi di Severi e di Zappa risulta poi che le ipotesi alla base di questo teorema non possono esser lasciate cadere del tutto.

Nel presente volume si riporta la parte algebrica di questa dimostrazione rimandando per quella trascendente al seguito del trattato e alle note originali di Severi (e si possono tener presenti anche le dimostrazioni di Andreotti e di Kodaira).

Si danno poi ampie notizie su un principio di spezzamento dovuto a B. Segre, che viene qui dimostrato per certe classi di superficie. Si riconosce che l'ammissione di questo principio come postulato conduce ad una semplice dimostrazione geometrica del teorema di completezza (e viceversa dal teorema in quistione si deduce la piena validità del principio stesso).

In questo ordine di quistioni trova posto la distinzione precisa fra i concetti di sistema algebrico irriducibile completo di curve e quello di sistema algebrico irriducibile completo di sistemi lineari. Appropriati esempi mostrano la differenza fra i due concetti e i fenomeni strani che possono presentarsi (esorbitanza, esuberanza, ...).

Il teorema della serie caratteristica conduce anche ad un teorema di esistenza e unicità del sistema algebrico (irriducibile, completo) di sistemi lineari $\{|C|\}$ contenente il sistema lineare completo $|C|$ (virtualmente privo di punti base), quando $|C|$ sia individuato da una curva aritmeticamente effettiva. Se $\{|C|\}$ contiene la massima infinità, q, di sistemi lineari la sua unicità può essere dimostrata anche in modo autonomo dal teorema della serie caratteristica. Questa seconda dimostrazione si può trasportare alle varietà algebriche di dimensione qualunque e conduce ivi al concetto di irregolarità superficiale.

Nel cap. III si trattano alcune conseguenze del teorema fondamentale, principalmente il teorema di regolarità dell'aggiunto $|C'|$ ad un sistema lineare $|C|$ quasi qualunque e la precisazione del teorema di Riemann-Roch sulle superficie (Ogni sistema lineare $|C|$, individuato su una superficie irrazionale da una curva C irriducibile di genere virtuale p e grado virtuale $n > \frac{3}{2}(p-1)$, è regolare).

Si passa poi alla definizione e allo studio della varietà di Picard di una varietà algebrica, introdotta come varietà degli ∞^q sistemi lineari di un sistema algebrico irriducibile completo $\{|C|\}$. Fra l'altro si dimostra qui che ogni superficie F di irregolarità $q > 0$, che non contenga un fascio di genere q, può rappresentarsi razionalmente su una superficie Φ tracciata nella sua varietà di Picard. Ne segue che le varietà di Picard sono l'ambiente naturale per lo studio delle superficie irregolari.

Il Cap. III termina con alcune importanti osservazioni su un carattere, q', delle superficie algebriche. Dato sulla superficie F un fascio generale di curve, $|C|$, il numero, q', delle curve $C + C'$ l.i., che passano per il gruppo base e per il gruppo jacobiano del fascio è un invariante assoluto della superficie. La dimostrazione del fatto che q' è uguale alla irregolarità q di F è rimandata ad altro volume, dopo che sarà stata esposta la teoria degli integrali semplici. Il significato proiettivo dell'invariante q' conduce digià, tuttavia, ad alcune notevoli identità algebriche, fondamentali per un'eventuale dimostrazione algebrica dell'uguaglianza $q' = q$. Al carattere q' è anche legata la cosiddetta serie di irregolarità, che fu la prima serie di equivalenza considerata da Severi, ed un curioso risultato circa la regolarità delle superficie algebriche dello spazio proiettivo ordinario (con singolarità normali) prive di punti cuspidali.

La seconda parte del volume, che occupa i capp. IV e V, riguarda la teoria della base per le varietà algebriche di data dimensione contenute in una varietà algebrica.

Premesse in riassunto nel cap. IV, alcune nozioni essenziali di topologia, si pongono (cap. V) le definizioni fondamentali di equivalenza algebrica e razionale fra varietà algebriche pure di dimensione k contenute in una varietà algebrica M_r. Il punto di vista gruppale considerato inizialmente da Severi e sviluppato sistematicamente da Todd dà alle definizioni dei vari tipi di equivalenza una semplicità irriducibile, che ne mostra tutta l'importanza.

Su queste premesse il problema della base per le varietà algebriche, di data dimensione, appartenenti ad una varietà algebrica, si pone con naturalezza. Esso viene completamente risolto per le curve di una superficie, per le ipersuperficie di una varietà algebrica qualunque, per le varietà di uno spazio proiettivo.

Nel caso delle curve sopra una superficie F (o le ipersuperficie di una varietà) si dimostra che condizione necessaria e sufficiente perchè la differenza $A - B$ di due curve A e B tracciate su F, dello stesso ordine (effettive o virtuali) sia un divisore dello zero dell'equivalenza algebrica è che essa abbia grado virtuale nullo. Questo fondamentale criterio numerativo di pseudoequivalenza algebrica è strumento essenziale in quanto segue. Esso conduce, fra l'altro, alla definizione del carattere σ di Severi. cioè al gruppo della torsione algebrica di una superficie.

Segue poi il teorema circa l'esistenza della base per la totalità delle curve algebriche di una superficie (numero ρ di Picard-Severi). La dimostrazione di questo teorema si fonde su un lemma topologico dovuto a Lefschetz e usato a questo scopo da Albanese ed è notevolmente più semplice di quella originaria, trascendente, di Severi, poggiata sugli integrali semplici di terza specie.

I numeri successivi completano la teoria nei suoi aspetti aritmetici: costruzione delle basi intermediarie, basi minime, forma quadratica relative ad una base intermediaria. Seguono varie eleganti applicazioni: determinazione del gruppo degli automorfismi birazionali di certe superficie algebriche; caratterizzazione topologica di alcune classi di superficie algebriche.

