Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giovanni Crupi

Sulla velocità di gruppo nella magneto-idrodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.4, p. 539–542.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_539_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Sulla velocità di gruppo nella magneto-idrodinamica.

Nota di GIOVANNI CRUPI (a Messina)

Sunto. - *Si studia il legame, in termini finiti, tra la velocità di gruppo e la velocità di fase delle onde magneto-idrodinamiche che si propagano in un fluido incomprimibile, elettricamente conduttore, mobile in una regione che è sede di un campo magnetico esterno.*

Summary. - *A relationship between group velocity and phase velocity into magnetohydrodynamics.*

In recenti lavori sono state stabilite delle semplici relazioni di proporzionalità fra la velocità di gruppo e la velocità di fase delle onde elettromagnetiche propagantisi in un corpo rigido, elettricamente conduttore, in quiete [1] oppure animato da moto traslatorio uniforme [2] rispetto al sistema inerziale di osservazione. Nel caso in cui la sede conduttrice sia mobile, è stato dimostrato, in particolare, che il fattore di proporzionalità varia con l'angolo che la direzione di propagazione forma con la direzione del moto del conduttore.

Continuando nell'indirizzo dei lavori citati, in questa Nota mi sono proposto di studiare il legame, in termini finiti, tra la velocità di gruppo e la velocità di fase delle onde magneto-idrodinamiche che si propagano in un fluido incomprimibile, elettricamente conduttore, mobile in una regione che è sede di un campo magnetico esterno di induzione $\boldsymbol{B}_0$.

Per quello che è a me noto, una tale ricerca — nel caso in cui la direzione di propagazione delle onde sia diversa da quella del campo esterno impresso $\boldsymbol{B}_0$ — non è stata fatta. Considerazioni riguardanti la relazione tra velocità di gruppo e velocità di fase nella magneto-idrodinamica, però limitatamente ad onde che si propagano nella direzione del campo esterno impresso, si trovano

(1) NARDINI R., *Sulla velocità di gruppo nei mezzi elettricamente conduttori*, « Boll. U. M. I. », Vol. 12, 1957, pp. 523-525.

(2) CRUPI G., *Sulla velocità di gruppo nei conduttori in moto*, « Rend. Lincei », serie VIII, vol XXV, 1958.

in una Nota di NARDINI [3]. L'Autore fonda il suo lavoro sul sistema di EULER-MAXWELL introdotto da ALFVÉN [4].

Il risultato a cui pervengo è rappresentato dalla seguente formula

$$W_g = \frac{1}{1-a} W_f ,$$

dove a è un numero positivo minore di uno, il cui valore, come sarà dimostrato nel seguito, dipende dall'angolo θ che la direzione di propagazione $\boldsymbol{u}$ delle onde forma col campo impresso $\boldsymbol{B}_0$.

1. Per risolvere il problema nella maniera più breve, mi ricollego ad una mia precedente Nota [5], in cui, trascurando la densità di corrente di spostamento rispetto a quella di conduzione, ho dimostrato che sono compatibili col sistema di EULER-MINKOWSKI onde magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione $\boldsymbol{u}$, diversa da quella del campo esterno $\boldsymbol{B}_0$. In particolare, ho dimostrato che la ricerca di codeste onde si può ricondurre alla integrazione di un'equazione differenziale del terzo ordine ed, utilizzando tale equazione, ho trovato per la velocità di fase la seguente formula

$$W_f = \frac{(V^4 \cos^4\theta + m^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2} V^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}\sqrt{V^4\cos^4\theta + m^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{1}$$

dove $V^2 = \frac{B_0{}^2}{\rho\mu}$ ed $m = \frac{c^2}{\mu\sigma}$. Nella (1) θ indica l'angolo che la direzione di propagazione delle onde $\boldsymbol{u}$ forma col campo esterno impresso $\boldsymbol{B}_0$, ρ la densità del fluido, σ la conducibilità elettrica, c la velocità della luce nel vuoto, ε la costante dielettrica e μ la permeabilità magnetica.

