GAETANO VILLARI

Su un problema al contorno per una classe di sistemi di equazioni alle derivate parziali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.4, p. 514–521.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_514_0>

Su un problema al contorno per una classe di sistemi di equazioni alle derivate parziali.

Nota di GAETANO VILLARI (a Firenze)

Sunto. - *Si dànno condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni continue di una classe di sistemi di equazioni alle derivate parziali, soddisfacenti prescritte condizioni al contorno.*

Summary. - *Sufficient condictions for the existence of continuous solutions for a class of systems of partial differential equations, with boundary condictions, are extablished.*

1. Nel volume sulle equazioni a derivate parziali di F. TRICOMI è trattato il problema dell'esistenza di soluzioni del sistema [1]

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(x,\ y)}{\partial x} = F[x,\ y,\ u(x,\ y),\ v(x,\ y)], \\[2mm] \dfrac{\partial v(x,\ y)}{\partial y} = G[x,\ y,\ u(x,\ y),\ v(x,\ y)], \end{cases}$$

soddisfacenti alle condizioni al contorno

$$(2)\qquad u(x_0,\ y) = U(y), \quad v(x,\ y_0) = V(x),$$

essendo $U(y)$ e $V(x)$ due funzioni definite e continue rispettivamente negli intervalli

$$y_0 \leq y \leq y_0 + b, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a, \qquad (a,\ b > 0).$$

Il sistema (1) può riguardarsi come una generalizzazione di quello cui si perviene dalla equazione di tipo iperbolico

$$(3)\qquad z_{xy} + a(x,\ y)z_x + b(x,\ y)z_y + c(x,\ y) = 0$$

con la sostituzione

$$(4)\qquad u = z, \quad v = z_x + bz\,;$$

[1] Cfr. F. TRICOMI, *Equazioni a derivate parziali*, Roma 1957, p. 117.

e sotto l'ipotesi della continuità delle funzioni F e G e della loro lipschitzianità rispetto ad u e v, è dimostrata l'esistenza e l'unicità, in un conveniente rettangolo, di una coppia di funzioni continue $u(x, y)$ e $v(x, y)$ che verificano il sistema (1) e le condizioni (2).

Se adesso pensiamo di operare con le (4) sulla equazione non lineare di tipo iperbolico

$$z_{xy} + a(x, y)z_x + b(x, y)z_y + f(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

ove si suppone $f(x, y, z)$ funzione continua dei suoi argomenti, perveniamo al sistema

$$\begin{cases} u_x = -bu + v, \\ v_y = (ab + b_y)u - f(x, y, u) - av, \end{cases}$$

che rientra nel tipo (1), ma per il quale non è in generale soddisfatta la lipschitzianità della G rispetto ad u [2], a meno che $f(x, y, z)$ sia lipschitziana rispetto a z.

D'altro canto, come è ben noto [3], la sola continuità di $f(x, y, z)$ è sufficiente a garantire l'esistenza di soluzioni della (5) che verificano prescritte soluzioni al contorno.

È perciò naturale domandarsi se non sia possibile risolvere il problema (1), (2) riducendo in qualche modo le ipotesi di Lipschitz sulla F e sulla G.

In questa Nota, adottando un metodo esistenziale di L. TONELLI [4] già usato nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, dimostreremo, al n. 2, il

TEOREMA: *Siano* $\mathrm{V}(\mathrm{x})$ *e* $\mathrm{U}(\mathrm{y})$ *due funzioni definite e continue rispettivamente negli intervalli* $\mathrm{x}_0 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{x}_0 + \mathrm{a}$, $\mathrm{y}_0 \leq \mathrm{y} \leq \mathrm{y}_0 + \mathrm{b}$; *se nel dominio chiuso*

$$D: 0 \leq x - x_0 \leq a, \quad 0 \leq y - y_0 \leq b, \quad |u - U| \leq A, \quad |v - V| \leq B,$$

(a, b, A, B, *costanti positive*) *le funzioni* $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{u}, \mathrm{v})$, $\mathrm{G}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{u}, \mathrm{v})$ *risultano continue, e se inoltre esiste una costante positiva* H *tale*

[2] Operando sulla (5) con la trasformazione $u = z_y + az$, $v = z$, si ottiene ancora un sistema del tipo (1), in cui non è in generale soddisfatta la lipschitzianità della F rispetto a v.

[3] Cfr. PH. HARTMAN - A. WINTNER, *On hiperbolic partial differential equations*, Am. J. of Math., 74 (1952), 834-864.