Nei riguardi della teoria della base per le varietà algebriche di dimensione k contenute in una data varietà algebrica M_r, il problema è risolto rispetto all'equivalenza numerativa [A e B varietà pure di dimensione k sono numerativamente equivalenti ($A \doteq B$) se qualunque sia $W \subset M_r$, di dimensione $r-k$, $[AW] = [BW]$]. Però, se $1 < k < r-1$, resta insoluto il problema di sapere se l'equivalenza numerativa coincide colla pseudoequivalenza algebrica.

Nella terza parte del volume (cap. VI) si inizia lo studio delle forme differenziali lineari appartenenti ad una varietà algebrica.

Premesse alcune proprietà degli integrali delle forme differenziali (condizioni di integrabilità, teorema di Stokes, lemma di Poincaré) nel campo reale e, più diffusamente, in quello complesso, si passa al caso, che qui interessa, delle forme differenziali razionali. Se $f(x, y, z) = 0$ è l'equazione nello spazio affine complesso C^3 di una superficie algebrica F, le forme differenziali razionali sono quelle che in un intorno di ogni punto P di F non appartenente alla $\partial_z f = 0$, nelle coordinate locali x e y si scrivono $\omega = Adx + Bdy$ con A e B funzioni razionali di x, y, z. Gli integrali di tali forme differenziali (integrali picardiani) si possono, come nella teoria classica degli integrali abeliani, classificare in integrali d 1ª, 2ª e 3ª specie. Segue uno studio approfondito delle forme che si possono dare alla ω, quando F è una superficie proiettiva, con opportune trasformazioni omografiche.

L'esame diretto delle singolarità di un integrale picardiano in corrispondenza alle singolarità della forma ω conduce ad alcune importanti ed ormai ben note proposizioni (quale ad es., quella che un integrale di 1ª o 2ª specie a periodi nulli è rispettivamente o una costante o una funzione razionale).

Dalle condizioni di integrabilità per le forme differenziali di 1ª specie nasce anche la considerazione dei differenziali semiesatti di 1ª specie, i quali soddisfano ad una parte soltanto, la più importante, della condizione di integrabilità. Lo studio dei differenziali semiesatti di 1ª specie (in particolare il risultato secondo cui essi sono di fatto differenziali esatti) viene rimandato ad uno stadio più avanzato della teoria.

Un seguito di esempi suggestivi e via più importanti serve a far prevedere al lettore il legame fra il numero dei differenziali semplici di 1ª specie l. i. appartenenti alla superficie F e la sua irregolarità.

Nel § 4 del cap. VI si riportano nella sostanza, ma con più dettagli, i risultati di Lefschetz circa i cicli evanescenti e i cicli invarianti di una curva C di F variabile in un fascio lineare (generale).

Da questi risultati si prendon le mosse per risolvere l'importante questione della riducibilità dei cicli lineari di F a cicli omologhi su una sua curva algebrica C [sotto quali condizioni l'omomorfismo naturale $H^1(F, Z) \to H^1(C, Z)$ fra gruppi di coomologia di F e C a coefficienti interi e di dimensione uno sia isomorfismo in]. Picard dette risposta affermativa a questo quesito nelle ipotesi che F sia superficie dello spazio proiettivo ordinario (con singolarità ordinarie) e C sia una sua sezione piana (1). Lefschetz dimostrò che ogni ciclo di F è omologo ad un ciclo di C supponendo soltanto che C appartenga ad un fascio lineare $|C|$. Con metodo trascendente, Severi giunse alla stessa conclusione supponendo soltanto che la curva irriducibile C sia atta a definire un sistema continuo, che non sia un fascio irrazionale.

(1) Con ipotesi analoghe a queste il teorema è stato anche esteso alle varietà a più dimensioni, in due diverse direzioni: in un legame fra l'omologia di una varietà algebrica M_r e quella di una sua sezione iperpiana N_{r-1} da Lefschetz (dimostrazioni complete di questa estensione sono state date recentemente da I. Fàry e da A. H. Wallace) e in un legame fra i gruppi fondamentali di M_r ed N_{r-1} da W. L. Chow.

In questo volume viene riportato il risultato di Lefschetz, migliorandone la dimostrazione e coll'aggiunta di un complemento essenziale per il seguito.

La costruzione dei cicli invarianti su una generica curva C di $|C|$ è poi ottenuta, nel modo naturale, considerandoli come intersezione con C dei cicli tridimensionali indipendenti di F.

A questo punto si tratta di collegare questi sviluppi topologici cogli integrali picardiani di prima e seconda specie appartenenti alla superficie F, onde giungere al risultato, ormai classico, secondo cui l'irregolarità di F eguaglia la metà del primo numero di Betti, R_1, di F.

Si premette una ingegnosa costruzione razionale degli integrali abeliani di 2ª (e di 1ª) specie sulle sezioni della superficie F con un fascio di piani. Tale costruzione permette, attraverso lo studio dei periodi di questi integrali e l'uso del teorema di Lefschetz, di cui si è detto sopra, di arrivare rapidamente ad un famoso teorema di Picard. Teorema, che prova l'esistenza e l'unicità (a meno di una funzione razionale additiva) dell'integrale di 2ª specie appartenente ad F con periodi assegnati su R_1 1-cicli l. i. di F.

Si espongono poi i risultati delle prime ricerche di Severi sul legame fra l'irregolarità di una superficie algebrica F e l'esistenza su F di integrali semplici (non funzioni razionali) di 2ª specie. Precisamente, detta q l'irregolarità di F, Severi dimostrò che R_1 non supera il doppio di q: $R_1 \leq 2q$. Risultato che segnò il primo collegamento fra l'irregolarità di una superficie algebrica e l'esistenza su di essa di integrali semplici di 2ª (o di 1ª) specie.

Il volume termina con alcune considerazioni e richiami sulle equazioni differenziali lineari omogenee nel campo analitico. In particolare, si studia l'equazione di Fuchs-Picard, cui soddisfano i periodi di un integrale abeliano di 2ª specie razionalmente fissato su una curva C variabile in un fascio lineare $|C|$.

