BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALESSANDRO TERRACINI

Su certi sistemi ∞^7 di linee spaziali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 13
(1958), n.4, p. 564–573.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_564_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su certi sistemi ∞^7 di linee spaziali.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino)

Sunto. - Si considerano sotto il nome di sistemi Γ dei sistemi ∞^7 di linee spaziali, i quali costituiscono una delle possibili generalizzazioni dei sistemi G di linee di un piano. Tale generalizzazione si ottiene assumendo come ente spaziale analogo di un elemento curvilineo del terzo ordine nel piano, non già un elemento curvilineo ordinario, bensì un elemento curvilineo composto $E_{2,1}$. Nel n. 4 si considerano dei sistemi Δ di linee spaziali: essi hanno una definizione un poco più generale dei sistemi Γ . La presente Nota è strettamente collegata con quella dello stesso A. pubblicata nel precedente fascicolo di questo Bollettino.

Summary. - The ∞^7 -systems of space-curves which are considered in this paper (Γ -systems) constitute one of the possible generalizations of the plane G -systems. Such a generalization is obtained adopting composed curvilinear elements $E_{2,1}$ as being analogous to curvilinear elements of the third order in the plane. In n. 4 some more general systems (Δ -systems) are dealt with. The present paper is closely related to the paper published by the same Author in the foregoing issue of this Bollettino.

1. In una Nota recente ⁽¹⁾ ho definito e considerato certi insiemi doppiamente infiniti di elementi curvilinei composti $E_{2,1}$ (nello spazio ordinario) aventi lo stesso supporto ⁽²⁾, totalità che ho chiamate sistemi Γ . Qui basti ricordare che:

1) in coordinate cartesiane XYZ ⁽³⁾, di origine O , se il supporto $Oo\omega$ è costituito dall'origine O , dall'asse X e dal piano $Z=0$ un $E_{2,1}$ composto è rappresentato dalle

$$(1) \quad Y = a_{11}X^2 + a_{12}X^3 + [4], \quad Z = a_{22}X^3 + a_{23}X^4 + [5]$$

(con $a_{11}a_{22} \neq 0$ se l'elemento è regolare);

⁽¹⁾ A. TERRACINI, *Su alcuni sistemi di elementi curvilinei*, questo Boll., (3), xiii, 1958, pp. 395-405, v. i n.i 4-6. Questa Nota sarà richiamata con la sigla (B).

⁽²⁾ Cfr. i richiami relativi agli elementi curvilinei composti contenuti nel n. 3 della mia Nota (B). Un *supporto* (che indicheremo con $Oo\omega$, oppure $Mm\mu$, ecc.) è costituito da un punto, da una retta e da un piano che a due a due mutuamente si appartengono.

⁽³⁾ Le coordinate XYZ si possono ovviamente supporre proiettive non omogenee.

2) un sistema Γ di $E_{2,1}$ composti (1) è costituito dagli ∞^2 $E_{2,1}$ (1) per i quali a_{11} , a_{22} sono arbitrari, mentre a_{12} , a_{23} sono dati dalle

$$(2) \quad \begin{cases} a_{12} = ha_{22} + ka_{11} + 2la_{11}^2, \\ a_{23} = 2ka_{22} + 3la_{11}a_{22}. \end{cases}$$

essendo h, k, l tre costanti arbitrarie;

3) un sistema Γ di $E_{2,1}$ composti è formato dagli $E_{2,1}$ di dato supporto $Oo\omega$ che dal loro centro O si proiettano su un piano arbitrario secondo gli E_3 di un sistema G — il che dà luogo alla considerazione di una *prima retta satellite* (appartenente al fascio $O\omega$) proiettante da O il punto satellite del sistema G piano, e di un *piano satellite* (passante per la retta o) proiettante da O la retta satellite del medesimo sistema G —, e che soddisfano contemporaneamente alla proprietà duale — il che dà luogo alla considerazione di una *seconda retta satellite* (appartenente ancora al fascio $O\omega$) e di un *punto satellite* (appartenente alla retta o) — con la particolarità che le due rette satelliti siano tra loro coincidenti. Questa caratterizzazione dei sistemi Γ ne conferma il carattere invariante per omografie (che in (B) risultava, oltre che per questa, anche per altra via), e ne mette anche in evidenza il carattere autoduale (invarianza per reciprocità).