[4] Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte 1ª, Bologna 1948, p. 45.

che si abbia in D

$$| F(x, y, \bar{u}, v) - F(x, y, u, v) | < H | \bar{u} - u |,$$

$$| G(x, y, u, \bar{v}) - G(x, y, u, v) | < G | \bar{v} - v |,$$

allora, in un conveniente rettangolo

$$R : x_0 \leq x \leq x_0 + h, \quad y_0 \leq y \leq y_0 + k, \quad (0 < h \leq a, \quad 0 < k \leq b),$$

esiste almeno una coppia di funzioni u(x, y), v(x, y) *che soddisfano il sistema* (1), *verificano le condizioni* (2), *ed inoltre risultano continue in* R [5].

Mostreremo poi con un esempio, nel n. 3, che tale teorema non è più vero quando ci si limiti alla sola ipotesi di continuità delle funzioni F e G.

Infine, nel n. 4, è indicata una estensione dei risultati ottenuti al caso di n funzioni di n variabili indipendenti.

2. Dimostriamo in questo numero il Teorema enunciato.

Il problema (1), (2) risulta equivalente al sistema integrale

$$(6) \qquad \begin{cases} u(x, y) = U(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F[\xi, y, u(\xi, y), v(\xi, y)] d\xi , \\ v(x, y) = V(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} G(x, \eta, u(x, \eta), v(x, \eta)] d\eta . \end{cases}$$

Indicando con L un limite superiore di $|F|$ e $|G|$ in D, definiamo nel rettangolo

$$R: \quad \begin{array}{ll} x_0 \leq x \leq x_0 + h \quad , & h = \min(a, A/L), \\ y_0 \leq y \leq y_0 + k \quad , & k = \min(a, B/L), \end{array}$$

le successioni $\{u_n(x, y)\}$, $\{v_n(x, y)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ con la seguente legge:

$$(7_1) \qquad \begin{cases} u_1(x, y) = U(y), \\ v_1(x, y) = V(x), \end{cases} \quad \text{in tutto il rettangolo } R;$$

[5] Per la supposta continuità di F e G le funzioni u e v risulteranno anche dotate di derivate u_x e v_y continue.

$$
(7_n)\qquad\left\{\begin{array}{l}
u_n(x,\ y) = U(y),\ \text{nel rettangolo } S_1: \begin{cases} x_0 \leq x \leq x_0 + \dfrac{h}{n}, \\ y_0 \leq y \leq y_0 + k, \end{cases} \\[2ex]
v_n(x,\ y) = V(x),\ \text{nel rettangolo } S_2: \begin{cases} x_0 \leq x \leq x_0 + h, \\ y_0 \leq y \leq y_0 + \dfrac{k}{n}, \end{cases} \\[2ex]
u_n(x,\ y) = U(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x-\frac{h}{n}} F[\xi,\ y,\ u_n(\xi,\ y),\ v_n(\xi,\ y)]d\xi,\ \text{in } R - S_1, \\[2ex]
v_n(x,\ y) = V(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y-\frac{k}{n}} G[x,\ \eta,\ u_n(x,\ \eta),\ v_n(x,\ \eta)]d\eta,\ \text{in } R - S_2.
\end{array}\right.
$$

Qualunque sia l'indice n, si ha in R:

$$
|u_n(x,\ y) - U(y)| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |F[\xi,\ y,\ u_n(\xi,\ y),\ v_n(\xi,\ y)]|\, d\xi < Lh \leq A,
$$

$$
|v_n(x,\ y) - V(x)| \leq \int_{y_0}^{y_0+k} |G[x,\ \eta,\ u_n(x,\ \eta),\ v_n(x,\ \eta)]|\, d\eta < Lk \leq B;
$$

pertanto le funzioni $u_n(x,\ y)$, $v_n(x,\ y)$ risultano equilimitate in R, e in corrispondenza ai valori da esse assunti gli argomenti delle funzioni F e G appartengono al dominio D.

Si ha ancora, indicando con $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ due punti di R:

$$
(8)\qquad |u_n(x_2,\ y_2) - u_n(x_1,\ y_1)| \leq |u_n(x_2,\ y_1) - u_n(x_1,\ y_1)| + \\ + |u_n(x_2,\ y_2) - u_n(x_2,\ y_1)|.
$$

Per il primo termine che figura al secondo membro della (8) otteniamo

$$
(9)\quad |u_n(x_2,\ y_1) - u_n(x_1,\ y_1)| \leq \int_{x_1-\frac{h}{n}}^{x_2-\frac{h}{n}} F[\xi,\ y_1,\ u_n(\xi,\ y_1),\ v_n(\xi,\ y_1)]d\xi \leq L|x_2 - x_1|,
$$

e pertanto esso risulta infinitesimo con $|x_2 - x_1|$ uniformemente rispetto ad n.

