Giuseppe Palamà

Su di una questione relativa alla partizione di n.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.4, p. 558–563.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_558_0>

Su di una questione relativa alla partizione di n.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. - *Si dà una formula con cui si ha il numero delle partizioni del numero naturale n in somme di particolari addendi.*

Summary. - *A formula is given by which the number of the partitions of the natural number* n *is obtained in sums of special addends.*

Non molti anni or sono H. GUPTA, [1], [2] (1) si è occupato di problemi di partizione nel calcolare Tabelle che danno il numero $p(n)$ di tutte le partizioni del numero naturale n in somme di addendi interi e positivi, per $n \leq 600$, [1], [3], ritrovando ed estendendo i risultati di MACMAHON [4].

H. GUPTA, posto $(n, > m)$, (n, m) per indicare il numero delle partizioni di n in ciascuna delle quali l'elemento minimo è rispettivamente maggiore od uguale ad m (agli stessi simboli attribuiamo gli stessi significati in questa Nota), determina i valori di

a) $\quad \left(n, \left[\frac{n}{3}\right]\right), \quad \left(n, \left[\frac{n}{3}\right] - 1\right), \ldots, \left(n, \left[\frac{n}{4}\right] + 1\right), \quad$ [1];

b) $\quad (4m + l, m), \quad (4m + j, > m), \quad (5m + l, m), \quad$ [2];

in cui è

$$0 \leq l < m, \qquad 0 \leq j < 4.$$

Interessanti sono i risultati stabiliti da H. GUPTA in [2].

La somma delle formule relative alle a) segue da quella relativa alla seconda delle b) che dà $\left(n, > \left[\frac{n}{4}\right]\right)$.

Ora noi qui trattiamo la questione un po' più difficile della determinazione di $\left(n, > \left[\frac{n}{5}\right]\right)$ che ci consente di ricavare agevolmente ad esempio il valore di $\left(n, > \left[\frac{n}{5}\right] - 2\right)$.

Il passaggio dalla formula relativa ad $\left(n, > \left[\frac{n}{5}\right]\right)$ a quella rela-

(1) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia riportata in fine.

tiva alla $\left(n, > \left[\frac{n}{5}\right] - 2\right)$ può farsi a mezzo della formula che dà il valore della terza delle b).

Chi volesse dettagliate notizie relative alla partizione di n può consultare G. H. HARDY and E. M WRIGHT, [6] e L. E. DICKSON, [5].

1. Posto

$$n = 4k + j, \qquad 0 \leq j < 4$$

e quindi

$$\left[\frac{n}{4}\right] = k$$

noi dobbiamo qui occuparci della determinazione del valore di

$$\sum_{s=0}^{t} (n, k - s),$$

essendo

$$k - 1 - \left[\frac{n}{5}\right] = t.$$

2. Sussiste ora il seguente

TEOREMA.

$$\sum_{s=0}^{t} (n, k - s) = M + P + Q_i + R_j + T, \qquad n = 4k + j, \qquad 0 \leq j < 4,$$

quando si assuma

$$M = \frac{1}{6}(t + 1)(2t^2 + 7t + 18), \quad T = \left[\frac{3t^2 + 2(a + 1)t + 2a}{4}\right], \quad a = k + j\,;$$

e quando, posto inoltre

$$\text{(1)} \qquad t - 1 + [(3j + 2)/4] = 3v + i, \qquad 0 \leq i \leq 2,$$

si faccia

$$P = \frac{3}{2} v(v + 1)(2v + 1),$$

$$\text{(2)} \quad Q_0(t) = 0, \qquad Q_1(t) = \left[\frac{t^2 + 2j(t + 1)}{3}\right], \qquad Q_2(t) = Q_1(t - 1) + Q_1(t),$$

$$R_j = 0, \qquad per\ j = 0,\ 1,\ 2; \qquad R_3 = v(3v + 1).$$

Dimostrazione del Teorema.

3. Difatti H. GUPTA, [2], ha dimostrato la seguente formula

$$(4m+l,\ m)=3+\left[\frac{m+l}{2}\right]+\left[\frac{l^2+6l}{12}\right],\quad 0\leq l<m, \tag{3}$$

cui si può pervenire per altra via.