Ciò premesso, un sistema ∞^7 di linee spaziali (tale che prefissati genericamente un punto O , una retta o per O ed un piano ω per o , esistano ∞^2 linee del sistema passanti per O con la retta tangente ed il piano osculatore coincidenti rispettivamente con o, ω) si chiamerà a sua volta un *sistema* Γ quando gli ∞^2 $E_{2,1}$ delle ∞^2 linee testè menzionate formano costantemente un sistema Γ .

Anche la nozione di un sistema Γ di linee spaziali è invariante per omografie e reciprocità.

Costituiscono per esempio un sistema Γ le ∞^7 cubiche sghembe passanti per un punto fisso B con data retta tangente b e dato piano osculatore β . Invero, assunte coordinate proiettive ⁽⁴⁾ (omogenee x_1, x_2, x_3, x_4 , non omogenee $X=x_1/x_4, Y=x_2/x_4, Z=x_3/x_4$) con tetraedro fondamentale $A^1A^2A^3A^4$ tale che $A^3 \equiv B, A^3 A^2 \equiv b, A^3 A^2 A^1 \equiv \beta, A^4 \equiv O, A^4 A^1 \equiv o, A^4 A^1 A^2 \equiv \omega$, le ∞^2 cubiche passanti per B, O con le rette tangenti e i piani osculatori testè indicati sono rappresentabili con le

$$Y = c_1 X^2, \quad Z = c_2 X^3,$$

(4) E analogamente nel n. 4.

con c_1, c_2 costanti. Il paragone con le (1), (2) mostra che attualmente sono soddisfatte le (2) con $h = k = l = 0$, il che prova l'asserto.

Un altro esempio notevole di sistema ∞^7 di linee spaziali costituenti un sistema Γ è offerto dalla totalità delle eliche circolari, come si dirà più avanti (*Osservazione I* del n. 2).

I sistemi Γ di linee spaziali costituiscono una delle possibili estensioni allo spazio dei sistemi G di linee di un piano. Essa si ottiene assumendo come ente spaziale analogo di un elemento curvilineo del terz'ordine nel piano, non già un elemento curvilineo ordinario, bensì un elemento curvilineo composto $E_{2,1}$.

2. Ci proponiamo anzitutto di assegnare una forma tipica per il sistema di due equazioni differenziali nelle due funzioni incognite $y(x), z(x)$, tale che le linee integrali-descritte dal punto di coordinate $x, y(x), z(x)$ - siano precisamente quelle di un sistema Γ .

Supponiamo senz'altro che si tratti di linee analitiche, e - introdotto un sistema di coordinate cartesiane (oppure proiettive non omogenee) xyz - consideriamo le linee del supposto sistema Γ uscenti da un assegnato punto $M(x_0, y_0, z_0)$, con retta tangente m di assegnati parametri direttori $(1, y_0', z_0')$, e col piano osculatore coincidente con un assegnato piano μ di equazione

$$(3) \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & y_0' & z_0' \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

essendo λ una costante assegnata. Siano

$$(4) \quad \begin{cases} y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y_0'''}{6}(x - x_0)^3 + [4], \\ z = z_0 + z_0'(x - x_0) + \frac{z_0''}{2}(x - x_0)^2 + \frac{z_0'''}{6}(x - x_0)^3 + \frac{z_0^{IV}}{24}(x - x_0)^4 + [5] \end{cases}$$

le equazioni di una tal linea, in prossimità di M (naturalmente, in base alla (3), dovrà essere $z_0'' = \lambda y_0''$). Eseguita la trasformazione di coordinate

$$(5) \quad \begin{cases} X = x - x_0, & Y = y - y_0 - y_0'(x - x_0), \\ Z = z - z_0 - z_0'(x - x_0) - \lambda |y - y_0 - y_0'(x - x_0)|, \end{cases}$$

lo $E_{2,1}$ della linea (4) avente come supporto $Mm\mu$, risulta rappresentato dalle (1) con

$$a_{11} = \frac{y_0''}{2}, \quad a_{12} = \frac{y_0'''}{6}, \quad a_{22} = \frac{z_0'' - \lambda y_0''}{6}, \quad a_{23} = \frac{z_0^{IV} - \lambda y_0^{IV}}{24}.$$