Osserviamo poi che, ponendo

$$C_n = \int_{x_0}^{x_2 - \frac{h}{n}} | F[\xi, y_2, u_n(\xi, y_2), v_n(\xi, y_2)] - F[\xi, y_1, u_n(\xi, y_2), v_n(\xi, y_1)] | d\xi + \\ + | U(y_2) - U(y_1) |,$$

per la continuità delle funzioni $U(y)$, $F(x, y, u, v)$ rispettivamente in $(y_0, y_0 + b)$ e nel dominio chiuso D, e per il fatto che l'espressione

$$| v_n(\xi, y_2) - v_n(\xi, y_1) | \leq \int_{y_1 - \frac{k}{n}}^{y_2 - \frac{k}{n}} | G[\xi, \eta, u_n(\xi, \eta), v_n(\xi, \eta)] | d\eta \leq L | y_2 - y_1 |$$

risulta infinitesima con $| y_2 - y_1 |$ uniformemente rispetto ad n, segue che C_n può rendersi minore di una quantità arbitraria, indipendentemente da n, se $| y_2 - y_1 |$ non supera un conveniente numero, ossia

$$C_n = O(| y_2 - y_1 |), \quad \text{uniformemente rispetto ad } n. \tag{10}$$

Per il secondo termine che figura al secondo membro della (8) si ha allora

$$| u_n(x_2, y_2) - u_n(x_2, y_1) | \leq \int_{x_0}^{x_2 - \frac{h}{n}} | F[\xi, y_1, u_n(\xi, y_2), v_n(\xi, y_1)] - \\ - F[\xi, y_1, u_n(\xi, y_1), v_n(\xi, y_1)] d\xi + C_n < \\ < \int_{x_0}^{x_2} H | u_n(\xi, y_2) - u_n(\xi, y_1) | d\xi + C_n,$$

da cui, applicando il lemma di Gronwall, e per la (10):

$$| u_n(x_2, y_2) - u_n(x_2, y_1) | < C_n e^{hH} = e^{hH} \cdot O(| y_2 - y_1 |). \tag{11}$$

Per la (9) e la (11) il primo membro della (8) risulta infinitesimo, uniformemente rispetto a n, con la quantità $| x_2 - x_1 | + | y_2 - y_1 |$, e si conclude che le funzioni della successione $\{ u_n(x, y) \}$ sono equicontinue in R.

Con analogo procedimento si prova l'equicontinuità in R delle funzioni della successione $\{ v_n(x, y) \}$.

Per il teorema di ASCOLI è allora possibile estrarre dalle due successioni $\{u_n(x, y)\}$, $\{v_n(x, y)\}$ due sottosuccessioni di eguali indici convergenti, ed uniformemente in R, rispettivamente verso due funzioni $\bar{u}_n(x, y)$, $\bar{v}_n(x, y)$; e passando al limite per $n \to \infty$ nelle due ultime (7_n), si conclude che le funzioni

$$\begin{cases} \bar{u}(x, y) = U(y) + \int\limits_{x_0}^{x} F(\xi, y, \bar{u}(\xi, y), \bar{v}(\xi, y)]d\xi, \\ \bar{v}(x, y) = V(x) + \int\limits_{y_0}^{y} G[x, \eta, \bar{u}(x, \eta), \bar{v}(x, \eta)]d\eta, \end{cases}$$

continue in R, verificano il sistema (6) e rappresentano pertanto una soluzione del problema (1), (2).

3. Che il Teorema dimostrato al numero precedente non sia più valido in generale quando ci si limiti alla sola continuità delle funzioni F e G, può vedersi con il seguente esempio.

Si consideri il sistema

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{|u|} + y \operatorname{sen} \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

che rientra in quelli del tipo (1), eccettuato il fatto che la funzione

$$F(x, y. u, v) = \sqrt{|u|} + y \operatorname{sen} \frac{1}{y} \quad (^6)$$

risulta continua ma non lipschitziana rispetto ad u per $u = 0$.

Se valesse il Teorema dovrebbe esistere almeno una coppia di funzioni $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$, continue in un conveniente rettangolo

$$\bar{R} : 0 \leq x \leq h, \quad 0 \leq y \leq k, \quad (h, k > 0),$$

ivi soluzioni del sistema (12) e tali da soddisfare le condizioni

$$(13) \qquad \begin{cases} \bar{u}(0, y) = 0, & \text{per } 0 \leq y \leq k, \\ \bar{v}(x, 0) = 0, & \text{per } 0 \leq x \leq h. \end{cases}$$

(6) Si pone naturalmente $F(x, 0, u, v) = \sqrt{|u|}$.