Se ora in (3) poniamo

$$l=n-4m,\qquad m=\left[\frac{n}{4}\right]-s,\qquad n=4k+j,\qquad 0\leq j<4,$$

e quindi

$$m=k-s,\qquad l=4s+j,$$

con

$$k-s\geq\left[\frac{n}{5}\right]+1,\qquad s\leq k-1-\left[\frac{n}{5}\right]=t,$$

notato che nelle posizioni che seguono la (3) è contenuta la limitazione $0\leq l<m$, la (3) può scriversi

$$(n,\ k-s)=(s+1)^2+1+\left[\frac{k+3s+j+2}{2}\right]+\left[\frac{4s^2+8sj+j^2+6j}{12}\right]$$

cui per i valori 0, 1, 2, 3, di j può darsi la forma

$$(n,\ k-s)=(s+1)^2+1+\left[\frac{k+3s+j+2}{2}\right]+\left[\frac{k^2+2sj+2j}{3}\right], \tag{4}$$

$$s=0,\ 1,\dots,\ t,$$

che dà

$$\sum_{s=0}^{t}(n,\ k-s)=\frac{1}{6}(t+1)(t+2)(2t+3)+\sum_{s=0}^{t}\left[\frac{k+3s+j+2}{2}\right]+$$
$$+\sum_{s=0}^{t}\left[\frac{s^2+2sj+2j}{3}\right]+t+1.$$

4. Ora se $j=0,\ 1,\ 2$ si ha

$$\sum_{s=0}^{t}\left[\frac{s^2+2sj+2j}{3}\right]=\left[\frac{2j}{3}\right]+\left[\frac{4j+1}{3}\right]+\left[\frac{6j+4}{3}\right]+\dots+$$
$$+\left[\frac{t^2+2(t+1)j}{3}\right]=(1+3+5)+\dots+$$
$$+\left\{\left[\frac{2rj+(r-1)^2}{3}\right]+\left[\frac{2(r+1)j+r^2}{3}\right]+\left[\frac{2(r+2)j+(r+1)^2}{3}\right]\right\}+\dots$$

che per $r=3r'-j$, $r'=1,\ 2,\dots,\ v$, dà

$$\sum_{s=0}^{t}\left[\frac{s^2+2sj+2j}{3}\right]=\sum_{r'=1}^{v}(3r')^2+Q_1=\frac{3}{2}\,v(v+1)(2v+1)+Q_1,$$

essendo Q_t dati dalle (2) e v ed i definite dalla (1) che ora, essendo $j = 0, 1, 2$, più semplicemente può scriversi

$$t - 1 + j = 3v + i, \qquad 0 \leq j \leq 2, \qquad 0 \leq i \leq 2.$$

Se invece è $j = 3$ si ha

$$\sum_{s=0}^{t} \left[\frac{s^2 + 2sj + 2j}{3}\right] = \sum_{s=0}^{t} \left(2s + 2 + \left[\frac{s^2}{2}\right]\right) = (2 + 4 + 7) + \ldots +$$

$$+ \left\{ 2(3r - 3) + 2 + \left[\frac{9(r-1)^2}{3}\right] + 2(3r - 2) + 2 + \left[\frac{(3r-2)^2}{3}\right] + \right.$$

$$\left. + 2(3r - 1) + 2 + \left[\frac{(3r-1)^2}{3}\right] \right\} + \ldots = (2 + 4 + 7) + \ldots +$$

$$+ \{ (3r^2 - 1) + (3r^2 + 2r - 1) + (3r^2 + 4r) \} + \ldots =$$

$$= \sum_{r=1}^{v} (9r^2 + 6r - 2) + Q_t = \frac{3}{2} v(v+1)(2v+1) + v(3v+1) + Q_t\,,$$

in cui Q_t sono dati dalle (2) e v ed i sono definite dalla (1) che ora per $j = 3$ diventa

$$t + 1 = 3v + i, \qquad 0 \leq i \leq 2.$$

5. Infine si ha

$$\sum_{=0}^{t} \left[\frac{k + 3s + j + 2}{2}\right] = t + 1 + \left[\frac{3t^2 + 2(a+1)t + 2a}{4}\right], \qquad a = k + j.$$

6. Tenendo presenti i risultati contenuti nelle sez. 3, 4 e 5 segue senz'altro il teorema.

7. Dopo aver stabilito il teorema precedente, per la determinazione di $\left(n, > \left[\frac{n}{5}\right]\right)$ occorre valutare $\left(n, > \left[\frac{n}{4}\right]\right)$. Ora il valore di

$$\sum_{s=0}^{u} \left(n, \left[\frac{n}{3}\right] - s\right) \qquad u = \left[\frac{n}{3}\right] - 1 - \left[\frac{n}{4}\right],$$

si ha subito dalla formula relativa alla seconda delle b), ma tale valore può essere stabilito agevolmente anche nel seguente modo.

