Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Aymerich

Su le onde di rarefazione nei canali e nei tubi di sezione poco variabile.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.4, p. 543–550.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_543_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Su le onde di rarefazione nei canali e nei tubi di sezione poco variabile.

Nota di GIUSEPPE AYMERICH (a Cagliari)

Sunto. - *Si studia la perturbazione di un'onda di rarefazione completa di un gas perfetto in un canale ed in un tubo di sezione poco variabile, stabilendo lo sviluppo di* FOURIER *o di* BESSEL-FOURIER *del potenziale di velocità.*

Summary. - *Author studies the perturbation of a complete rarefation wave of a perfect gas in a channel and in a tube of lightly variable section. establishing the* FOURIER *and* FOURIER-BESSEL *expansion of the potential of velocity.*

1. Un certo interesse tecnico, in riferimento alle gallerie aerodinamiche, presenta lo studio di un'onda di rarefazione di un gas in un canale la cui sezione sia per un certo tratto lievemente variabile. L'incurvamento delle pareti genera nell'onda principale una perturbazione in cui si possono distinguere due fasi: per un certo tempo, cioè fino a quando i fronti delle onde secondarie provenienti dalle pareti non si incontrano, gli effetti delle due sponde restano indipendenti tra loro; successivamente tali effetti interagiscono e si confondono. Della seconda fase, nell'ipotesi semplificatrice che l'onda principale sia *completa*, si è occupato W. CHESTER [1], il quale, ammessa l'irrotazionalità del moto e stabilita l'equazione cui soddisfa in prima approssimazione il potenziale di velocità dell'onda secondaria, ha studiato il valor medio di tale funzione attraverso la generica sezione trasversale del canale.

I risultati di questo Autore forniscono una indicazione soddisfacente sulla natura del moto se la sezione del canale è abbastanza stretta; in caso contrario appare desiderabile una più approfondita analisi del problema ed a questo scopo è rivolto il presente lavoro. Utilizzando una forma più semplice della equazione di CHESTER, da me indicata in un'altra Nota [2], ho asse-

[1] W. CHESTER, *Unsteady compressible flow in ducts*, « Q. Mech. appl. Math. », VII, Oxford 1954.

[2] G. AYMERICH, *Diffrazione e riflessione di un'onda di rarefazione completa in un canale*, « Rend. Sem. Fac. Sc. Università di Cagliari », XXVIII (1958), f. 3-4.

gnato lo sviluppo in serie di FOURIER rispetto alla coordinata trasversale del potenziale di velocità, riducendo a semplici quadrature il calcolo dei coefficienti della serie, dipendenti dalla coordinata longitudinale e dal tempo.

Ho poi mostrato come ricorrendo ad uno sviluppo di FOURIER–BESSEL si possa trattare nello stesso modo l'analogo problema per i tubi di sezione circolare, il qual caso è forse più importante dal punto di vista applicativo.

2. Prendendo dapprima in esame il caso del canale bidimensionale, considero un sistema di coordinate cartesiane X, Y, solidale con la sponda e con l'asse X coincidente con l'asse del canale. Rinviando per l'impostazione del problema ai lavori citati, ricordo che, detta a_0 la velocità del suono nel fluido in quiete ed introdotte le nuove variabili

$$x = X + \frac{2}{\gamma - 1} a_0 t, \qquad y = \frac{\sqrt{(3-\gamma)(\gamma+1)}}{\gamma - 1} Y, \tag{1}$$

$$\theta = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left(\frac{X}{a_0 t} + \frac{2}{\gamma - 1}\right)$$

per la funzione perturbatrice φ del potenziale di velocità si ha l'equazione indefinita

$$\varphi_{xx} - \alpha \frac{\theta}{x} \varphi_{x\theta} - \varphi_{yy} = 0 \tag{2}$$

essendo $\alpha = 2\dfrac{\gamma - 1}{3 - \gamma}$. Operando l'ulteriore sostituzione di variabili

