Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Sulle trasformazioni che posseggono un gruppo di coppie di corrispondenze in sè. Nota I.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.4, p. 486–496.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_486_0>

Sulle trasformazioni che posseggono un gruppo di coppie di corrispondenze in sè.

Nota I di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna)

Sunto. - *Si indicano alcune proprietà delle trasformazioni* T *che ammettono un gruppo* G *di coppie di corrispondenze in sé, assegnando una costruzione nel caso generale; queste considerazioni verranno applicate, in due Note successive (che appariranno in questo Bollettino), alla determinazione delle* T *fra piani per cui* G *è costituito da omografie.*

Summary. - *Some properties of transformations* T *which have a group* G *of couples of correspondances in themselves are given, with a construction for general case; in two other papers (which shall appear in this Bulletin) we shall found transformations for which* G *consists of homographies.*

§ 1.

1. Recentemente G. VRANCEANU [1] ha posto il problema della determinazione delle trasformazioni puntuali fra due piani che ammettono un gruppo di coppie d'omografie in sè. La questione posta dal VRANCEANU può generalizzarsi ad una corrispondenza fra due varietà generiche, su ciascuna delle quali è assegnato un gruppo continuo finito.

Il presente lavoro si suddivide in tre Note: nella prima si definisce anzitutto il concetto di gruppo G di coppie di corrispondenze; osservato che i due gruppi che trasformano in sè la T sono isomorfi, si dà una costruzione delle trasformazioni, fra due varietà assegnate, che sono mutate in sè da un gruppo di coppie di corrispondenze di due dati gruppi g, $\bar{g}$ operanti nelle due varietà, nel caso, assai frequente, in cui la dimensione delle varietà di transitività di g, $\bar{g}$ eguaglia il numero dei loro parametri; il problema viene riportato a quello della determinazione degli isomorfismi fra i gruppi g, $\bar{g}$. Si indica poi come si può procedere quando l'ipotesi indicata non si verifica. Si trasportano inoltre definizioni e risultati al caso in cui le due varietà coincidono.

(1) Cfr. G. VRANCEANU, *Sul tensore associato ad una corrispondenza ntuale fra spazi proiettivi*, « Boll. U. M. I. », (3) **12**, 489-506 (1957).

Nel seguito, si precisano queste proprietà e costruzioni, fissando la natura dei gruppi g, $\bar{g}$: così, nella Nota II, si suppone anzitutto che g, $\bar{g}$ siano gruppi di *movimenti* reali nel piano, e si dimostra che le trasformazioni che ammettono un gruppo intransitivo di coppie di movimenti in sè sono tutte e sole quelle che trasformano un fascio di rette parallele — o di cerchi concentrici — in un fascio di rette parallele — o di cerchi concentrici —, subordinando, fra curve corrispondenti, una *similitudine* il cui rapporto non varia passando da una coppia di curve ad un'altra: nel caso in cui i piani sono sovrapposti, le trasformazioni sono quelle che posseggono un fascio unito di rette parallele o di cerchi concentrici, subordinando fra curve corrispondenti un'*uguaglianza* (nel caso dei cerchi, s'intende uguaglianza d'angoli al centro). Quelle che ammettono un gruppo transitivo reale di coppie di movimenti sono invece le affinità.

Si determinano quindi le trasformazioni fra piani che ammettono un gruppo intransitivo di coppie di *similitudini* in sè: alle precedenti vanno aggiunte quelle corrispondenze che trasformano un fascio proprio di rette o un sistema di spirali logaritmiche in un sistema analogo. Si trovano pure le trasformazioni che sono mutate in sè da un gruppo transitivo di coppie di similitudini.

Si determinano poi le trasformazioni fra piani che posseggono un gruppo intransitivo di coppie d'omografie in sè: quando questi gruppi sono ∞^1, le trasformazioni mutano un sistema $\mathcal{C}$ di curve di KLEIN-LIE in un altro sistema $\bar{\mathcal{C}}$ di tali curve: se non si tratta di coniche o rette, tali trasformazioni sono quelle per cui la corrispondenza subordinata fra curve omologhe è esprimibile mediante una sostituzione lineare intera, a modulo costante (cioè indipendente dalla coppia di curve considerata), sugli archi proiettivi di curve corrispondenti: i gruppi di omografie Ω, $\bar{\Omega}$ sono quelli che hanno per *traiettorie* le curve $\mathcal{C}$, $\bar{\mathcal{C}}$. Le trasformazioni che ammettono due gruppi intransitivi ∞^2 d'omografie in sè sono invece: le trasformazioni di 2ª specie, le cui curve caratteristiche sono, in ciascun piano, rette di due fasci (esse sono mutate in sè da tutte le omologie, aventi per centro il centro del fascio delle caratteristiche doppie, e per asse una qualunque caratteristica semplice); le trasformazioni di 3ª specie, le cui caratteristiche sono, in ciascun piano, rette d'un fascio, fra rette corrispondenti essendo subordinata una proiettività (le omografie Ω, $\bar{\Omega}$ sono le omologie speciali aventi centro nei centri dei fasci delle caratteristiche).