Perciò se gli $\infty^2 E_{2,1}$ delle linee del sistema che consideriamo, aventi come supporto Mmu , costituiscono un sistema Γ , devono esistere a norma delle (2) tre quantità h, k, l , funzioni di $x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0, \lambda$, tali che

$$y_0''' = h(z_0''' - \lambda y_0''') + 3ky_0'' + 3ly_0''^2$$

$$z_0^{IV} - \lambda y_0^{IV} = 8k(z_0''' - \lambda y_0''') + 6ly_0''(z_0''' - \lambda y_0''').$$

Concludiamo così intanto che un sistema Γ di linee spaziali si può rappresentare col sistema di equazioni differenziali

$$\left\{ \begin{aligned} y''' &= h\left(x, y, z, y', z', \frac{z''}{y''}\right)\left(z''' - \frac{z''}{y''}y'''\right) + 3k\left(x, y, z, y', z', \frac{z''}{y''}\right)y'' + \\ &\quad + 3l\left(x, y, z, y', z', \frac{z''}{y''}\right)y''^2, \\ z^{IV} - \frac{z''}{y''}y^{IV} &= \left[8k\left(x, y, z, y', z', \frac{z''}{y''}\right) + \right. \\ &\quad \left. + 6l\left(x, y, z, y', z', \frac{z''}{y''}\right)y''\right]\left(z''' - \frac{z''}{y''}y'''\right), \end{aligned} \right.$$

che (sottintendendo i sei argomenti da cui dipendono le tre funzioni h, k, l) scriviamo

$$(6) \quad \begin{cases} (1 + h(z''/y''))y''' = hz''' + 3ky'' + 3ly''^2, \\ y''z^{IV} - z''y^{IV} = (8k + 6ly'')(y''z''' - z''y'''). \end{cases}$$

Sussiste il

TEOREMA. - Un sistema Γ di linee spaziali, a meno di un eventuale scambio tra y, z , è necessariamente rappresentabile con un sistema di due equazioni differenziali del tipo

$$(A) \quad \begin{cases} y''' = \varphi z''' + \psi y'' + \omega y''^2 \\ y''z^{IV} - z''y^{IV} = (1 - (z''/y'')\varphi)^{-1}(8\psi + 6\omega y'')(y''z''' - z''y'''), \end{cases} 3,$$

essendo φ, ψ, ω funzioni di $x, y, z, y', z', z''/y''$, con

$$(7) \quad \varphi \equiv y''/z'',$$

Viceversa, un sistema del tipo (A) (con la restrizione (7)) rappresenta un sistema Γ .

La prima parte del teorema si conchiude subito, se

$$(8) \quad h \neq -y''/z'',$$

dividendo la prima equazione (6) per $1 + h(z''/y'')$, e definendo le funzioni φ, ψ, ω in modo che l'equazione così ottenuta coincida

con la prima delle (A). Se invece $h = -y''/z''$, la prima delle (6) si scrive

$$z''' = 3kz'' + 3ly''z''$$

cosicchè, ponendo

$$y_1 = z, \quad z_1 = y, \quad k_1 = k, \quad l_1 = (y''/z'')l,$$

il sistema (6) diventa

$$(6') \quad \begin{cases} y_1''' = 3k_1y_1'' + 3l_1y_1''^2 \\ y_1''z_1{}^{iv} - z_1''y_1{}^{iv} = (8k_1 + 6l_1y_1'')(y_1''z_1''' - z_1''y_1'''). \end{cases}$$

Il sistema (6') nelle funzioni incognite y_1, z_1 , è ancora un sistema (A) (con la particolarità $\varphi = 0$). In entrambe le ipotesi resta assicurata la (7). La prima parte dell'enunciato sussiste dunque in ogni caso.