Gli ulteriori sviluppi della teoria degli integrali semplici e multipli sopra una superficie e sopra una varietà algebrica sono rimandati ad un successivo volume, che ci auguriamo di leggere al più presto.

FRANCESCO GHERARDELLI

ALBERTO PASQUINELLI, *Introduzione alla logica simbolica,* Torino, Edizioni Scientifiche Einaudi, 1957, pagg. X + 118.

Il neo-positivismo logico ha suscitato, dalla fine della guerra in poi, largo interesse negli ambienti filosofici italiani. Un interesse nato senza dubbio in ritardo, quando il nucleo centrale della scuola neo-positivistica era stato ormai distrutto e le stesse dottrine fondamentali del movimento erano sottoposte a revisione o si venivano modificando a contatto con il pragmatismo americano e con le tendenze analitiche della filosofia tradizionale inglese. Tra le ragioni dello scarso interesse della cultura italiana per un movimento filosofico che si andava largamente imponendo all'estero, fino a diventare uno dei termini imprescindibili della discussione filosofica contemporanea, è certamente da annoverare il predominio dell'idealismo, che recise alle radici quello stretto collegamento tra filosofia e scienza, dal quale il neo-positivismo traeva la propria ragion d'essere. E l'esperienza idealistica finì con il distruggere, nella cultura filosofica italiana, movimenti e figure italiani che, come Peano e la sua scuola, Calderoni, Vailati, avevano contribuito al sorgere dell'indirizzo neo-positivistico o avevano espresso esigenze affini a quelle che il neo-positivismo poneva a proprio fondamento.

Nel dopoguerra la filosofia italiana si è accostata al neo-positivismo con un atteggiamento del tutto particolare: entusiasta del nuovo verbo filosofico o ostilmente critica nei suoi confronti, essa ha guardato soprattutto ai suoi presupposti filosofici generali, preoccupata di indicarne l'incompatibilità con le filosofie idealistiche e spiritualistiche tradizionali; ma ha trascurato le tecniche analitiche che i filosofi neo-positivisti mettevano a disposizione. La cosa non è senza importanza per una filosofia che, come quella neo-positivistica, proclamava appunto il primato delle tecniche analitiche sulle dichiarazioni filosofiche generali e che nasceva dalla riflessione sulle tecniche logiche sviluppate in connessione con il lavoro di fondazione critica delle matematiche.

Si deve tenere presente questa situazione, se si vuole comprendere il significato del libro di Pasquinelli, la sua importanza e la sua novità nella cultura italiana. Il titolo rispecchia esattamente il contenuto e l'intento del volume, che non vuole essere una discussione sul valore delle filosofie neo-positivistiche, ma una presentazione delle caratteristiche generali, del funzionamento, dei fini e delle funzioni delle tecniche logiche moderne, quali sono stati chiariti dai filosofi e dai logici neo-positivisti. L'accento batte questa volta sulle tecniche logiche e sul contributo che le chiarificazioni neo-positivistiche hanno effettivamente apportato alla comprensione dei procedimenti logici e delle scienze formali.

Pasquinelli prende l'avvio dal riconoscimento della logica come scienza, proprio della logica contemporanea. In questo essa si distingue dalla logica tradizionale, che si presenta come l'arte del ben ragionare. Ma la considerazione della logica come scienza è stata resa possibile dalla distinzione tra *scienze formali* e *scienze reali*, le prime costituite da proposizioni verificate senza il ricorso a fatti, le seconde verificate con il ricorso a fatti. In altri termini, soltanto la distinzione tra proposizioni analitiche e proposizioni sintetiche, tradizionale nella storia della filosofia almeno dai tempi di Locke e Hume, ma ricuperata dal neo-positivismo, ha permesso il riconoscimento delle scienze formali e del carattere scientifico della logica. La logica è allora una scienza formale, che consiste nella costruzione di sistemi rigorosi artificiali in grado di includere gli stessi principi con i quali sono costruiti e che fornisce contesti di giustificazione dei procedimenti delle altre scienze.

L'analisi di Pasquinelli diventa perciò, a questo punto, l'analisi dei sistemi logistici dei quali si serve la logica contemporanea. L'a. espone la classica distinzione tra pragmatica, semantica e sintassi, tra linguaggio-oggetto e metalinguaggio, tra segni e simboli ed esamina i fondamenti della simbologia logistica. Sulla base di queste precisazioni Pasquinelli traccia le linee fondamentali delle risposte che i logici contemporanei tendono a dare ai problemi del significato e della verità e al problema dei fondamenti della logica. Le discussioni teoriche e astratte, che abbiamo richiamato, ricevono poi un'applicazione nella costruzione di un calcolo delle proposizioni sul tipo di Hilbert e Ackermann. Seguono due appendici rispettivamente sul significato del termine «logica» e sull'implicazione rigida e sull'implicazione materiale.

Come risulta dalla sommaria esposizione che abbiamo fatto, il libro di Pasquinelli non è un manuale di logica, ma neppure una discussione della filosofia neo-positivistica; esso è piuttosto l'illustrazione delle teorie che hanno permesso di isolare, riconoscere e descrivere il campo della logica, fissandone le caratteristiche interne, differenziandolo dagli altri campi del sapere, mettendo in luce le strutture dei sistemi logici e delle loro proprietà. È un opportuno e riuscito tentativo di comprendere dall'interno il funzionamento degli strumenti analitici che la logica contemporanea mette a disposizione degli studiosi, mettendo da parte pregiudiziali filosofiche, positive e negative, che spesso precludono la comprensione di ciò che approvano o condannano. Si potrebbe forse osservare che in questo lavoro Pasquinelli ha, qua e là, presentato le dottrine dei logici come più uniformi di quello che non siano in realtà: preoccupato di fornire un insieme di nozioni positive, l'a. ha attenuato le differenze polemiche che dividono i più rappresentativi cultori della logica contemporanea e che danno singolare vivacità a questo settore della cultura filosofica e scientifica. La distinzione tra proposizioni analitiche e proposizioni sintetiche, la discussione sui fondamenti della logica, il carattere estensionale della logica, gli impegni ontologici della logica sono argomenti sui quali Pasquinelli avrebbe potuto informare più ampiamente sulle varie posizioni in lizza, discutendo pregi e difetti di ciascuna di esse.