Mostriamo che ciò non è possibile.

Infatti, qualunque sia k è sempre possibile determinare l'intero n in modo che l'intervallo $\left[\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{(2n-1)\pi}\right]$ risulti interno a $[0, k]$; e sarà in corrispondenza

$$\bar{u}_x(x, y) > \sqrt{|u|}, \quad \bar{u}_x(x, y) < \sqrt{|u|}, \qquad \text{per } 0 \leq x \leq h,$$

a seconda che si abbia $\frac{1}{2n\pi} < y < \frac{1}{(2n-1)\pi}$, ovvero $\frac{1}{(2n+1)\pi} < < y < \frac{1}{2n\pi}$.

Poichè, come è noto (7), l'equazione

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{|u|} \tag{14}$$

ammette un integrale massimo ed uno minimo distinti uscenti dal punto $x = 0$. ne segue che, per $\frac{1}{2n\pi} < y < \frac{1}{(2n-1)\pi}$ la superficie $u = \bar{u}(x, y)$ dovrà trovarsi al di sopra della superficie che si ottiene dall'integrale massimo della (14) per traslazione del piano (x, u), mentre, per $\frac{1}{(2n+1)\pi} < y < \frac{1}{2n\pi}$ dovrà trovarsi al di sotto di quella che si ottiene per traslazione dall'integrale minimo della (14).

Ciò esclude la continuità di $\bar{u}(x, y)$ nei punti del rettangolo $\bar{R}$ di ordinate $\frac{1}{2n\pi}$ e dimostra la non esistenza di soluzioni continue del problema (12), (13).

4. I risultati del Teorema enunciato nel n. 1. sono suscettibili di estensione al caso di n funzioni di n variabili indipendenti.

Si consideri il sistema

$$\frac{\partial u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = F_i[x_1, \dots, x_n;\ u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n)], \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{14}$$

ove le funzioni F_i sono supposte continue nel dominio chiuso

$$D:\ 0 \leq x_i - x_i^0 \leq a_i, \quad |u_i(x_1, \dots, x_n) - U_i(x_i)| \leq A_i$$

$$(a_i,\ A_i \text{ costanti positive}),$$

(7) Cfr. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte 2ª, Bologna 1949, p. 74.

essendo $U_i(x)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ n funzioni continue definite rispettivamente negli intervalli $x_i^0 \leq x \leq x_i^0 + a_i$.

Si supponga inoltre l'esistenza di una costante positiva H, tale che sia sempre verificato nel dominio D

$$| F_i(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_{i-1}, \bar{u}_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) -$$
$$- F_i(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) | < H\, | u_i - \bar{u}_i |.$$

In tali ipotesi esiste sempre almeno una n-pla di funzioni $u_i(x_1, \ldots, x_n)$, continue in un conveniente rettangolo

$$R: \qquad x^0_i \leq x \leq x_i^0 + h_i, \quad h_i = \min(a_i, A_i/L),$$

ove L rappresenta un limite superiore delle $|F_i|$ in D, che sodisfano il sistema (14) e verificano le condizioni iniziali

$$u_i(x^0_1, \ldots, x^0_{i-1}, x_i, x^0_{i+1}, \ldots, x^0_n) = U_i(x_i), \tag{15}$$
$$\text{per } x_i^0 \leq x_i \leq x_i^0 + h_i.$$

Basta infatti definire in R le n successioni

$$\{ u_i^m(x_1, \ldots, x_n) \}, \quad i = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots$$

con la seguente legge:

$$\begin{cases} u_i^1(x_1, \ldots, x_n) = U(x_i), \quad \text{in } R; \\[2ex] u_i^m(x_1, \ldots, x_n) = U(x_i), \text{ nel rettangolo } S_i \begin{cases} x^0_r \leq x_r \leq x^0_r + h_r, \\ r = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n, \\ x^0_i \leq x_i \leq x^0_i + \dfrac{h_i}{m} \end{cases} \\[4ex] u_i^m(x_1, \ldots, x_n) = U(x_i) + \displaystyle\int_{x^0_i}^{x_i - \frac{h_i}{m}} F_i[x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_n]\, d\xi_i, \\ \hfill \text{in } R - S_i, \end{cases}$$

e procedendo in modo analogo a quanto è stato fatto nel n. 2, si perviene all'esistenza di almeno una soluzione del sistema integrale

$$u_i(x_1, \ldots, x_n) = U(x_i) + \int_{x_i^0}^{x_i} F(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1};\ u_1, \ldots, u_n]\, d\xi_i,$$

il che equivale all'esistenza di almeno una soluzione del sistema (14), verificante le condizioni (15).