Quanto all'invertibilità affermata nell'ultima parte, essa risulta dal fatto che, partendo dal sistema (A), con l'ipotesi (7), si possono definire le funzioni

$$(9) \quad h = \frac{\varphi}{1 - (z''/y'')^\varphi}, \quad k = \frac{\psi}{3[1 - (z''/y'')^\varphi]}, \quad l = \frac{\omega}{3[1 - (z''/y'')^\varphi]}$$

in modo da scrivere quel sistema sotto la forma (6), la quale traduce appunto la circostanza che si tratta di un sistema Γ .

OSSERVAZIONE I. - Come applicazione del teorema che precede, si verifica subito agevolmente quanto si è asserito nel penultimo capoverso del n. 1. Si supponga a tale scopo che il sistema di coordinate cartesiano xyz sia ortogonale: se si scrivono le condizioni affinchè la linea descritta dal punto $(x, y(x), z(x))$ abbia entrambe le curvatures costanti, si ottengono appunto le due equazioni che costituiscono il sistema (A), essendo attualmente

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{1 + y'(y' - z'\sigma)}{-\sigma + z'(y' - z'\sigma)}, & \psi = 0, \\ \omega = \frac{-3[1 + \sigma^2 + (y' - z'\sigma)^2](y'\sigma + z')}{\theta\sigma^2[-\sigma + z'(y' - z'\sigma)]} \end{cases}$$

dove si è posto

$$\sigma = y''/z'', \quad \theta = 1 + y'^2 + z'^2.$$

OSSERVAZIONE II. Nel sistema (A) le funzioni $y(x), z(x)$ non compaiono in modo simmetrico. Tuttavia si riscontra subito che,

se φ non è nullo, posto

$$\varphi^* = \frac{1}{\varphi}, \quad \psi^* = -\frac{\psi}{\varphi} \frac{y''}{z''}, \quad \omega^* = -\frac{\omega}{\varphi} \frac{y''^2}{z''^2}$$

il sistema (A) si può scrivere sotto la forma

$$(A') \quad \begin{cases} z''' = \varphi^* y'' + \psi^* z'' + \omega^* z''^2 \\ z'' y^{IV} - y'' z^{IV} = (1 - (y''/z'')\varphi^*)^{-1} (8\psi^* + 6\omega^* z'') (z'' y''' - y'' z''')/3 \end{cases}$$

cioè con una struttura del tutto analoga a quella del sistema (A) salvo lo scambio tra y, z .

OSSERVAZIONE III. - Si è già rilevato che non solo ogni omografia, ma anche ogni reciprocità trasforma un sistema Γ ancora in un sistema Γ . Di questo carattere di invarianza gode dunque un sistema di due equazioni differenziali del tipo (A), dove tuttavia è da tener presente la circostanza che può essere necessario lo scambio tra le due funzioni incognite $y(x), z(x)$.

3. Per un sistema Γ di linee spaziali:

a) abbiamo dunque da un lato la sua rappresentazione analitica col sistema (A) del n. precedente, nel quale entrano in gioco complessivamente, come coefficienti, tre funzioni φ, ψ, ω di sei parametri atti a caratterizzare un supporto;

b) d'altro lato, in relazione con ogni supporto $Mm\mu$, nelle proprietà richiamate, sotto 3), nel n. 1 relativamente agli $E_{2,1}$ delle linee del sistema che lo contengono, entrano complessivamente in gioco una retta r del fascio $M\mu$, un piano ρ del fascio di asse m , ed un punto R della punteggiata avente per sostegno la stessa retta m . Chiameremo questi tre elementi (ognuno dei quali appartiene ad una forma di prima specie individuata dal supporto) *satelliti* ⁽⁵⁾ del supporto considerato.