CARLO AUGUSTO VIANO

M. NICOLESCU, *Analiza matematica*, vol. II°, Ed. Tehnica, Bucarest 1958, pp. 535.

Nella nuova edizione della sua opera « Analisi matematica », l'Accademico M. Nicolescu si propone di allargare il quadro dell'insegnamento dell'analisi matematica così da portarlo nel vivo del campo di ricerche attuali. Per conseguire tale scopo occorre precisare il posto occupato dall'analisi fra la topologia, l'algebra astratta, l'analisi funzionale utilizzando spesso i metodi di quei tre indirizzi della ricerca moderna. Seguendo i principi esposti nella prefazione del presente volume secondo, l'Autore ha trattato i problemi classici dell'analisi servendosi delle strutture moderne. Non è andato oltre gli spazi metrici, ma per i teoremi dove si utilizzano solamente proprietà topologiche vengono date dimostrazioni tali che l'estensione agli spazi topologici stessi può considerarsi un fatto compiuto.

L'opera è redatta in uno stile chiaro e le dimostrazioni sono rigorose ed eleganti.

Nel presente secondo volume si studiano dapprima le funzioni e i limiti; la nozione di limite viene introdotta per mezzo dei sistemi direttivi secondo Moore Smith. Successivamente si studia la teoria della continuità delle funzioni, la convergenza uniforme e quasi-uniforme.

Si espone dettagliatamente la teoria degli insiemi e delle funzioni boreliane, la classificazione di Baire. Si studia poi qualche famiglia speciale di funzioni (aventi la proprietà di Darboux, monotone, assolutamente continue, a variazione limitata, ecc.).

L'ultima parte del secondo volume è dedicata allo studio delle derivate, delle derivate d'ordine superiore, dei differenziali ed alle funzioni implicite. Vi sono poi due appendici: l'una sui numerali ordinali transfiniti e il teorema di Zermelo, l'altra sul teorema di esistenza delle funzioni boreliane.

Quest'opera permette al lettore di affrontare lo studio dei campi attuali della ricerca matematica.

S. M. I.

A. Froda, *Algebra superiora.* Biblioteca matematica I. Ed. Acad. R. P. R., Bucarest 1958, pp. 454.

Questo è il primo di due volumi nei quali l'A. si propone di esporre le nozioni fondamentali dell'algebra, gli elementi dell'algebra lineare, la teoria delle equazioni algebriche e la teoria di Galois.

L'insieme delle questioni trattate nel presente volume costituisce, come l'A. stesso dichiara espressamente nella prefazione, un ampliamento del corso tenuto per gli studenti della Facoltà di Matematica di Bucarest.

Il volume consta di una introduzione e di tre capitoli.

L'introduzione è dedicata ai procedimenti generali ed all'assiomatica dell'algebra astratta.

Nel primo capitolo « Nozioni fondamentali », dopo una breve esposizione di alcune nozioni della teoria degli insiemi, si studiano le relazioni di equivalenza, di ordine e le operazioni fondamentali dell'algebra. Si prosegue poi con la teoria dei gruppi, degli anelli e dei corpi e un ultimo paragrafo è dedicato ai polinomi e alle funzioni razionali.

Il secondo capitolo « Teoria della divisibilità » tratta della divisibilità nella classe dei numeri naturali e razionali, della divisibilità negli anelli e termina con qualche nozione sulla teoria degli ideali.

Il capitolo terzo « Algebra lineare » riguarda i problemi specifici dell'algebra lineare: sistemi di equazioni lineari, determinanti, matrici, forme lineari, bilineari, multilineari e quadratiche, gli spazi vettoriali e le trasformazioni lineari.

L'esposizione non presenta difficoltà alla comprensione anche per persone non specializzate; al lettore si richiedono soltanto conoscenze di aritmetica, di algebra elementare e dei metodi deduttivi matematici. Del resto è proprio quello lo scopo che l'A. si era proposto e che si è studiato di conseguire con una esposizione assai chiara delle varie dimostrazioni accompagnata da numerose note esplicative, senza sacrificare il rigore necessario in un buon testo matematico.

S. M. I.

R. Zürmuhl, *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker;* II Ed. Berlin usw., Springer-Verlag, 1957; XII + 524 pp.

Questo ampio trattato di Analisi numerica, giunto alla 2ª edizione in meno di un lustro, è indubbiamente uno dei migliori fra i non pochi del genere attualmente esistenti sul mercato librario internazionale. Può pertanto facilmente prevedersi che — nonostante lasci completamente in disparte il soggetto attualmente più di moda: le grandi calcolatrici elettroniche — questa seconda edizione continuerà ad essere circondata del favore che circondò la prima, nonchè l'altra pregevole opera dell'A. sulle matrici. Ed è favore meritato, perchè l'A — pur rivolgendosi prevalentemente agli ingegneri e ai fisici, e pur ponendo costantemente in primo piano la parte pratico-applicativa — tuttavia usa sempre metodi matematicamente corretti, sicchè anche i matematici di mestiere non troveranno mai nei suoi libri fondati motivi di scandalo.