(3) NARDINI R., *Su particolari campi alternativi della magneto-idrodinamica*, «Atti Acc. delle Scienze di Torino», 89, (1954-55), 17-36.

(4) ALFVÉN H., «Arkiv für matematik, astronomi, fysik», Bd. 29 n. 2, 1942. *Cosmical electrodynamics*, cap. IV, Oxford University Press, 1950.

(5) CRUPI G., *Sulle onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione*, «Boll. U.M.I.», Vol. 12, pp. 604-609.

2. Passiamo adesso al calcolo della velocità di gruppo, fondandoci sulla nota formula [6]

$$\frac{1}{W_g}=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{W_f}\right)$$

da cui

$$\frac{1}{W_g}=\frac{1}{W_f}+\omega\frac{d\frac{1}{W_f}}{d\omega}. \tag{2}$$

Prima di proseguire oltre nel calcolo, conviene scrivere la (1) nella forma più adatta ai nostri scopi

$$\frac{1}{W_f}=\frac{\sqrt{V^2\cos^2\theta+A}}{\sqrt{2A}}, \tag{3}$$

essendo

$$A=\sqrt{V^4\cos^4\theta+m^2\omega^2}. \tag{4}$$

Poichè, in virtù delle (3) e (4), $\frac{1}{W_f}$ è funzione di ω per il tramite di A, si ottiene facilmente che

$$\frac{d\frac{1}{W_f}}{d\omega}=\frac{d\frac{1}{W_f}}{dA}\frac{dA}{d\omega}=-\frac{(2V^2\cos^2\theta+A)m^2\omega}{2\sqrt{2}A^3\sqrt{V^2\cos^2\theta+A}}$$

e quest'ultima, dopo la (3), assume la forma

$$\frac{d\frac{1}{W_f}}{d\omega}=-\frac{(2V^2\cos^2\theta+A)m^2\omega}{2W_fA^2(V^2\cos^2\theta+A)}. \tag{5}$$

Infine, sostituendo la (5) nella (2), mediante passaggi elementari si trova la seguente relazione, annunciata nella premessa, tra la velocità di gruppo e la velocità di fase

$$W_g=\frac{1}{1-a}W_f \tag{6}$$

[6] STRATTON J. A., *Teoria dell'elettromagnetismo*, Torino, Einaudi, 1952.

con

$$a = \frac{(2V^2 \cos^2 \theta + A) m^2 \omega^2}{2(V^2 \cos^2 \theta + A) A^2}. \tag{7}$$

La (7) esprime che il coefficiente di proporzionalità $\frac{1}{1-a}$, è in generale, una funzione dell'angolo che la direzione u di propagazione dell'onda forma col campo impresso $\boldsymbol{B}_0$.

Dimostriamo che il numero a, definito dalla (7), è minore di uno.

Dalla (7) si deduce immediatamente che

$$0 < a < 1$$

perchè — per qualunque valore finito di σ —

$$2V^2 \cos^2 \theta + A < 2(V^2 \cos^2 \theta + A)$$

ed

$$m^2 \omega^2 < A^2.$$

Ne segue che $\frac{1}{1-a}$ è sviluppabile in serie geometrica, e quindi, se supponiamo di poter trascurare i termini di ordine superiore al primo, la (6) è suscettibile di assumere la forma ancora più semplice

$$W_g = (1 + a) W_f.$$

Chiudiamo il lavoro fissando l'attenzione sul caso particolare in cui $\sigma \to \infty$.

In tal caso, in virtù delle (1) e (7) si ha

$$\lim_{\sigma \to} W_f = \frac{1}{\sqrt{\rho\mu}} | B_0 \cos \theta |, \tag{8}$$

$$\lim_{\sigma \to \infty} a = 0. \tag{9}$$

Dunque, tenendo conto delle (8) e (9), la (6) si specializza nella

$$W_g = W_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} | B_0 \cos \theta |,$$

la quale esprime che per $\sigma \to \infty$ la velocità di gruppo coincide con la velocità di fase.