Bollettino Unione Matematica Italiana

Pavel Drăgilă

Sur une classe de surfaces.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.4, p. 465–469.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_465_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sur une classe de surfaces.

Nota di Pavel Drăgilă (a Timisoara, Romania)

Sunto. - *In questo lavoro si considerano due superficie* S, $\bar{\mathrm{S}}$, *definite dall'equazioni* (1), *in modo che la tangente all'una delle linee coordinate sulla prima superficie sia parallela alla tangente ad una delle linee coordinate, nel punto corrispondente, sulla seconda superficie. In particolare si studia il caso in cui le linee sono asintotiche.*

Summary. - *In the paper we consider two surfaces* S, $\bar{\mathrm{S}}$, *determinated by the equations* (1), *such that the tangent of a curve on the first surface shall be parallel to the tangent of a curve, at the corresponding point, on the second surface. Specially it is studied the case when the lines are the asymptothics.*

1. Considérons dans l'espace habituel à trois dimensions l'ensemble des surfaces définies par un système d'équations compatibles

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} r_{uu} &= ar_u + br_v + cr, \\ r_{uv} &= a'r_u + b'r_v + c'r, \\ r_{vv} &= a''r_u + b''r_v + c''r, \end{aligned} \right.$$

ce que signifie que ces surfaces sont équivalentes au point de vue affine. Nous nous proposons de chercher parmi les surfaces définies par le système (1) des couples de deux surfaces, jouissant de la propriété géométrique que la direction de la tangente à une ligne de coordonnées sur la première surface soit parallèle à la direction de la tangente à une ligne de coordonnées, dans le point homologue, sur l'autre surface. Nous étudierons en spécial le cas le plus intéressant, où les directions parallèles sur les deux surfaces sont les directions asymptotiques.

Nous désignons dans les calculs qui suivent la première surface par $S(x, y, z)$, la deuxième par $\bar{S}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, et nous adoptons les notations habituelles r_u, r_v, $r_{uv}, \ldots$ pour les dérivées $\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}, \ldots$

2. Afin que le couple des tangentes sur les deux surfaces S, $\bar{S}$ soient parallèles, il est nécessaire qu'il soit satisfait l'un des deux systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{r}_u = \lambda r_u \\ \bar{r}_v = \mu r + \delta r_u + \sigma r_v\end{array}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{r}_u = \lambda r_v \\ \bar{r}_v = \mu r + \delta r_u + \sigma r_v .\end{array}\right. \tag{3}$$

Le système (2) nous conduit au cas banal des transformations homothétiques

$$\bar{\gamma} = \lambda \gamma,$$

que nous laissons de coté, et nous nous occuperons seulement avec le système (3). Nous allons chercher d'abord les relations de condition que doivent satisfaire les coefficients λ, γ, δ, σ, et puis déterminer les expressions des coefficients a, b, c, ... du système (1).

En posant la condition d'intégrabilité

$$(\bar{r}_u)_v = (\bar{r}_v)_u$$

on aura la relation

$$\lambda r_{vv} + \lambda_v r_v = \mu_u r + \mu r_u + \delta_u r_u + \delta r_{uu} + \sigma_u r_v + \sigma r_{uv} \tag{4}$$

qui doit être vérifiée aussi par les coordonnées de la seconde surface $\bar{S}$. Si nous substituons les expressions des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ au lieu des dérivées r_u, r_v, nous obtenerons une identité. Nous trouvons ainsi les relations cherchées

$$\begin{array}{l}\mu_u = 0, \\ \lambda\mu_v + \mu\lambda_v = \mu\sigma_u , \\ \lambda\delta_v + \delta\lambda_v = \delta\sigma_u , \\ \lambda\delta_u + \delta\lambda_u + \sigma\sigma_u = \lambda\sigma_v ,\end{array} \tag{5}$$

qui sont valables pour tous les systèmes de coordonnées curvilignes.

3. Nous nous bornerons actuellement à traiter seulement le cas où les lignes u, v sont des asymptotiques sur les deux surfaces.

Il résulte de la relation (4) que dans ce cas

$$\sigma = 0,$$

et alors le système (5) prend la forme plus simple

$$\begin{aligned} \mu_u &= 0, \\ (\lambda\mu)_v &= 0, \\ (\lambda\delta)_v &= 0, \\ (\lambda\delta)_u &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

Il est aisé de voir que nous avons deux cas a envisager:

$$\begin{aligned} \mu_u &= 0, \\ (\lambda\mu)_v &= 0, \\ \lambda\delta &= \text{const.} \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mu_u &= 0, \\ (\lambda\mu)_v &= 0, \\ \delta &= 0. \end{aligned}$$

