
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BELLINO ANTONIO ROSINA

**Sui multilateri sghembi connessi in
relazione alla classificazione delle curve
algebriche sghembe.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 13
(1958), n.4, p. 525–530.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_525_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_525_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sui multilateri sghembi connessi in relazione alla classificazione delle curve algebriche sghembe.

Nota di BELLINO ANTONIO ROSINA (a Ferrara)

Sunto. - È contenuto nel n. 1.

Summary. - Contained in n. 1.

1. Mentre HALPHEN ⁽¹⁾ e NOETHER ⁽²⁾ per la classificazione delle curve algebriche sghembe prive di singolarità si sono serviti delle superficie di ordine minimo aventi per intersezione (totale o parziale) le curve delle varie famiglie, SEVERI ⁽³⁾, in una serie di ricerche fondamentali, ha ripreso il problema e lo ha trattato da un altro punto di vista basandosi sulla considerazione delle curve spezzate (in particolare multilateri) in esse contenute.

Può avere allora particolare interesse, stabilire quali e quanti siano i multilateri sghembi di dato ordine e genere, non isomorfi ⁽⁴⁾, e verificare, caso per caso, se ognuno di essi sia, o no, contenuto in una famiglia di curve irriducibili dello stesso ordine e genere.

Nella presente Nota metto appunto in rilievo, in primo luogo, il metodo dato ed il procedimento seguito onde ottenere, per ogni ordine e genere, *tutti* i tipi possibili di multilateri sghembi con $n + p - 1$ vertici di connessione e il cui genere sia minore od uguale al genere massimo delle curve algebriche sghembe dello stesso ordine, dando i risultati per $n \leq 7$.

In secondo luogo, adoperando opportunamente il metodo di « piccola variazione » determino per i valori di $n \leq 7$ quei multilateri che sono limite di curve algebriche sghembe irriducibili dello stesso ordine e genere.

⁽¹⁾ G. HALPHEN, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques*, « Journal de l'Ecole Polytechnique », t. 52, 1882, pp. 1-200.

⁽²⁾ M. NOETHER, a) *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven*, « Abhand. Akad. d. Wissenschaften zu Berlin » 1882; b) *Journal für die reine und ang. Math.* Bd. 83, 1882.

⁽³⁾ F. SEVERI, a) *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Berlin 1921 b) *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema di esistenza di Riemann*, « Rend. Acc. Lincei », Serie 5, Roma, 1915.

⁽⁴⁾ Chiamando, con SEVERI, *isomorfi* due n -lateri che hanno lo stesso schema di connessione ossia tali che si possa porre fra i loro lati una corrispondenza biunivoca in modo che a due lati incidenti dell'uno corrispondano due lati incidenti dell'altro, e viceversa, v. F. SEVERI, loc. cit. ⁽³⁾ in b) a p. 1016.

2. Indicati con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ i vari lati del multilatero, con (α_r, α_s) , ($r, s = 1, 2, \dots, n$) i suoi vertici (di connessione) e con x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) il numero dei vertici del multilatero che stanno sul lato α_i , sussiste la relazione

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n + 2p - 2$$

che considerata come equazione indeterminata ⁽⁵⁾ nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, si risolverà per valori interi e positivi, tenendo presente che $1 \leq x_i \leq n - 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Fra le soluzioni aritmetiche della (1), come facilmente si può verificare caso per caso, alcune non corrispondono a possibilità geometriche e vanno scartate, alle rimanenti corrispondono invece effettivi multilateri di ordine n e genere p con $n + p - 1$ vertici di connessione.

Resta così un certo numero di gruppi di valori per $x_1, x_2, \dots, x_n$, gruppi che corrispondono a tutti i possibili multilateri sghebbi d'ordine n e genere p esistenti, con $n + p - 1$ vertici di connessione.

I multilateri appartenenti ad uno stesso gruppo di valori $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ diremo che hanno lo stesso *schema di distribuzione dei vertici*, mentre lo *schema di connessione dei vertici* ha, si intende, il significato consueto ⁽⁶⁾.

3. Per individuare tutti i multilateri sghebbi di ordine n e genere p che appartengono ai vari schemi di distribuzione, possiamo procedere nel modo seguente.