$$\xi = \theta^{-\frac{2}{\alpha}}, \qquad \eta = \left(x \theta^{\frac{1}{\alpha}}\right)^2 \tag{3}$$

ed introducendo la nuova funzione incognita

$$f(\xi, \eta, y) = \xi^{-\frac{1}{2}} \varphi(x, \theta, y), \tag{4}$$

la (2) assume la forma più semplice

$$4 f_{\xi\eta} - f_{yy} = 0. \tag{5}$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, supposte le sponde simmetriche rispetto all'asse X e considerata l'equazione della sponda superiore

$$Y = B + F(X),$$

essendo B una costante (semilarghezza del canale) ed $F(X)$ una funzione liscia a tratti, che si mantiene piccola in modulo, si ha

$$f_y(\xi, \eta, 0) = 0, \tag{6}$$

$$f_y(\xi, \eta, b) = \frac{2a_0}{\sqrt{(\gamma+1)(3-\gamma)}} \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}}} F'(\eta^{1/2} z(\xi)),$$

dove per brevità si è posto

$$b = \frac{\sqrt{(3-\gamma)(\gamma+1)}}{\gamma - 1} B$$

e

$$z(\xi) = \xi^{1/2}\left(1 - \frac{2}{\gamma+1}\xi^{\alpha/2}\right).$$

Inoltre la $f(\xi, \eta, y)$ si deve annullare insieme con le sue derivate per $\xi = 1$ (testa dell'onda) e per $\eta = 0$ (coda dell'onda).

Applico adesso la trasformazione coseno di Fourier rispetto alla variabile y nell'intervallo $(0, b)$. Indicato con n un qualsiasi numero intero non negativo e considerata la trasformata

$$p_n(\xi, \eta) = \int_0^b f(\xi, \eta, y) \cos \frac{n\pi y}{b}\, dy$$

dalla (5), tenendo conto delle (6), si trae l'equazione

$$\frac{\partial^2 p_n}{\partial\xi\partial\eta} + k_n^2 p_n = \frac{(-1)^n}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=b} \tag{7}$$

essendo

$$k_n = \frac{n\pi}{2b}.$$

Alla (7) si debbono poi associare le condizioni al contorno [3]

$$p_n(1, \eta) = 0. \qquad p_n(\xi, 0) = 0.$$

Poichè è nota la funzione di RIEMANN relativa alla (7), che per il punto ξ_0, η_0 è data da [4]

$$J_0[2k_n\sqrt{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}]$$

il problema si risolve per quadrature e, osservato che per le (3) e le (1) risulta

$$X = \eta^{1/2}z(\xi), \tag{8}$$

si ottiene

$$p_n(\xi_0, \eta) = \tag{9}$$

$$= \frac{(-1)^n a_0}{2\sqrt{(3-\gamma)(\gamma+1)}} \int_1^{\xi_0} \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi \int_0^{\eta_0} J_0[2k_n\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta_0 - \eta)}]F'(\eta^{1/2}z(\xi)\, d\eta.$$

Ritornando poi alla funzione $f(\xi, \eta, y)$ per la primitiva funzione $\varphi(X_0, Y_0, t_0,)$ si perviene allo sviluppo

$$\varphi(X_0, Y_0, t_0) = \frac{\xi_0^{1/2}}{b}\left[p_0(\xi_0, \eta_0) + 2 \sum_1^{\infty}{}_n\, p_n(\xi_0, \eta_0) \cos \frac{n\pi y_0}{b}\right] \tag{10}$$

dove gli argomenti ξ_0, η_0, y_0, si esprimono in funzione di X_0, Y_0 e t_0 attraverso le (3) e le (1).

3. Il procedimento sopra indicato per un canale può applicarsi, servendosi della trasformazione di HANKEL in luogo di quella di FOURIER, al caso di un tubo di sezione circolare. In questo caso, com'è facile riconoscere, la funzione perturbatrice φ è retta, in

(3) Essendo la curva portante i dati al contorno costituita da due semirette caratteristiche il problema per la p_n si può ritenere ben posto.