⁽⁵⁾ Estendiamo così una definizione da me già introdotta per i sistemi G piani (A. TERRACINI, *Sobre la ecuación diferencial $y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y'^2$* , « Rev. de matem. y fis. teor. de la Univ. Nac. de Tucumán », vol. 2, 1941; questa Memoria sarà richiamata con la sigla (T)). In quella occasione, dovendo considerare, in un dato piano, gli $\infty^1 E_3$ contenenti un dato $E_1 Aa$, tali che rispetto alle coniche che li contengono un punto fisso P della retta a ha come polare una retta fissa p per A , ho denominati P, p rispettivamente *punto e retta satelliti* dell' $E_1 Aa$. In (T) ho poi chiamato *3-elemento* la figura complessiva formata da A, a, P, p nelle condizioni testè richiamate.

In relazione con ciò, rappresentato un sistema Γ di linee, a norma di a), con un sistema (A) , procediamo intanto alla rappresentazione analitica dei tre elementi satelliti di un generico supporto $Mm\mu$, che si intenderà assegnato analiticamente come al principio del n. 2. Ciò si fa subito, ricorrendo come in (B) alle formole per i sistemi G assegnate in (T) , nel sistema di riferimento XYZ (n. 2), ottenendosi:

per la retta satellite r le equazioni

$$Z = X + lY = 0,$$

per il piano satellite ρ l'equazione

$$Y = hZ,$$

per il punto satellite le coordinate

$$X = 1/3k, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

(dove naturalmente le funzioni h , k , l vanno calcolate per i valori x_0 , y_0 , z_0 , y_0' , z_0' , z_0''/y_0'' , e così nelle successive (11), (12), (13)).

Passando al sistema xyz , secondo le (5), si hanno: per la retta satellite r le equazioni

$$(11) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{ly_0' - 1} = \frac{z - z_0}{lz_0' - z_0''/y_0''},$$

per il piano satellite ρ l'equazione

$$(12) \quad y - y_0 - y_0'(x - x_0) = h \left\{ z - z_0 - z_0'(x - x_0) - \frac{z_0''}{y_0''} [y - y_0 - y_0'(x - x_0)] \right\},$$

per il punto satellite R le coordinate

$$(13) \quad x = x_0 + \frac{1}{3k}, \quad y = y_0 + \frac{y_0'}{3k}, \quad z = z_0 + \frac{z_0'}{3k}.$$

(Le h , k , l , calcolate — come si è detto — per gli argomenti x_0 , y_0 , z_0 , y_0' , z_0' , z_0''/y_0'' , si esprimono mediante le (9) per mezzo dei valori assunti dalle φ , ψ , ω per gli stessi argomenti).

Le formole (11), (12), (13) mostrano che, se per ogni supporto $Mm\mu$ si conosce la terna degli elementi satelliti, restano senz'altro individuate le funzioni h , k , l (e conseguentemente il sistema (A)).

Ne segue che di un sistema di equazioni differenziali del tipo (A) si ha un'immagine geometrica del tutto soddisfacente, associando ad ogni supporto $Mm\mu$ una terna di elementi satelliti: punto

R (sulla retta m), piano ρ (passante per m), e retta r (nel fascio $M\mu$). La figura complessiva formata dal supporto $Mm\mu$ insieme con R , r , ρ si può designare come 5-supporto ⁽⁶⁾ in quanto coi punti M , R , le rette m , r , ed i piani μ , ρ si possono formare in tutto i cinque supporti $Mm\mu$, $Rm\mu$, $Mr\mu$, $Mm\rho$, $Rm\rho$. Così come nel piano un sistema G di linee sostanzialmente si identifica con un sistema ∞^3 di 3-elementi, nello spazio la considerazione di un sistema Γ di linee equivale a quella di una totalità ∞^6 di 5-supporti.

OSSERVAZIONE. - Se si scrive il sistema (A) adottando per i coefficienti φ , ψ , ω i valori (10), si verifica materialmente utilizzando le (11) (12) (13) che per il sistema Γ costituito dalle ∞^7 eliche circolari, per ogni supporto $Mm\mu$ il punto satellite è il punto improprio della m , il piano satellite è il piano per m perpendicolare a μ , e la retta satellite è la retta del fascio $M\mu$ perpendicolare alla m . Anche in questo esempio si riscontra dunque una certa analogia con quanto avviene per il sistema G piano costituito dagli ∞^3 cerchi di un piano.