Notiamo anzitutto che esistendo un sol tipo di multilateri di ordine 2 [ovviamente di genere zero e che indicheremo con L_2^0 , ⁽⁷⁾] basterà aggiungere ad esso una sua qualunque unisecante ⁽⁸⁾ e si darà così origine all'unico tipo esistente di trilateri sghebbi L_3^0 .

È altresì ovvio che aggiungendo ad un trilatero sgembo una sua opportuna bisecante si dà origine ad un quadrilatero L_4^1 ed aggiungendovi una opportuna unisecante si dà origine ad un quadrilatero L_4^0 , esaurendo così la ricerca dei quadrilateri.

I cinquelateri sghebbi, come è noto, possono essere di genere 2, di genere 1 oppure di genere zero (tenendo presente che ci

⁽⁵⁾ v. M. PIAZZOLLA BELOCH, *Sui multilateri sghebbi connessi*, «Rend. Acc. Naz. Lincei, Vol. XII, serie 6, Roma, 1930.

⁽⁶⁾ v. loc. cit. ⁽³⁾ in b).

⁽⁷⁾ Indicando con L_n^p un multilatero di ordine n e genere p .

⁽⁸⁾ Ritenendo per *y-secante* di un multilatero una retta che si appoggi ad y suoi lati, in punti che non siano comuni a due di essi.

siamo proposti di considerare solo i multilateri aventi genere massimo eguale a quello delle curve algebriche sghembe dello stesso ordine).

Determineremo, in primo luogo, tutti i tipi di cinquelateri sghembi di genere 2 aggiungendo ad un quadrilatero, il cui genere indichiamo con x , quella opportuna y -secante s_y onde ottenere un multilatero L_5^2 . Dovrà aversi:

$$L_4^x + s_y = L_5^2$$

dove x potrà assumere i valori uno o zero ed è inoltre $1 \leq y \leq 3$.

Tenendo ora presente la formula che fornisce il genere di una curva connessa spezzata si trova l'equazione indeterminata

$$x + y = 3$$

che risolveremo per interi e positivi, tenendo presenti le limitazioni più sopra poste, ottenendo così le soluzioni $x=0$, $y=3$; $x=1$, $y=2$. Tutti i cinquelateri L_5^2 esistenti si trovano dunque aggiungendo una trisecante ad un L_4^0 , e una bisecante ad un L_4^1 .

Analogamente si procederà per ottenere i cinquelateri di genere uno e di genere zero.

4. In generale supposto dati tutti i multilateri sghembi di ordine $n-1$ per i quali il genere varia fra 0 e $\frac{(n-3)^2}{4}$ se $n-1$ è pari e fra 0 e $\frac{(n-2)(n-4)}{4}$ se $n-1$ è dispari, si tratta di determinare il genere di quei multilateri per i quali con l'aggiunta di una opportuna y -secante si ottiene un multilatero di ordine n e genere p assegnati.

Indicando allora con x il genere, da determinarsi, del multilatero di ordine $n-1$ e con s_y la plurisecante da adoperare, si dovrà avere:

$$(2) \quad L_{n-1}^x + s_y = L_n^p$$

dove n e p sono prefissati.

Tenendo poi presente la nota formula che dà il genere di una curva connessa spezzata, segue la seguente equazione indeterminata nelle variabili x e y :

$$(3) \quad x + y = p + 1$$

dove x ha la limitazione suddetta, y è un intero qualsiasi compreso fra 1 ed $n-2$ e p è un intero dato compreso fra 0 e $\frac{(n-2)^2}{4}$ se n è pari e fra 0 ed $\frac{(n-1)(n-3)}{4}$ se n è dispari.

Risolvendo la (3) e discutendo, caso per caso, le soluzioni ottenute e, scartate quelle che non presentano possibilità geometrica, si potranno determinare effettivamente *tutti* i multilateri sghembi, esistenti e tra loro non isomorfi, di ordine n e genere p assegnati con $n+p-1$ vertici di connessione. Essi si inquadrano necessariamente nei vari schemi di distribuzione di cui al n. 2 poichè, come abbiamo visto, tutti i multilateri di ordine n e genere p sono ivi compresi. Con ciò si ottiene anche un'utile verifica dei risultati conseguiti.