(4) V. ad es. F. TRICOMI, *Equazioni a derivate parziali*, Gheroni, Torino 1954, p. 222; con J_0 si intende la funzione di BESSEL di prima specie di ordine zero.

luogo della (2), dalla equazione

$$\varphi_{xx} - \alpha \frac{\theta}{x} \varphi_{x\theta} - (\varphi_{yy} + \frac{1}{y} \varphi_y) = 0,$$

dove la y è ancora data dalla seconda delle (1) purchè ivi per Y si intenda adesso la distanza dall'asse del tubo. Con le stesse sostituzioni (3) e (4) si ottiene pertanto

$$4f_{\xi\eta} - (f_{yy} + \frac{1}{y} f_y) = 0, \tag{11}$$

mentre le condizioni al contorno restano inalterate, con la intesa che, detto R il raggio medio del tubo, la costante b sia data adesso da

$$b = \frac{\sqrt{(3-\gamma)(\gamma+1)}}{\gamma - 1} R.$$

Considerata la trasformata

$$q_n(\xi, \eta) = \int_0^b y f(\xi, \eta, y) J_0(\beta_n y) dy$$

essendo β_n la n^{ma} radice dell'equazione $J_0'(\beta b) = 0$, dalla (11) si trae

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial\xi\partial\eta} + k_n^2 q_n = \frac{b}{4} J_0(\beta_n b) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=b}, \tag{12}$$

dove la costante k_n ha adesso il valore

$$k_n = \frac{1}{2} \beta_n.$$

La (12) ha la stessa forma della (7) e poichè valgono le medesime condizioni al contorno per la q_n si ottiene

$$q_n(\xi_0, \eta_0) =$$

$$= \frac{a_n b J_0(\beta_n b)}{2\sqrt{(\gamma+1)(3-\gamma)}} \int_1^{\xi_0} \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi \int_0^{\eta_0} J_0[\beta_n \sqrt{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}] F'[\eta^{1/2} z(\xi)] d\eta.$$

Il teorema d'inversione fornisce adesso per la φ lo sviluppo

$$\varphi(X_0, r_0, t_0) = \frac{2}{b^2}\xi_0^{1/2}\sum_0^\infty{}_n \frac{q_n(\xi_0, \eta_0) J_0(\beta_n y_0)}{J_0'(\beta_n b)}. \tag{13}$$

4. Poichè, come si è visto i coefficienti degli sviluppi (10) e (13) differiscono soltanto per un fattore costante, mi riferisco d'ora in avanti al solo caso del canale.

La (9) acquista una forma semplice ed espressiva quando l'andamento della sponda è del tipo « a gradino » ossia quando

$$F(X) = \varepsilon H(X - l) \tag{14}$$

essendo $H(x)$ la funzione di HEAVISIDE, ε un numero molto piccolo ed l un qualsiasi numero non negativo. In questa ipotesi, posto

$$A_n = \frac{(-1)^n a_0}{2\sqrt{(\gamma+1)(3-\gamma)}}\,\varepsilon$$

si trae

$$p_n(\xi_0, \eta_0) = A_n \int_1^{\xi_0} \xi^{\alpha/2}\frac{1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}}}\,d\xi \int_0^{\eta_0} J_0[2k_n\sqrt{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}]\,\delta(X-l)\,d\eta \tag{15}$$

dove $\delta(x)$ è la funzione di DIRAC e la X si intende, naturalmente, espressa in funzione di ξ e η, a norma della (8).