Le corrispondenze fra piani sovrapposti che ammettono un gruppo ∞^1 d'omografie in sè sono tutte e sole quelle che posseggono una famiglia unita Φ di curve di KLEIN-LIE, e subordinano fra curve corrispondenti un'omografia, i cui punti uniti siano i punti base di Φ; le Ω sono le omografie per le quali le curve suddette sono le traiettorie. Infine, le trasformazioni fra piani sovrapposti con un gruppo intransitivo ∞^2 d'omografie in sè sono quelle che posseggono un fascio unito di rette ed un altro di rette unite (le Ω sono allora le omologie aventi per centro il centro del primo fascio, e per asse una retta del secondo); oppure le trasformazioni che hanno un fascio di rette unite, subordinando, su ciascuna retta, una proiettività parabolica il cui punto unito è il centro del fascio (le Ω sono in tal caso le omologie speciali aventi per centro il centro del fascio).

Nella Nota III, con metodo analogo si determinano le *trasformazioni puntuali fra piani sovrapposti* che posseggono un gruppo *transitivo* d'omografie in sè: è opportuno notare che la dimensione del gruppo massimo che può possedere una siffatta trasformazione è *quattro*, numero raggiunto solo dalle omologie (generali o speciali); se si fa astrazione da queste, la dimensione massima risulta essere *tre* (numero raggiunto da due tipi di trasformazioni che posseggono un fascio di rette unite). Si trovano pure alcuni tipi di trasformazioni fra piani distinti con un gruppo di coppie di omografie in sè.

Si determinano infine le *trasformazioni dualistiche* nel piano che ammettono un gruppo g (intransitivo o transitivo) di omografie in sè: giova notare che, se g è intransitivo, può essere solo ∞^1; se g è transitivo la sua dimensione è al più *tre,* massimo raggiunto solo dalle polarità, dalle correlazioni la cui omografia associata è un'omologia, e dal sistema nullo che si ottiene associando ad ogni punto P del piano la tangente in P alla conica, passante per P, d'un fascio con E_3 base.

Le Note II e III appariranno in fascicoli successivi di questo Bollettino.

2. Sia T una trasformazione fra due varietà F, $\bar{F}$ ad r dimensioni, e sia $\Omega\,(\bar{\Omega})$ una corrispondenza di $F(\bar{F})$ in sè. Diremo che Ω, $\bar{\Omega}$ mutano T in sè quando

$$\bar{\Omega}\,T = T\,\Omega. \tag{1}$$

L'insieme delle due corrispondenze Ω, $\bar{\Omega}$ si dirà *coppia di corrispondenze* di T in sè, e si indicherà con $(\Omega, \bar{\Omega})$. Un insieme G di tali coppie si dirà *gruppo di corrispondenze* quando sono soddisfatte le condizioni seguenti:

a) Prese due coppie di G

$$(\Omega_1, \bar{\Omega}_1), \qquad (\Omega_2, \bar{\Omega}_2),$$

la *coppia prodotto*, vale a dire la coppia

$$(\Omega_1 \Omega_2, \quad \bar{\Omega}_1 \bar{\Omega}_2)$$

appartiene ancora a G;

b) la *coppia inversa*

$$(\Omega^{-1}, \bar{\Omega}^{-1})$$

di ogni coppia $(\Omega, \bar{\Omega})$ di G appartiene pure a G ([2]).

In virtù delle condizioni *a*) e *b*), fa parte del gruppo anche la coppia costituita dalle due identità in F, $\bar{F}$.