4. In (B) ho anche considerati, col nome di sistemi Δ , dei sistemi ∞^2 di $E_{2,1}$ di dato supporto, un poco più generali dei sistemi Γ . Essi risultano definiti nell'uno o nell'altro dei seguenti modi:

a) un sistema ∞^2 di $E_{2,1}$ composti (1) è un sistema Δ quando, essendo arbitrari a_{11} , a_{22} , i coefficienti a_{12} , a_{23} sono dati dalle

$$(14) \quad \begin{cases} a_{12} = ha_{22} + ka_{11} + 2la_{11}^2 \\ a_{23} = 2ka_{22} + 3ma_{11}a_{22}, \end{cases}$$

dove h , k , l , m sono quattro costanti arbitrarie (cfr. quanto detto sotto 2) nel n. 1);

b) un sistema Δ di $E_{2,1}$ è costituito dagli ∞^2 $E_{2,1}$ di dato supporto $O\omega$ che dal loro centro O si proiettano su un piano arbitrario secondo gli E_3 di un sistema G , e che soddisfano contemporaneamente alla proprietà duale (cfr. quanto è richiamato sotto 3) nel n. 1).

Secondo b), a norma di quanto è detto sotto 3) nel n. 1, ogni sistema Δ di $E_{2,1}$ di dato supporto $O\omega$ possiede una *prima retta satellite* r_1 (nel fascio $O\omega$), un *piano satellite* ρ (nel fascio di asse o), una *seconda retta satellite* r_2 (ancora nel fascio $O\omega$), ed un *punto satellite* R (sulla retta o).

(6) Cfr. la denominazione adottata in (T), richiamata alla fine di (5).

Tra i sistemi Δ , i sistemi Γ si caratterizzano con l'eguaglianza $l = m$ dal punto di vista a), e con la coincidenza $r_1 \equiv r_2$ dal punto di vista b).

Come a partire dalla nozione di un sistema Γ di elementi composti $E_{2,1}$ di dato supporto siamo passati nel n. 1 a definire un sistema Γ di ∞^7 linee spaziali, così, in modo del tutto analogo, si definisce un sistema Δ di ∞^7 linee spaziali.

Anche i sistemi Δ di linee spaziali si trasformano in sistemi Δ in ogni trasformazione proiettiva (omografia o reciprocità).

Ripetendo le considerazioni del n. 2, si dimostra poi che un sistema Δ di linee spaziali - a meno di un eventuale scambio tra y, z - è sempre rappresentabile con un sistema di due equazioni differenziali del tipo

$$(A') \quad \begin{cases} y''' = \varphi z''' + \psi y'' + \omega y''^2 \\ y'' z^{iv} - z'' y^{iv} = (1 - (z''/y'')\varphi)^{-1} (8\psi + 6\tau y'')(y'' z''' - z'' y''')/3, \end{cases}$$

essendo $\varphi, \psi, \omega, \tau$ funzioni di $x, y, z, y', z', z''/y''$, tali che

$$(7) \quad \varphi \neq y''/z''.$$

Viceversa ogni sistema (A') , con la condizione (7) rappresenta un sistema Δ .

Procedendo poi come al n. 3, si trova che, se per ogni supporto $Mm\mu$ si prefissa la *quaterna* degli elementi satelliti r_1, ρ, r_2, R (ciascuno entro la forma di prima specie individuata dal supporto, alla quale esso deve appartenere a norma della definizione), assunto un sistema di coordinate proiettive, restano determinate le quattro funzioni $\varphi, \psi, \omega, \tau$, e quindi il sistema di equazioni differenziali (A') rappresentante analiticamente il sistema Δ .

Senza trattenerci su ciò, diamo alcuni esempi di sistemi Δ di ∞^7 linee spaziali, non ridotti a sistemi Γ : a tale scopo è sufficiente che le funzioni ω, τ siano tra loro distinte.