Il libro si compone di otto capitoli, di cui il primo ha un carattere introduttivo, mentre gli altri trattano alcune questioni fra loro in gran parte indipendenti e cioè: Cap. II. Risoluzione numerica di equazioni algebriche e non. - Cap. III. Sistemi di equazioni lineari e teoria delle matrici. - Cap. IV. Interpolazione e integrazione numerica e grafica. - Cap. V. Metodo dei minimi quadrati e cenni di teoria degli errori. - Cap. VI. Rappresentazioni empiriche di funzioni. Capp. VII-VIII. Equazioni differenziali ordinarie. Rispetto alla prima edizione sono stati specialmente migliorati i cenni di statistica metodologica compresi nel Cap. V e, alla fine del volume, è stato aggiunto il metodo di Grammel per la risoluzione dei problemi « al contorno » per equazioni differenziali ordinarie.

Poichè ogni libro, per quanto buono, lascia sempre qualche desiderio insoddisfatto, mi permetto di esprimere l'augurio che, in una futura edizione, sia meglio curato il collegamento fra i problemi di autovalori per le matrici e quelli per le equazioni differenziali, che attualmente potrebbero apparire come cose solo verbalmente connesse, mentre non è così. Inoltre l'uso della stessa parola (*Eigenwert*) e della stessa lettera λ per denotare, nel Cap. III e nel Cap. VIII, quantità che, di regola, sono le une inverse delle altre, potrebbe ingenerare qualche confusione. Probabilmente la connessione fra le due questioni si raggiungerebbe nel modo migliore aggiungendo qualche cenno — contenibile in poche pagine — sul problema degli autovalori nella teoria delle equazioni integrali. Mi sembra infine che, nella teoria delle equazioni differenziali di ordine superiore, si potrebbe trarre maggior partito dalla riducibilità di esse a sistemi di equazioni del prim'ordine, cui attualmente si accenna solo, se non m'inganno, a proposito del metodo di Runge-Kutta. Quanto alla completa esclusione delle equazioni a derivate parziali, mi rendo conto della sua quasi inevitabilità non volendo accrescere oltre misura la mole del volume, ma ciò non toglie che essa resti sempre una cosa spiacevole.

FRANCESCO G. TRICOMI

ALBERT EINSTEIN scienziato e filosofo, *Autobiografia di Einstein e saggi di vari autori a cura di P. A. Schilpp*, Edizioni Scientifiche Einaudi, 1958, Boringhieri, Torino, pp. 672, L. 4.000.

Questo volume, dedicato ad Einstein, è una traduzione accurata di Augusto Gamba dell'opera originale intitolata *Albert Einstein:* Philosopher- Scientist (The Library of Living Philosophers- Evanston, III 1949), che fu pubblicata sotto la cura del Dott. P. A. Schilpp. Quest'opera comprende un'autobiografia di Einstein e venticinque saggi di autori diversi, fra i quali vi sono ben sei Premi Nobel per la scienza; si chiude con una replica dello stesso Einstein ed è completata da un elenco cronologico dei suoi scritti.

Il libro, sebbene con molte e inevitabili ripetizioni, non solo fa conoscere, attraverso le discussioni e le singole vedute, lo sviluppo dell'opera scientifica di Einstein con le sue implicazioni filosofiche, mettendo in rilievo il grande contributo da essa dato allo sviluppo della fisica moderna, ma mostra anche tutto il travaglio che ha dominato e domina i fisici, a cominciare dal principio di questo ventesimo secolo, per dare un assetto logico e unitario alle diverse teorie fisiche.

Le note autobiografiche di Einstein, scritte quando egli aveva 67 anni, contengono piacevoli episodi della sua vita e rivelano la sua tendenza al libero pensiero. In essa ci informa delle sue idee sulla religione e disserta sui contesti di pensiero, di virtù, di meraviglia e sulle questioni epistemologiche connesse con le sue teorie.

Facendo la storia dell'evoluzione della fisica si sofferma a criticare la convinzione, fino allora avuta da tutti i fisici, che la meccanica fosse il fondamento di tutta la fisica. Dopo aver ricordato l'opera precorritrice di Planck, che con le sue ricerche sulla radiazione termica, apriva una nuova crisi della fisica e portava allo sviluppo della teoria dei quanti, egli ci fa sapere come, convintosi che nè la meccanica né la termodinamica potevano pretendere ad una validità assoluta, incominciò a pensare che solo la scoperta di un principio formale universale avrebbe potuto portare a risultati sicuri. La ricerca di questo principio lo portò nel 1925 alla teoria della relatività particolare.

Dopo i tentativi fatti per rappresentare la gravitazione nell'ambito di questa teoria, gli divenne chiaro come essa costituisse solo un primo passo di uno sviluppo necessario, e dopo altri sette anni di lavoro pervenne alla costruzione della teoria della relatività generale, atta ad inquadrare la teoria della gravitazione.

Ma la profonda differenza fra i campi di forze gravitazionali, che derivano da un tensore simmetrico tetradimensionale, e i campi elettromagnetici, che sono connessi invece con un tensore antisimmetrico, mostrava la necessità di un completamento della teoria della relatività generale, onde trasformarla in una teoria unificata, capace di interpretare insieme l'esistenza di forze gravitazionali e di forze elettromagnetiche. Una generalizzazione della detta teoria è ottenuta dallo stesso Einstein considerando ancora un tensore tetradimensionale costituito da una parte simmetrica e da una parte antisimmetrica. Altre teorie sono state create come si sa al riguardo, come quelle di Weyl, Eddington, Kaluza, ecc., ma nessuna di esse ha avuto pieno successo.

Parlando della teoria statistica dei quanti Einstein esprime l'opinione che essa costituisca la migliore formulazione possibile delle diverse connessioni, ma che non offra nessun punto di partenza utile per uno sviluppo futuro. E quando replica agli autori dei saggi che deprecano il fatto che Einstein non accetti l'idea fondamentale dell'attuale teoria statistica dei quanti, pur riconoscendo l'importantissimo progresso che questa teoria ha fatto compiere alla fisica teorica, dice che il carattere essenzialmente statistico di quella teoria deve essere attribuito unicamente al fatto che essa opera con una descrizione incompleta dei sistemi fisici, che volendo dare con essa una descrizione completa di un singolo sistema fisico si arriva a concezioni teoriche assai poco plausibili, e si può accettare soltanto per una descrizione di insiemi di sistemi fisici.