3. Le corrispondenze Ω, $\bar{\Omega}$ costituenti le coppie di G formano manifestamente due gruppi g, $\bar{g}$ di trasformazioni (di F, $\bar{F}$, rispettivamente, in sé). In virtù della (1), si può dire che se due gruppi g, $\bar{g}$ mutano una trasformazione T in sè, questa realizza una similitudine fra g, $\bar{g}$; *questi ultimi sono quindi isomorfi* almeno localmente ([3]) (e quindi, in generale, non potranno assumersi ad arbitrio).

G è individuato perciò dai gruppi g, $\bar{g}$ e dall'isomorfismo $\mathfrak{J}$ fra di essi.

Assegnate due varietà F, $\bar{F}$, e due gruppi g, $\bar{g}$ operanti in F, $\bar{F}$ rispettivamente, si pone il problema di trovare le trasformazioni di F in $\bar{F}$ che ammettono un gruppo G di coppie di corrispondenze di g, $\bar{g}$ in sè. Supporremo senz'altro che i gruppi g, $\bar{g}$ siano

([2]) Sulla varietà prodotto $F \times \bar{F}$ la T è rappresentata da una V_r, ed una coppia di corrispondenze $(\Omega, \bar{\Omega})$ è rappresentata da una corrispondenza ω di $F \times \bar{F}$ in sè. Se T ammette un gruppo di coppie di corrispondenze in sè, V_r ammette un gruppo di corrispondenze ω in sè. In particolare, se F, $\bar{F}$ sono spazî lineari, come loro prodotto si può assumere la varietà V_{2r} di SEGRE; se T ammette, per di più, un gruppo G di coppie d'omografie in sè, la V_r rappresentativa ammette un gruppo d'omografie (sottogruppo del gruppo delle omografie che mutano in sè la varietà di SEGRE; cfr. M. VILLA-L. MURACCHINI, *Sulle corrispondenze fra superficie della varietà di* SEGRE, « Rev. de la Un. Mat. y de la Asoc. Fìs. Argentina » **17**, 329 334 (1955)).

([3]) Cfr. E. CARTAN, *La Théorie des Groupes Finis et Continus et l'Analysis Situs*, « Mem. Sc. Math. » XLII (Gauthier-Villars, Paris, 1930) p. 11. I due gruppi risultano isomorfi in grande allorchè, ad esempio, T è biunivoca e la dimensione delle varietà di transitività di g, $\bar{g}$ uguaglia il numero dei parametri da cui dipendono i gruppi.

continui e finiti: vediamo le condizioni cui debbono soddisfare. Il numero k dei parametri da cui essi dipendono deve essere lo stesso per i due gruppi (essendo questi isomorfi). Indichiamo poi con $h(\bar{h})$ la dimensione delle varietà di transitività $\mathfrak{F}(\bar{\mathfrak{F}})$ di $g(\bar{g})$; affinchè T sia regolare, dev'essere $h = \bar{h}$, in quanto le $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{F}}$ si debbono corrispondere a due a due in T; h è poi manifestamente non superiore nè a k nè ad r [4]. Se $h < k$, le varietà $\mathfrak{F}$ ed $\bar{\mathfrak{F}}$ hanno carattere eccezionale rispetto ai gruppi g, $\bar{g}$, in quanto questi operano su di esse in modo non semplicemente transitivo.

In particolare, si noti che due gruppi ad un parametro ($k = 1$ e quindi $h = 1$) sono sempre isomorfi, almeno localmente; se $k = 1$, *i due gruppi possono quindi scegliersi ad arbitrio.* I gruppi a due parametri sono invece isomorfi o al gruppo delle traslazioni o a quello delle sostituzioni lineari intere su una variabile; nel caso $k=2$, due gruppi sono quindi isomorfi se sono entrambi abeliani oppure se non lo è nessuno dei due: occorre poi, affinchè esista la T, che siano entrambi transitivi ($h = 2$), o entrambi intransitivi ($h = 1$).