Partiamo all'uopo da un sistema (A') dove si adotti

$$(15) \quad \varphi = \psi = \omega = 0, \quad 2\tau = p/y' \quad (p \neq 0),$$

essendo p una costante arbitraria: l'ipotesi $p \neq 0$ serve appunto ad assicurare che il sistema Δ che si ottiene integrando (A') non si riduca ad un sistema Γ . Eseguendo l'integrazione, supposto

$$(p+1)(p+2)(p+3) \neq 0,$$

si ottiene

$$(16) \quad \begin{cases} y = Ax^2 + 2Bx + C \\ z = q(Ax + B)^{p+3} + p_1 x^2 + p_2 x + p_3, \end{cases}$$

essendo $A, B, C, q, p_1, p_2, p_3$ costanti arbitrarie.

ESEMPIO 1^o. - Assunto $p = -4$ dalle (16) si ricava senza difficoltà quanto segue. Sono date due rette r, s incidenti in un punto A : si considerano le cubiche sghembe che passano per A , hanno il piano osculatore in A passante per la retta r , sono ulteriormente incidenti alla retta s e tali che la retta tangente nel punto di incidenza si appoggi alla r . Tali cubiche costituiscono un sistema Δ (non Γ)⁽⁷⁾.

ESEMPIO 2^o. - Come risulta da quanto si è detto sotto b), la nozione di sistema Δ di linee spaziali è autoduale. Perciò, dal precedente, si ricava per dualità il seguente ulteriore esempio di sistema Δ costituito esso pure da cubiche sghembe. Sono date due rette r, s situate in uno stesso piano α . Si considerano le cubiche sghembe che osculano il piano α in un punto (variabile) della retta r , e ammettono un secondo piano osculatore passante per la retta s , in modo che la retta tangente nel punto di osculazione si appoggi alla r . Tali cubiche costituiscono un sistema Δ (non Γ).

Naturalmente, questo secondo esempio non rientra nelle ipotesi (15) Si riscontra invece facilmente che, prendendo $A^3A^2 \equiv r, A^3A^1 \equiv s$ nel sistema (A') relativo all'attuale esempio si ha

$$\varphi = \psi = 0, \quad \omega = -1/y', \quad \tau = -3/y'.$$

ESEMPIO 3^o. - Se invece torniamo alle (15), e adottiamo ora $p = 1$, ottenendosi così

$$(17) \quad \begin{cases} y = 2ma_0x^2 + ma_1x + a_5 \\ z = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, \end{cases}$$

con $m, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ costanti arbitrarie, si riscontra quanto segue. Costituiscono un sistema Δ (non ridotto a un sistema Γ) le quartiche sghembe cuspidate, per le quali sono assegnate la cuspide A , la retta tangente cuspidale a , il piano osculatore α in A , e la « retta covariante » g nel fascio $A\alpha$ ⁽⁸⁾.

(7) Per il sistema (16) con $p = -4$ si ha $A \equiv A^3, \gamma \equiv A^3A^1, s \equiv A^3A^2$.

(8) Per una quartica sghemba cuspidata in A , essendo a, α definiti come nel testo, chiamiamo « retta covariante » la retta g che si ottiene nell'uno o nell'altro dei seguenti due modi (dei quali si riconosce subito l'equivalenza, per esempio mediante le equazioni parametriche canoniche della quartica $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t^4 : t^2 : t : 1$). 1) La retta tangente nel punto, certo esistente, della quartica nel quale il piano osculatore è stazionario incontra il piano α in un punto G : la « retta covariante » è la retta AG . 2) La quartica cuspidata sta sulle quadriche di un fascio, tutte tangenti in A al piano α : esse segano il piano α nelle coppie di rette di un'involuzione. Dei due raggi doppi di questa, uno coincide con la tangente cuspidale, l'altro è la « retta covariante ».

Per le quartiche (17) si ha $A \equiv A^3, a \equiv A^3A^2, \alpha \equiv A^3A^2A^1, g \equiv A^2A^1$.