Si è così condotti a considerare l'integrale semplice

$$\int_0^{\eta_0} J_0[2k_n\sqrt{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}]\,\delta\left(\eta^{1/2} - \frac{l}{z(\xi)}\right)d\eta, \tag{16}$$

in cui il parametro ξ può essere comunque fissato tra 1 e ξ_0. Tale integrale è nullo se

$$\eta_0^{1/2} < \frac{l}{z(\xi)}:$$

poichè la funzione $z(\xi)$ è decrescente per $\xi \geq 1$ e poichè $\eta = x^2$ e $z = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$ per $\xi = 1$ ne segue che la $\varphi(X, Y, t)$ è identicamente nulla per $x \leq \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} l$. Se l'onda di rarefazione si immagina prodotta da un pistone che si sposti nel canale verso la banda opposta a quella dove è contenuto il fluido, ciò significa che esiste una zona a contatto col pistone di larghezza $\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} l$ che non viene influenzata dalla perturbazione prodotta dal gradino (5).

Supposto poi che $z(\xi)\eta_0^{1/2} > l$, conviene distinguere i due casi

1°) $X_0 > l$. Per la (8) risulta allora $\eta_0^{1/2} z(\xi) > l$ per qualsiasi valore di ξ e la (15) fornisce

$$(17) \quad p_n(\xi_0, \eta_0) = 2A_n l \int_1^{\xi_0} \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}} z^2(\xi)} J_0 \left[2k_n \sqrt{(\xi_0 - \xi)\left(\eta_0 - \frac{l^2}{z^2(\xi)}\right)} \right] d\xi.$$

2°) $X_0 < l$. In questo caso esiste uno ed un solo valore ξ_1 di ξ per cui $\eta_0^{1/2} z(\xi) = l$, mentre per $\xi < \xi_1$ si ha $\eta_0^{1/2} z(\xi) < l$; pertanto si ha

$$(18) \quad p_n(\xi_0, \eta_0) = 2A_n l \int_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}} z^2(\xi)} J_0 \left[2k_n \sqrt{(\xi_0 - \xi)\left(\eta_0 - \frac{l^2}{z^2(\xi)}\right)} \right] d\xi.$$

È agevole riconoscere che per $n = 0$ le formule (17) e (18) forniscono i risultati ottenuti da CHESTER nel lavoro citato. Infatti si ha $k_0 = 0$, onde, ricordando che $J_0(0) = 1$, si ottiene

per $X_0 > l$

$$p_0(\xi_0, \eta_0) = 2A_0 l \int_1^{\xi_0} \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}} z^2(\xi)} d\xi,$$

(5) Va rilevato che tale proprietà era stata indicata da CHESTER per il solo valor medio della φ; da quanto precede segue che essa vale per qualunque armonica e quindi per la φ.

per $X_0 < l$

$$p_0(\xi_0, \eta_0) = 2A_0 l \int\limits_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}} z^2(\xi)} d\xi,$$

dalle quali si passa subito alle formule date da Chester mediante la sostituzione di variabile

$$u = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left[1 - \frac{2}{\gamma + 1}\xi^{\alpha/2}\right]^{-1}.$$

Per $n > 0$ le formule (17) e (18) riescono più complesse e non sembra facile dedurne una interpretazione fisica finchè non si passi a calcoli numerici, cui del resto le formule stesse si prestano abbastanza bene.

Infine, osservato che per una funzione $F(X)$ qualsiasi può scriversi

$$F(X) = \int\limits_0^{\infty} F'(X) H(X - l) dl,$$

per il principio di sovrapposizione, dalle formule precedenti si trae

$$p_n(\xi_0, \eta_0) = 2A_n \left\{ \int\limits_0^{X_0} lF'(l) dl \int\limits_1^{\xi_0} \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}} z^2(\xi)} J_0\left[2k_n \sqrt{(\xi_0 - \xi)\left(\eta_0 - \frac{l^2}{z^2(\xi)}\right)}\right] d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{X_3}^{\infty} lF'(l) dl \int\limits_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}} z^2(\xi)} J_0\left[2k_r \sqrt{(\xi_0 - \xi)\left(\eta_0 - \frac{l^2}{z^2(\xi)}\right)}\right] d\xi \right\}$$

la quale fornisce il generico coefficiente della serie (10), o (13), per una sponda di forma arbitraria.