Posto

$$n = 3k' + j' \qquad 0 \leq j' < 3,$$
$$u = k' - 1 - k,$$

essendo

$$k' = \left[\frac{n}{3}\right], \qquad k = \left[\frac{n}{4}\right],$$

dalla

$$n = (k' - s) + (k' - s + r) + (k' + 2s - r + j') = (k' - s) + (2k' + s + j'),$$

$$0 \leq r \leq \left[\frac{3s + j}{2}\right],$$

segue

$$\sum_{s=0}^{u} (n, k' - s) = \sum_{s=0}^{u} \left[\frac{3s + j' + 2}{2}\right] + u + 1 =$$

$$= 2(u + 1) + \left[\frac{3u^2 + 2(j' + 1)u + j'^2}{4}\right].$$

8. Si tenga presente inoltre che

$$\left(n, > \left[\frac{n}{3}\right]\right) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + 1.$$

9. Il teorema della Sez. 2 ed i risultati delle Sez. 7 e 8 danno il valore di $\left(n, > \left[\frac{n}{5}\right]\right)$.

10. Si può passare dalla formula che dà $\left(n, > \left[\frac{n}{5}\right]\right)$, di cui si è parlato nella precedente Sez., ad altra relativa a $\left(n, > \left[\frac{n}{5}\right] - h\right)$, quando si osservi che per le valutazioni di $\left(n, \left[\frac{n}{5}\right] - s'\right)$, $s' = 0, 1, \dots, h - 1$, basta servirsi della (4), che continua a sussistere quando vi si fa

$$s = \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{5}\right] + s',$$

per ogni $s' = 0, 1, \dots, h - 1$, purchè vi si aggiunga il corrispondente numero delle partizioni di n in somme con un numero di addendi, interi e positivi, maggiore od uguale a 5.

Se per es. $h = 2$, tale numero d'aggiungere è, se

$$n \equiv j_1 \pmod 5, \qquad 0 \leq j_1 < 5,$$

$$1 + \left[\frac{j_1}{4}\right] + \left[\frac{3j_1}{4}\right],$$

quando si valuta con la (4) $\left(n, \left[\frac{n}{5}\right]\right)$; è invece

$$6 + 2j_1 + \left[\frac{2j_1 + 1}{3}\right] + \left[\frac{j_1}{3}\right]$$

quando si valuta con la (4) $\left(n, \left[\frac{n}{5}\right] - 1\right)$, ed è $n > 54$.

Infine se $n \leq 54$ possono esserci eventualmente partizioni di n con un numero di addendi > 5, ma è agevole la valutazione del loro numero.

11. Se per es. $n = 600$, si ha

$$k = 150, \quad j = 0, \quad t = 29, \quad v = 9, \quad i = 1$$

e quindi

$$M = 9515, \quad P = 2565, \quad Q_1 = 280, \quad T = 2895;$$

inoltre è

$$k' = 200, \quad j' = 0$$

e perciò

$$u = 49, \quad 2(u + 1) + \left[\frac{3u^2 + 2u}{4}\right] = 1925;$$

e poichè

$$(600, > 200) = 101, \quad \left[\frac{600}{5}\right] = 120,$$

si ha infine

$$(600, > 120) = 9515 + 2565 + 280 + 2895 + 1925 + 101 = 17281.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Hansray Gupta, *A table of partitions*, « Proc. London Math. Soc. » Ser. 2, 39, (1935), pp. 142-149.

[2] — — *On partitions of* n, « Jour. London Math. Soc. », 11, (1936), pp. 278-280.

[3] — — *A table of partitions (II)*, « Proc. London Math. Soc. ». Ser. 2, 42, (1937), pp. 546-549.

[4] Macmahon, « Proc. London Math. Soc. », Ser. 2, 17, (1918), pp. 114-115.

[5] L. E. Dickson, *History of theory of numbers*, Vol. 2°, (1934), pp. 101-104.

[6] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the theory of numbers*, (1954), pp. 273-296.