Siano ora F, $\bar{F}$ due varietà, e g, $\bar{g}$ due gruppi isomorfi operanti in F, $\bar{F}$ rispettivamente, soddisfacenti alla $h = k$ $(\leq r)$. Si constata facilmente che tutte le trasformazioni T di F in $\bar{F}$ che sono mutate in sè da un gruppo di coppie di corrispondenze di g, $\bar{g}$ si possono così ottenere:

Consideriamo in $\mathrm{F}(\bar{\mathrm{F}})$ *un'arbitraria* $\mathrm{V}_{r-k}(\bar{\mathrm{V}}_{r-k})$, *che abbia un numero finito di elementi in comune con ciascuna* $\mathfrak{F}(\bar{\mathfrak{F}})$; *consideriamo poi un'arbitrario isomorfismo* $\mathfrak{I}$ *fra i gruppi* g, $\bar{\mathrm{g}}$, *ed un'arbitraria corrispondenza* Γ *fra* V_{r-k} *e* $\bar{\mathrm{V}}_{r-k}$ (Γ induce una corrispondenza fra gli insiemi $\{\mathfrak{F}\}$, $\{\bar{\mathfrak{F}}\}$ delle $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{F}}$). *Preso un elemento* A *di* F, *sia* $\mathfrak{F}_{\mathrm{A}}$ *la* $\mathfrak{F}$ *cui appartiene* A, *e sia* B *uno degli elementi comuni ad* $\mathfrak{F}_{\mathrm{A}}$ *ed a* V_{r-k}; *esiste allora un numero finito di corrispondenze di* g (e siano esse Ω_{A}) *che portano* A *in* B. *Sia poi* $\bar{\mathrm{B}} = \Gamma\mathrm{B}$, *ed* $\bar{\Omega}_{\mathrm{A}} = \mathfrak{I}\Omega_{\mathrm{A}}$; *la trasformazione cercata è quella che associa ad* A *gli elementi* $\bar{\mathrm{A}} = \bar{\Omega}_{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}$ [5].

La ricerca di T è quindi ricondotta alla ricerca degli isomorfismi fra i due gruppi g, $\bar{g}$ (tali isomorfismi dipendono al più da costanti arbitrarie).

La determinazione di ciascuna V_{r-k} dipende da k funzioni di $r-k$ variabili: è essenziale, però, solo la scelta di una V_{r-k}, l'altra potendosi scegliere in modo qualunque senza alterare la costruzione precedente; la corrispondenza Γ dipende poi da $r-k$

(4) Si dirà che G è transitivo o intransitivo se tali sono i gruppi g, $\bar{g}$.

(5) Considerazioni analoghe trovansi in L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, (Spoerri, Pisa, 1918), pp. 315-323.

funzioni di $r - k$ variabili. Quindi, *se* g, $\bar{g}$ *sono intransitivi* ($k < r$), T *dipende da* r *funzioni arbitrarie di* $r - k$ *variabili.* Quando i gruppi sono transitivi ($k = r$). T dipende da tante costanti arbitrarie quante sono quelle che determinano $\mathfrak{I}$.

Noto inoltre la seguente proprietà: siano F, $\bar{F}$, $\bar{\bar{F}}$ tre varietà, in ciascuna delle quali siano dati tre gruppi g, $\bar{g}$, $\bar{\bar{g}}$, a due a due isomorfi; e sia T_1 (T_2) una trasformazione fra F, $\bar{F}$ ($\bar{F}$, $\bar{\bar{F}}$), mutata in sè da un gruppo di coppie di corrispondenze di g, $\bar{g}$ ($\bar{g}$, $\bar{\bar{g}}$); allora il prodotto $T_2 \cdot T_1$ è mutato in sè da un gruppo di coppie di corrispondenze di g, $\bar{\bar{g}}$. Si noti infine che le corrispondenze che mutano in sè una data trasformazione T formano due gruppi infiniti.

4. Nel caso in cui $F \equiv \bar{F}$, si dirà che una corrispondenza Ω (di F in sè) muta T in sè quando Ω e T sono permutabili:

$$\Omega T = T \Omega.$$

Se G è un gruppo di corrispondenze di T in sè, T induce nel gruppo G l'*applicazione identica* (identità) (6).

In tal caso, le T, che sono mutate in sè da un gruppo G di corrispondenze, si possono costruire come nel n. 3; basta tener presente che $\{\mathfrak{F}\} \equiv \{\bar{\mathfrak{F}}\}$, e che $\mathfrak{I}$ è l'identità in G.

Più in generale si può considerare la F come sostegno di due differenti insiemi $\{A\}$ ed $\{a\}$, della stessa dimensione; sia $\mathfrak{T}$ una corrispondenza fra $\{A\}$ ed $\{a\}$. Si dice che una corrispondenza Ω in F, che muta in sè sia $\{A\}$ che $\{a\}$, trasforma in sè la $\mathfrak{T}$ quando è permutabile con $\mathfrak{T}$:

$$\Omega \mathfrak{T} = \mathfrak{T} \Omega$$

(Ad esempio: F è uno spazio lineare, $\{A\}$ l'insieme dei suoi punti ed $\{a\}$ quello dei suoi iperpiani; $\mathfrak{T}$ è allora una trasformazione dualistica in F). Se G è un gruppo di corrispondenze di $\mathfrak{T}$ in sè, le varietà di transitività di G in $\{A\}$ ed in $\{a\}$ debbono avere la stessa dimensione.