I saggi dei diversi autori si riferiscono a disparati argomenti connessi con l'opera di Einstein e molti di essi hanno carattere prevalentemente epistemologico o filosofico, che a volte rivelano una mentalità radicalmente diversa da quella dello stesso Einstein.

Si riscontrano all'inizio gli scritti di Arnold Sommerfeld e di Louis de Broglie in cui danno notizie biografiche e ricordano le scoperte principali di Einstein, fra le quali la più rivoluzionaria è la scoperta dei quanti di luce, dalla quale egli trasse le leggi sull'effetto fotoelettrico. Mettono inoltre in rilievo come le sue idee sui quanti di luce ebbero una parte decisiva nell'evoluzione della teoria quantistica, e come l'ipotesi di una struttura corpuscolare della radiazione riaprisse il dualismo fra la concezione corpuscolare e quella ondulatoria della luce.

In questi scritti, e anche nei successivi di Rosenthal-Schneider, Pauli, Born, Heitler e Bohr, si rileva come, per quanto Einstein abbia visto più chiaramente di tutti i suoi predecessori il fondamento statistico delle leggi della fisica, tuttavia in seguito egli sembrò convinto che le ultime leggi della natura siano causali e deterministiche, e che la probabilità serve a coprire la nostra ignoranza quando si ha a che fare con numerose particelle. Si spiega così la sua opposizione al principio di complementarità di Bohr e al principio di indeterminazione di Eisenberg secondo il quale non è possibile attribuire contemporaneamente una posizione e una velocità alle particelle, individualmente considerate, negando altresì la validità di un rigoroso determinismo nella successione degli eventi atomici osservabili.

Particolarmente interessante è il saggio di Niels Bohr in cui dà un resoconto delle discussioni avute, nel corso degli anni, con Einstein sui problemi epistemologici sollevati dallo sviluppo moderno della fisica atomica, discussioni che, sebbene non abbiano portato ad un accordo, sono state stimolanti e di grande valore.

Ai rapporti tra la teoria della relatività e la filosofia sono dedicati diversi scritti. Il saggio di Margenau sulla concezione di Einstein della realtà, contiene delle considerazioni e delle osservazioni originali, le quali, per quanto come dice la stesso Einstein nella sua replica, siano questioni di lana caprina, possono servire per fissare l'orientamento che si riterrà necessario prendere per le basi concettuali future della fisica.

Il saggio di Frank mostra come il pensiero di Mach abbia avuto grande influenza sulle idee di Einstein. Quello di Reichenbach è una acuta analisi relativa al significato filosofico della teoria della relatività. Il saggio di Lenzen è volto ad affrontare in modo sistematico il contenuto epistemologico di certe espressioni di Einstein; il successivo di Northrop è relativo alla concezione del metodo scientifico da parte di Einstein e contiene una critica comparata dei maggiori sistemi epistemologici, esposta con limpido pensiero e concisa discussione.

Saggi di natura prevalentemente filosofica sono anche quelli di Dingle sulle conseguenze scientifiche e filosofiche della teoria della relatività particolare; di Gödel, che apporta un importante contributo alla teoria della relatività generale, e specialmente all'analisi del concetto di tempo; infine quelli di Bachelard, di Wenzel, di Ushenko, che sviluppano concetti in gran parte analizzati dai precedenti autori.

Ma al gruppo dei saggi filosofici si può associare anche l'articolo di V. G. Hinshaw, Jr., che vuole costituire uno studio su certi aspetti della filosofia sociale di Einstein.

Di carattere metodologico è poi il saggio di Bridgman in cui tenta di dimostrare che Einstein non riportò nella sua teoria della relatività generale la profondità e gli insegnamenti che egli ci aveva dato con la sua teoria particolare.

Un saggio di particolare importanza è quello di Max von Lane in cui fa la storia dello sviluppo dei postulati della conservazione e cioè: il principio d'inerzia, quello di energia, e la legge di conservazione della quantità di elettricità, fino ad arrivare alla legge dell'inerzia dell'energia di Einstein, che assorbe la legge di conservazione della massa e generalizza il concetto di energia.

Alcuni saggi, come quelli di Robertson e di Menger, analizzano ampiamente i fondamenti geometrici della teoria della relatività, considerando il primo la questione della curvatura dello spazio, mentre il secondo dimostra l'importanza dell'introduzione della geometria non euclidea nei principi fondamentali della fisica.

Infine sono da ricordare gli scritti di Milne, Lemaître e Infeld che riguardano il problema cosmologico della teoria della relatività. Il Milne costruisce una propria teoria della gravitazione, fondata sul concetto che egli dà di equivalenza degli osservatori. Il Lemaître fa invece una dissertazione in favore della costante cosmologica, la cui introduzione nelle equazioni gravitazionali, dimostra essere necessaria per spiegare lo spostamento verso il rosso delle righe spettrali delle nebulose. Infeld infine discute criticamente le ipotesi di Einstein sulla struttura del nostro universo, nonchè il modello proposto da de Sitter per conciliare i principi fondamentali dell'isotropia e dell'omogeneità, assunti da Einstein, con la legge dello spostamento verso il rosso, passando in rassegna le difficoltà comuni anche con altri modelli.

Il volume, la cui lettura è in alcuni punti piacevole, mentre in altri è alquanto pesante specie per la ripetizione degli argomenti, benchè non offra una vera trattazione delle teorie di Einstein può essere molto utile, a chi ne è già a conoscenza, per chiarire dei punti rimasti oscuri, per conoscere le idee e i ragionamenti che hanno condotto Einstein alla loro formulazione, nonchè i contrasti e le critiche che ne sono derivate, infine per comprendere la portata filosofica e il contenuto epistemologico di quelle idee e rendersi conto dell'influenza che hanno avuto nello sviluppo di altre teorie fisiche.