5. Costruiti così tutti i multilateri non isomorfi di un dato ordine e genere e condotte per ognuno di essi le superficie di ordine minimo di cui sono intersezioni parziali o totali, applicando come sopra già accennato, in modo opportuno il metodo di « piccola variazione », si possono determinare quelli che con tale metodo si ottengono come casi limite di curve algebriche sghembe irriducibili dello stesso ordine e genere, e individuare le eventuali eccezioni. Ho eseguito al riguardo calcoli e costruzioni fino al settimo ordine incluso. Lo stesso metodo potrà applicarsi per gli ordini successivi $n=8$, $n=9$... proseguendo fino ad un ordine n alto quanto si vuole.

In un successivo lavoro pubblicherò dettagliatamente i risultati ottenuti, limitandomi in questa Nota a trattare, a titolo di esempio, il caso $n=7$, $p=6$.

6. Supponiamo di avere a disposizione tutti i multilateri sghembi di ordine 6 e genere p ($=4, 3, 2, 1, 0$) (precedentemente determinati) con $5+p$ vertici di connessione e procediamo alla costruzione di tutti i multilateri di ordine 7 e genere 6.

Dalla (1), posto $n=7$, $p=6$ si trae:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 24$$

dove $1 \leq x_i \leq 6$ ($i=1, 2, 3, \dots, 7$).

Risolvendo per interi (e positivi) e tenendo conto soltanto di quelle soluzioni aritmetiche che ammettono possibilità geometrica, segue che i soli multilateri possibili di ordine 7 e genere 6 con 12 vertici di connessione sono quelli che hanno i vertici soddisfacenti ai seguenti *schemi di distribuzione*:

- | | |
|------|------------------------|
| I) | [6, 4, 4, 4, 4, 1, 1] |
| II) | [6, 3, 3, 3, 3, 3, 3] |
| III) | [5, 5, 4, 4, 4, 1, 1] |
| IV) | [5, 4, 4, 4, 4, 2, 1] |
| V) | [4, 4, 4, 3, 3, 3, 3]. |

Per determinare poi effettivamente i multilateri cercati, indichiamo con L_6^x un multilatero di ordine 6 e genere x ($0 \leq x \leq 4$), supposto precedentemente trovato, e con s_y quella opportuna y -secante da aggiungere ad L_6^x onde ottenere un settelatero di genere 6. Si avrà allora:

$$L_6^x + s_y = L_7^6$$

da cui, applicando la (3):

$$x + y = 7$$

dove x, y sono numeri interi e positivi sottoposti alle limitazioni $0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 6$.

Risolta la precedente equazione indeterminata si hanno ovviamente le due sole soluzioni $x=3, y=4$; $x=4, y=3$.

Segue allora che tutti i settelateri di genere 6 e con 12 vertici di connessione si ottengono aggiungendo una quadrisecante ad un seilatero di genere 3, e una trisecante ad un seilatero di genere 4.

Così operando si ottengono tutti i possibili settelateri di genere massimo e per essi gli *schemi di connessione* sono i seguenti:

- 1) $(\alpha_1\alpha_2), (\alpha_1\alpha_3), (\alpha_1\alpha_4), (\alpha_1\alpha_5), (\alpha_1\alpha_6), (\alpha_1\alpha_7), (\alpha_2\alpha_3), (\alpha_2\alpha_4), (\alpha_2\alpha_5), (\alpha_3\alpha_4), (\alpha_3\alpha_5), (\alpha_4\alpha_5),$
- 2) $(\alpha_1\alpha_2), (\alpha_1\alpha_3), (\alpha_1\alpha_4), (\alpha_2\alpha_3), (\alpha_2\alpha_4), (\alpha_3\alpha_4), (\alpha_1\alpha_5), (\alpha_1\alpha_6), (\alpha_1\alpha_7), (\alpha_5\alpha_6), (\alpha_5\alpha_7), (\alpha_6\alpha_7),$
- 3) $(\alpha_1\alpha_2), (\alpha_1\alpha_3), (\alpha_1\alpha_4), (\alpha_1\alpha_5), (\alpha_2\alpha_3), (\alpha_2\alpha_4), (\alpha_2\alpha_5), (\alpha_3\alpha_4), (\alpha_3\alpha_5), (\alpha_4\alpha_5), (\alpha_1\alpha_6), (\alpha_2\alpha_7),$
- 4) $(\alpha_1\alpha_2), (\alpha_1\alpha_3), (\alpha_1\alpha_4), (\alpha_1\alpha_5), (\alpha_2\alpha_3), (\alpha_2\alpha_4), (\alpha_2\alpha_5), (\alpha_3\alpha_4), (\alpha_3\alpha_5), (\alpha_4\alpha_5), (\alpha_1\alpha_6), (\alpha_6\alpha_7),$
- 5) $(\alpha_1\alpha_4), (\alpha_1\alpha_5), (\alpha_1\alpha_6), (\alpha_1\alpha_7), (\alpha_2\alpha_4), (\alpha_2\alpha_5), (\alpha_2\alpha_6), (\alpha_3\alpha_7), (\alpha_3\alpha_4), (\alpha_3\alpha_5), (\alpha_3\alpha_6), (\alpha_3\alpha_7),$
- 6) $(\alpha_1\alpha_3), (\alpha_1\alpha_4), (\alpha_1\alpha_5), (\alpha_2\alpha_3), (\alpha_2\alpha_4), (\alpha_2\alpha_6), (\alpha_2\alpha_7), (\alpha_4\alpha_5), (\alpha_5\alpha_6), (\alpha_5\alpha_6), (\alpha_5\alpha_7), (\alpha_6\alpha_7)$