La costruzione di $\mathfrak{T}$ è, sempre nell'ipotesi $h = k$, la seguente: *si fissino due insiemi* V_{r-k}, $\mathfrak{V}_{r-k}$ *subordinati ad* $\{A\}$, $\{a\}$ *rispettivamente, ed una corrispondenza* Γ *fra di essi*; *se* A *è un elemento di* $\{A\}$, *ed* $\mathfrak{F}_A$ *la varietà di transitività di* G *cui appartiene* A, *sia* B *l'intersezione di* $\mathfrak{F}_A$ *con* V_{r-k}, *ed* Ω_A *una delle corrispondenze* Ω

(6) Pur trattandosi qui di una sola corrispondenza, a volte sarà utile considerare ancora la coppia di corrispondenze (Ω, Ω). Le trasformazioni T permutabili con le trasformazioni Ω d'un gruppo dato formano, com'è noto, un gruppo.

tali che $\Omega_A \mathrm{A} = \mathrm{B}$. *Sia poi* b *il corrispondente di* B *in* Γ; *ad* A *associamo gli elementi* a *di* $\{ \mathrm{a} \}$ *tali che* $\mathrm{b} = \Omega_A \mathrm{a}$.

Se invece $h < k$, in ciascuno dei casi trattati la scelta delle corrispondenze Γ (fra $\{\mathfrak{F}\}$, $\{\bar{\mathfrak{F}}\}$) e Σ (fra due varietà corrispondenti in Γ) non può farsi ad arbitrio; si può seguire però il seguente procedimento: si considerino due sottogruppi g_1, $\bar{g}_1$ di g, $\bar{g}$ rispettivamente (nel caso $F \equiv \bar{F}$, un solo sottogruppo g), per i quali valga la relazione $h = k$ (tale valore comune potendo essere uguale o mincre al valore di h relativo a g, $\bar{g}$), e fra le trasformazioni che ammettono coppie di corrispondenze di g_1, $\bar{g}_1$ in sè si cercano quelle che sono mutate in sè da coppie di corrispondenze di g, $\bar{g}$.

Si noti che, d'altra parte, la determinazione delle T in questione permette di riconoscere se due gruppi sono isomorfi, e di determinare i loro isomorfismi.

Osservazione. - Per il seguito, ha particolare importanza il caso in cui le varietà $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{F}}$ sono curve, sulle quali si può fissare un parametro invariante rispetto a g $(\bar{g})$ (7), in modo che tali gruppi abbiano equazione:

$$\sigma' = \sigma + \lambda \qquad \bar{\sigma}' = \bar{\sigma} + \mu \qquad (\lambda,\ \mu \text{ costanti}).$$

Allora fra due curve $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{F}}$ la T subordinerà una corrispondenza Σ:

$$\bar{\sigma} = f(\sigma)$$

con

$$f(\sigma + \lambda) = f(\sigma) + \mu\,; \tag{2}$$

quindi

$$f(\sigma) \equiv a\sigma + b',$$

dove a è lo stesso per tutte le curve $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{F}}$.

Se $F \equiv \bar{F}$, nella (2) si ha $\lambda = \mu$, e quindi la corrispondenza Σ fra le due curve è

$$\bar{\sigma} = \sigma + b\,;$$

ciascuna corrispondenza Σ *è perciò rappresentata da un' uguaglianza di parametri*. Queste proprietà possono manifestamente utilizzarsi per ottenere una rappresentazione analitica di T.

(7) Cfr., per il caso in cui F sia un piano, G. Pick, *Natürlische Geometrie ebener Transformationsgruppen*, « Sichtzungberichten der Kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien », CXV, II_a (1906).

5. Si può particolarizzare il problema posto nel numero precedente richiedendo che i gruppi g, $\bar{g}$ siano costituiti da trasformazioni di tipo prefissato: è quindi necessario trovare le coppie di gruppi isomorfi ed i relativi isomorfismi. Supporremo che le varietà F, $\bar{F}$ siano piani, e che g, $\bar{g}$ siano costituiti da movimenti (§ 2), o da similitudini (§ 3), o da omografie (§§ 4, 5).