Alcuni dei saggi poi sono delle monografie che possono stare a sé e che si leggono con vero profitto e diletto.

CATALDO AGOSTINELLI

F. SMITHIES, *Integral Equations;* Cambridge Tracts in Mathematics, N. 49; Cambridge Univ. Press, 1958; X + 172 pp.

Trattasi di un breve manuale sulle equazioni integrali lineari destinato a sostituire, nella pregevole collezione cui appartiene, quello analogo di M. Bôcher (*An introduction to the study of integral equations*) da lungo tempo esaurito.

Rinunciando a qualsiasi applicazione (tranne un brevissimo cenno sul collegamento con le equazioni differenziali) e alle equazioni singolari o non lineari (non vi è cenno nemmeno della famosa e semplicissima equazione di Abel!) l'A. è riuscito a condensare in 166 paginette i lineamenti essenziali della teoria in modo chiaro e rigoroso, senza dover per questo ricorrere a quegli acrobatismi espositivi (continuo uso di abbreviazioni ecc.) che rendono talvolta così penosa la lettura dei moderni testi di matematica. Per di più tutta la teoria è svolta con notevole generalità, e cioè per nuclei (eventualmente complessi) della classe L_2, anche nel caso delle equazioni di Volterra; il che non è abituale, e pare sia stato fatto per la prima volta proprio dall'A., fin dal 1935.

Per quel che concerne il contenuto — ormai quasi standardizzato — di un moderno trattato sulle equazioni integrali, nel presente manuale si nota una certa larghezza nell'impiego delle originarie formule di Fredholm per il nucleo risolvente, che vengono estese ai nuclei di classe L_2. Invece si nota una certa scarsità nella parte destinata a facilitare il calcolo numerico degli autovalori (proprietà estremale di questi, ecc.), che è quella che maggiormente interessa nelle applicazioni fisico-tecniche.

Nel complesso, trattasi di un pregevole manuale moderno sulla teoria delle equazioni integrali lineari, rivolto piuttosto ai matematici puri che a quelli applicati.

FRANCESCO G. TRICOMI

Arbeiten zur Informationstheorie, I, Contributi di: A. J. Chintschin, D. K. Faddejew, A. N. Kolmogoroff, A. Rényi e J. Balatoni, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

Traduzione tedesca di cinque lavori sulla teoria dell'informazione: quattro russi (due di Chintschin, uno di Faddejew e uno di Kolmogoroff) ed uno ungherese (di Rényi e Balatoni). È annunciata per il 1958 la pubblicazione di un secondo fascicolo col medesimo titolo, contenente un lavoro di I. M. Gelfand e A. M. Jaglom, riguardante l'informazione nel caso di funzioni aleatorie.

Il presente fascicolo dà nel complesso una chiara esposizione d'insieme della teoria dell'informazione, in quanto il nucleo iniziale della teoria formulato da C. Shannon e i successivi contributi di diversi autori sono stati qui approfonditi e rielaborati in una forma più organica e perfetta, soprattutto nei lavori di Chintschin e di Kolmogoroff.

Chintschin si occupa nel primo lavoro in generale del concetto di entropia nel calcolo delle probabilità (equivalente a quello di quantita d'informazione), e nel secondo (che ne è praticamente la continuazione) dei teoremi fondamentali della teoria dell'informazione.

Nel primo l'accento è sull'approfondimento del concetto, prevalentemente da un punto di vista formale ed anche assiomatico; all'impostazione assiomatica viene offerta un'alternativa sotto certi aspetti anche più semplificata nella breve nota di Faddejew. Nel secondo lavoro l'accento è sul rigore della formulazione e dimostrazione di teoremi fondamentail di McMillan. Feinstein e Shannon, e sull'abbandono di restrizioni non necessarie. Si considerano infatti successioni ergodiche stazionarie (come in McMillan, anzichè solo markoviane come in Shannon) (1); si estende il metodo di Feinstein (includendo il caso di canali con memoria); viene resa rigorosa la dimostrazione dei teoremi di Shannon ma si osserva come la loro inversione sia da considerare un problema aperto.

Kolmogoroff si occupa particolarmente del caso continuo, portando chiarezza sul significato da attribuire ivi all'entropia. Anzichè sostituire materialmente all'espressione $H = \Sigma p_h \log p_h$ del caso discreto l'analogo integrale $h = \int p \log p dS$ ($p =$ densità), il K. illustra in vari modi come quest'ultima espressione caratterizzi il modo di tendere a infinito dell'entropia di un modello discerto atto a rappresentare «a meno di ε» lo schema continuo. Nello spazio euclideo n-dimensionale è ad es.

$$H_\varepsilon = n \log (1/\varepsilon) + h + \text{term. corrett.} \; (- n \log \sqrt{2\pi e} + o(1)).$$

Seguono applicazioni a processi stocastici (con riferimenti alla decomposizione spettrale, ecc.).

Anche la nota di Rényi e Balatoni è intesa a chiarire che il significato di entropia nel continuo è un «ordine d'infinito», ma tratta in modo diretto i singoli casi di spazi a una, due ... dimensioni. Per fare un'analogia: come le definizioni di «lunghezza», «area», ecc., mentre il concetto di Kolmogoroff corrisponde a quello della misura secondo la definizione di Minkowski.

BRUNO DE FINETTI

W. LIETZMANN, *Der Pythagoreische Lehrsatz*, mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953, cm. 13 1/2 × cm. 19, pp. 96, 7ª ed. con 73 fig. ed elenco dei nomi.

Diamo l'elenco dei capitoli di questa nuova edizione del noto volumetto di W. Lietzmann.

(1) È opportuna l'occasione per segnalare che il teorema in oggetto — riguardante la convergenza in probabilità dell'entropia — è stato nel frattempo rinforzato dimostrandone la convergenza quasi-certa (Leo Breiman, Ann. Math. Stat., Sept. 1957).