e non ne possono esistere altri ad essi non isomorfi.

È evidente che questi multilateri con i loro vertici soddisfano agli schemi di distribuzione I), II), III), IV), V) e V), rispettivamente.

È altresì facile verificare che soltanto il settelatero di schema di connessione 5) sta sopra una (e una sola) quadrica irriducibile, i settelateri di schemi 2), 4) e 6) stanno invece su quadriche spezzate ed i settelateri di schemi di connessione 1) e 3) non possono stare su quadriche nè irriducibili nè spezzate.

7. Ricordando che le curve di ordine 7 e genere 6, in quanto curve di genere massimo devono stare su quadriche, e osservando che i settelateri di schemi 1) e 3), come si è notato al n. precedente,

non soddisfano a questa condizione, si vede che essi non possono essere casi limite di curve irriducibili dello stesso ordine e genere ⁹⁾).

8. Procedendo con i settelateri rimanenti all'operazione di «piccola variazione» si trova che per i settelateri di schemi 2) e 4) tale operazione, comunque eseguita, non conduce mai ad una curva irriducibile, bensì ad una curva spezzata, di cui fanno parte uno o più lati del multilatero di partenza, quindi detti multilateri non si ottengono come limite di curve irriducibili dello stesso ordine e genere.

I settelateri di schemi 5) e 6) invece, per «piccola variazione» danno luogo a curve sghembe irriducibili dello stesso ordine e genere dei settelateri e si ottengono come intersezioni di quadriche con superficie del quarto ordine. Queste curve appartengono alla stessa famiglia $C_7^6[2, 4]$ della classificazione di HALPHEN e NOETHER e come caso limite hanno, rispettivamente, i settelateri 5) e 6).

Partendo per es. dal settelatero L_7^6 avente lo schema di connessione 5), siano F_2 e Φ_4 due superficie di ordine minimo passanti per esso (del secondo e del quarto ordine rispettivamente), segantisi oltre che in L_7^6 in una retta k residua e presa una superficie del quarto ordine Ψ_4 passante per k , superficie che possiamo supporre irriducibile, la superficie del fascio.

$$\Phi_4 + \lambda \Psi_4 = 0$$

che si ottiene per λ sufficientemente piccola, sega la quadrica F_2 secondo la retta k e una curva sghemba C_7^6 irriducibile, prossima a L_7^6 , curva che ha come caso limite, per $\lambda = 0$, il multilatero di partenza.

9. Possiamo concludere che la famiglia delle curve del settimo ordine e genere massimo $C_7^6[2, 4]$ è caratterizzata dai multilateri di schemi di connessione 5) e 6) e da questi soli ¹⁰⁾.

Analogamente, per ogni famiglia e sottofamiglia di curve della classificazione di HALPHEN e NOETHER ho determinato col metodo esposto, per gli ordini $n \leq 7$, i multilateri che le caratterizzano.

(⁹⁾ Fra essi quello di schema 3) è stato segnalato da F. SEVERI, v. loc. cit. (³)

(¹⁰) Ciò concorda con M. PIAZZOLLA BELOCH (*Multilateri sghembi e curve di genere massimo*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, T. LV, 1931).