Prima di iniziare la discussione dei vari casi, determiniamo le equazioni degli isomorfismi fra i gruppi ad uno e due parametri che si considereranno nei numeri successivi [8]. Se indichiamo con λ, λ_1 i parametri di due trasformazioni del gruppo, e con λ_p quello del loro prodotto, la legge di composizione nei casi che ci interesseranno risulta di uno dei due tipi:

$$\text{I)}\quad \lambda_p = \lambda \cdot \lambda_1 \qquad\qquad \text{II)}\quad \lambda_p = \lambda + \lambda_1 .$$

Una corrispondenza $\bar{\lambda} = f(\lambda)$ fra due gruppi del tipo I è un isomorfismo se

$$f(\lambda\lambda_1) = f(\lambda) \cdot f(\lambda_1) \tag{3}$$

con

$$f(1) = 1 \tag{3'}$$

(affinchè l'identità corrisponda a sè stessa; allora si ha pure

$$f(\lambda) \cdot f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = f(1) = 1$$

cioè ad Ω^{-1} corrisponde $(\Im\Omega)^{-1}$). Derivando la (3) rispetto a λ e dividendo membro a membro con la (3), si ha:

$$\lambda_1 \frac{f'(\lambda\lambda_1)}{f(\lambda\lambda_1)} = \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}$$

da cui, derivando rispetto a λ_1

$$\frac{f'(\lambda\lambda_1)}{f(\lambda\lambda_1)} + \lambda\lambda_1 \left[\frac{f'(\lambda\lambda_1)}{f(\lambda\lambda_1)}\right]' = 0 .$$

La funzione f soddisfa quindi alla

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + x\frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = 0$$

[8] Per alcuni di questi casi, si veda ad es. S. LIE-G. SCHEFFERS, *Vorlesungen über Continuierliche Gruppen*, (Teubner, Leipzig, 1893), pp. 138-139.

la cui soluzione è

$$f = c\lambda^k \qquad (k,\ c \text{ costanti}).$$

Per effetto delle (3), (3'), dovrà essere $c = 1$.

Se i due gruppi sono del tipo II, affinchè la corrispondenza $\bar{\lambda} = f(\lambda)$ sia un isomorfismo dovrà essere

$$f(\lambda + \lambda_1) = f(\lambda) + f(\lambda_1)$$

con

$$f(0) = 0$$

(cfr. più sopra; anche in questo caso ad Ω^{-1} corrisponde la $(\Im\Omega)^{-1}$).

La soluzione è manifestamente

$$f \equiv a\lambda \qquad (a \text{ cost.}).$$

Se il gruppo g è del tipo II, e $\bar{g}$ del tipo I, la $\bar{\lambda} = f(\lambda)$ dovrà soddisfare la

$$(4) \qquad f(\lambda + \lambda_1) = f(\lambda) \cdot f(\lambda_1),$$

con

$$(5) \qquad f(0) = 1$$

(cfr. più sopra; anche qui ad Ω^{-1} corrisponde necessariamente la $(\Im\Omega^{-1})$).

Derivando la (4) rispetto a λ, e dividendo membro a membro:

$$\frac{f'(\lambda + \lambda}{f(\lambda + \lambda_1)} = \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}$$

da cui

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = c,$$

e, quindi, tenendo conto delle (4), (5)

$$f \equiv e^{c\lambda} \qquad (c \text{ costante}).$$

Se g è del tipo I, e $\bar{g}$ del tipo II, si ha invece

$$\bar{\lambda} = a \lg \lambda.$$

Come si è già detto, i gruppi a due parametri sono isomorfi o al gruppo delle traslazioni

$$x = x' + \lambda \qquad y = y' + \mu$$

o a quello delle sostituzioni lineari

$$x = \lambda x' + \mu.$$

Indicando con λ, μ, λ_1, μ_1 i parametri relativi a due trasformazioni, e con λ_p, μ_p quelli relativi al loro prodotto, si ha, per il gruppo delle traslazioni