I) Sulla storia del teorema di Pitagora, II) Dimostrazioni per scomposizione, III) Il teorema di Pitagora nella trattazione euclidea, IV) Il teorema di Pitagora e la teoria della similitudine, V) Calcoli con l'aiuto dell'equazione pitagorica, VI) Osservazioni su alcune funzioni, VII) Numeri pitagorici, VIII) Il problema di Fermat, IX) Sulla bibliografia del teorema di Pitagora.

U. C.

W. LIETZMANN, *Wo steckt der Fehler?*, Mathematische Trugschlüsse und Warnzeichen. B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953, cm. $13\,^1/_2 \times$ cm. 19, pp. 185, 3ª ed. riveduta ed aumentata con 121 fig. ed elenco dei nomi.

È una nuova edizione di noti volumetti di W. Lietzmann dedicati ai sofismi, ai ragionamenti illusori o sbagliati, agli errori degli scolari e dei maestri e ad alcune antinomie logiche e curiosità matematiche.

La materia è divisa in tre parti: A) Illusioni e conclusioni sbagliate, B) Sofismi, C) Cautele nell'analisi dell'infinito.

L'autore parla anche della curva che riempie un quadrato (p. 149), ma senza citare G. Peano.

U. C.

FRANZ VON KRBEK, *Eingefangenes Unendlich*, Bekenntnis zur Geschichte der Mathematik. Akad. Verlagsgesellschaft Gaest & Portig K. Y. G., Leipzig, 1954, 2ª ed. con 129 fig., cm. $15\,^1/_2 \times$ cm. $22\,^1/_2$, pp. VI + 332, rileg. DM. 22.

Malgrado il tono un po' enfatico (specialmente nella scelta dei titoli dei singoli paragrafi) il libro costituisce una interessante esposizione storico filosofica dello sviluppo delle idee matematiche dall'antichità ai nostri giorni, con elenco delle fonti e registro dei nomi.

Ecco l'indice del volume coi motti delle singole parti:

Scorrerie nel passato (motto: Non si deve terminare col motto « tutto passa », ma invece si deve domandare « cosa resta? »): Non si deve dimenticare il pensiero dello scrittore!, Il tempo liberato dalle catene, Il diario di un matematico, La nascita di una supergeometria, Come nel medio evo!, Il combattimento fra due titani, L'enigma del genio.

Pitagora stupirebbe (motto: Dio creò gli uomini, l'uomo creò il numero): L'ABC degli antichi popoli civili: egiziani, babilonesi, cinesi; Un salto nell'alfabeto: i greci; La storia del Nulla, I figli del deserto diventano creatori di scienza, Magia delle formule, Crepuscolo degli Dei, Fallisce il pensiero?

Il sorpassato Euclide (motto: La forma è l'evidente sorella del numero): Agrimensori in Egitto, Babilonia e Cina, L'*homo geometra* appare, Basta uno sguardo, La figura della sposa, Accordo di figure e formule, Il più è il meno, Ciò che ancora rimane se varia la forma.

U. C.

L. SCHMETTERER, *Grundlagen der mathematischen Statistik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

È la prolusione tenuta dall'A. all'Università di Amburgo: vi vengono discusse — entro i limiti consentiti da siffatta occasione — le questioni concettuali riguardanti i fondamenti della teoria delle probabilità e della statistica matematica.

BRUNO DE FINETTI

Physique des ondes, Séminaire Théo Kahan, 3e année 1956, Faculté des Sciences de Paris, pp. 161, (Edizione litografata).

Si tratta di un corso di lezioni di seminario, tenute da tre autori: E. Arnous, A. Chevalier, G. Rideau. Il titolo potrebbe forse indurre in errore riguardo al contenuto dell'opera, che è la teoria quantistica dei campi (senza applicazioni speciali).

Il primo capitolo, dovuto ad Arnous, contiene la teoria del campo mesonico scalare neutro. Invertendo felicemente la rotta che viene percorsa in molti trattati, si parte dalla presentazione dello spazio di Fock e degli operatori di creazione ed annichilamento, per costruire poi gli operatori corrispondenti alle grandezze fisiche, come il numero di particelle, l'impulso, l'energia, il pontenziale del campo, il quale ultimo soddisfa l'equazione di Klein-Gordon. S'introduce poi l'interazione con i nucleoni (fissi), se ne ricava la forza di Yukawa e si discutono le note divergenze relative al caso di particelle puntiformi. Le medesime discussioni vengono effettuate nella rappresentazione « numeri di occupazione ».

Nel secondo capitolo Chevalier e Rideau trattano lo spazio hilbertiano astratto, le successioni di funzionali lineari e relative convergenze, le trasformazioni simmetriche, isometriche, unitarie. Nel terzo capitolo gli stessi autori presentano la decomposizione spettrale degli operatori autoaggiunti. Il quarto capitolo, dovuto a Rideau è una breve discussione dei metodi di assiomatizzazione della meccanica quantistica secondo de Broglie e secondo von Neumann e Ludwig.

Nel quinto capitolo Rideau ritorna alla teoria dei campi, trattando l'elettrodinamica del vuoto e la teoria generale della seconda quantizzazione, partendo dal classico schema lagrangiano. Quindi sviluppa il caso del campo scalare carico e infine il metodo invariante di Schwinger. Lo stesso autore, nel sesto capitolo dà un'esposizione sistematica dell'elettromagnetismo quantistico, valendosi della metrica indefinita di Gupta-Bleuler.

Data la natura del corso, è inevitabile una certa slegatura e una certa mescolanza di introduzioni elementari e di esposizioni che richiedono già una qualche familiarità con la teoria dei campi. Tuttavia il materiale è sempre eccellente e corretto. Il corso può servire molto bene a chiarire alcuni argomenti che negli ordinari trattati riescono ardui per i non specialisti.

G. TORALDO DI FRANCIA