4. Dans le premier cas on aura

$$\mu = \varphi(v), \quad \lambda = \frac{\psi(u)}{\varphi(v)}, \quad \delta = k\frac{\varphi(v)}{\psi(u)}, \quad k = \text{const.},$$

mais par le choix convenable des paramètres curvilignes on peut prendre

$$\begin{aligned} \lambda &= 1, \\ \mu &= 1, \\ \delta &= 1. \end{aligned}$$

Le système (3) devient alors

$$\begin{cases} \bar{r}_u = r_u \\ \bar{r}_v = r + r_u \end{cases}$$

et la relation (4) prend la forme

$$r_{vv} = r_{uu} + r_u \tag{7}$$

Ecrivons maintenant la première équation du système (1) (en tenant compte que les surfaces sont rapportées aux lignes asymptotiques)

$$r_{uu} = ar_u + br_v$$

et, en portant ensuite l'expression de la dérivée r_{uu} dans la relation (7), il vient

$$r_{vv} = (a + 1)r_u + br_v\,.$$

Nous avons ainsi obtenu le système

$$(8) \qquad \begin{cases} r_{uu} = ar_u + br_v \\ r_{vv} = (a+1)r_u + br_v\,, \end{cases}$$

En portant dans ces dernières relations les expressions des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, au lieu des dérivées r_u, r_v, nous trouvons la troisième équation

$$r_{uv} = br_u + ar_v + br.$$

En imposant les conditions d'intégrabilité pour le système

$$\begin{cases} r_{uu} = ar_u + br_v\,, \\ r_{uv} + br_u + ar_v + rb, \\ r_{vv} = (a+1)r_u + br_v\,, \end{cases}$$

nous obtenons

$$b_u = 0, \qquad b_v = 0,$$

puis

$$a_u = 0, \qquad a_v = 0,$$

ce qui signifie que les coefficients a, b sont des constantes arbitraires.

Nous avons ainsi définie une nouvelle classe de surfaces, que nous appellerons surfaces Q_1 et nous avons découvert une famille de transformations de ces surfaces.

5. Dans le second cas on peut prendre de même

$$\lambda = 1,$$
$$\mu = 1,$$

et alors le système (3) devient

$$(9) \qquad \begin{cases} \bar{r}_u = r_v\,, \\ \bar{r}_v = r, \end{cases}$$

et l'équation (4) s'écrit

$$r_{vv} = r_u\,.$$

Nous avons ainsi obtenu une classe très étendue des surfaces, définie par le système

$$(10) \qquad \begin{cases} r_{uu} = ar_u + br_v \\ r_{uv} = a'r_u + b'r_v + c'r \\ r_{vv} = r_u\,, \end{cases}$$

les coefficients a, b, a', b', c' étant des fonctions arbitraires des paramètres u, v, qui doivent satisfaire seulement les conditions d'intégrabilité. Nous désignerons les surfaces définies par le système (10) surfaces Q_2. Parmi les surfaces Q_1 et Q_2 il y en a des couples de deux surfaces S, $\bar{S}$, jouissant de la propriété que les tangentes le long d'une ligne asymptotique v de la première surface S sont parallèle aux tangentes menées aux deuxième sistème des lignes asymptotiques u, à partir des points d'une ligne v, sur la seconde surfaces $\bar{S}$.

6. Cherchons maintenant s'il y en a parmi les surfaces Q_2, des surfaces pour lesquelles les transformations (9) soient reversibles, c'est-à-dire qu'elles restent invariantes aussi par les transformations

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{r}_v = \lambda^x r_u \\ \bar{r}_u = \mu^x r\,.\end{array}\right. \tag{11}$$

Es effectuant les mêmes calculs, que dans le cas antérieur, nous trouvons

$$\lambda = \text{const.}$$
$$\mu = \text{const.}$$

et nous obtenons le système

$$\left\{\begin{array}{l} r_{uu} = k r_v \\ r_{uv} = k r \\ r_{vv} = r_u \end{array}\right. \qquad (k = \text{const.}).$$

Les surfaces définies par ce dernier système sont les surfaces R_0 de Tzitzeica.

7. Il est aisé de voir que les surfaces obtenues par les transformations (9), (11) d'une surface R_0 quelconque, forment des suites, qui sont en général indéfinies. Les surfaces de ces suites jouissent de la propriété remarquable que les tangentes le long d'une ligne asymptotique v d'une surface S_1 sont parallèles aux tangentes aux lignes asymptotiques u, menées aux points correspondants sur la deuxième surface S_2, obtenue par la transformation à droite (9), et les tangentes le long de l'autre asymptotique u sont parallèles aux tangentes aux lignes asymptotiques v, menées aux points correspondants sur la troisieme surface S_3, obtenue par la transformation à gauche (11). Cette propriété est caractéristique pour les surfaces R_0.