$$\lambda_p = \lambda + \lambda_1 \qquad \mu_p = \mu + \mu_1 ;$$

e, per quello delle sostituzioni lineari

$$\lambda_p = \lambda\lambda_1 \qquad \mu_p = \lambda\mu_1 + \mu.$$

Indicando con

$$\bar{\lambda} = f(\lambda, \mu) \qquad \bar{\mu} = \varphi(\lambda, \mu)$$

una corrispondenza fra due gruppi, gli isomorfismi fra due gruppi di traslazioni soddisferanno a

$$\begin{cases} f(\lambda + \lambda_1, \mu + \mu_1) = f(\lambda, \mu) + f(\lambda_1, \mu_1) ; \\ \varphi(\lambda + \lambda_1, \mu +' \mu_1) = \varphi(\lambda, \mu) + \varphi(\lambda_1, \mu_1) \\ \quad f(0, 0) = 0 \qquad \varphi(0, 0) = 0 \end{cases}$$

e quindi le loro equazioni sono manifestamente

$$\bar{\lambda} = a\lambda + b\mu \quad \bar{\mu} = c\lambda + d\mu \quad (a, b, c, d \text{ arbitrari}).$$

Gli isomorfismi fra due gruppi di sostituzioni lineari soddisfano alle

$$\begin{cases} f(\lambda\lambda_1, \lambda\mu_1 + \mu) = f(\lambda, \mu) \cdot f(\lambda_1, \mu_1) & f(1, 0) = 1 \\ \varphi(\lambda\lambda_1, \lambda\mu_1 + \mu) = f(\lambda, \mu) \cdot \varphi(\lambda_1, \mu_1) + \varphi(\lambda, \mu) & \varphi(1, 0) = 0. \end{cases}$$

Derivando la prima rispetto a μ e dividendo membro a membro si ha

$$\frac{f_\mu(\lambda\lambda_1, \lambda\mu_1 + \mu)}{f(\lambda\lambda_1, \lambda\mu_1 + \mu)} = \frac{f_\mu(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)}$$

da cui $\dfrac{f_\mu}{f} = \text{cost.}$ e quindi

$$f \equiv e^{c\mu} \cdot \alpha(\lambda).$$

Sostituendo nell'equazione iniziale si trova

$$e^{c(\lambda\mu_1+\mu)} \cdot \alpha(\lambda\lambda_1) = e^{c\mu_1} \cdot \alpha(\lambda_1) \cdot e^{c\mu} \cdot \alpha(\lambda)$$

da cui

$$e^{c\lambda\mu_1} = e^{c\mu_1} \qquad \text{e quindi} \qquad e^c = 1\,;$$

$$\alpha(\lambda\lambda_1) = \alpha(\lambda) \cdot \alpha(\lambda_1) \qquad \text{con} \qquad \alpha(1) = 1$$

da cui si ricava (cfr. più sopra)

$$\alpha(\lambda) = \lambda^k$$

e quindi

$$f \equiv \lambda^k.$$

Sostituendo tale espressione nella seconda equazione si ha

$$\varphi(\lambda\lambda_1, \lambda\mu_1 + \mu) = \lambda^k\varphi(\lambda_1, \mu_1) + \varphi(\lambda, \mu).$$

Derivando rispetto a μ si trova

$$\varphi_\mu(\lambda\lambda_1, \lambda\mu_1 + \mu) = \varphi_\mu(\lambda, \mu),$$

da cui $\varphi_\mu = \text{cost.}$, e quindi $\varphi = a\mu + \beta(\lambda)$. Sostituendo nell'equazione iniziale si ottiene:

$$a \cdot (\lambda\mu_1 + \mu) + \beta(\lambda\lambda_1) = \lambda^k a\mu_1 + \lambda^k\beta(\lambda_1) + a\mu + \beta(\lambda)$$

da cui

$$a\lambda\mu_1 = \lambda^k a\mu_1$$

e quindi ($a \neq 0$, altrimenti $\mathfrak{I}$ sarebbe singolare): $\lambda^k \equiv \lambda$, ed inoltre

$$\beta(\lambda\lambda_1) = \lambda\beta(\lambda_1) + \beta(\lambda).$$

Derivando rispetto a λ_1 si ottiene

$$\lambda\beta'(\lambda\lambda_1) = \lambda\beta'(\lambda_1)$$

e quindi $\beta' = \text{cost.}$, $\beta = b\lambda + c$; ma sostituendo ancora nell'equazione proposta, si ha $c = -b$: quindi le equazioni di $\mathfrak{I}$ sono

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \lambda \\ \bar{\mu} = a\mu + b\lambda - b. \end{cases}$$