UMI

Recensioni.

* Francesco G. Tricomi, Equazioni a derivate parziali, Edizioni Cremonese, Roma, 1957 (Maria Cinquini Cibrario)
* F. Cecioni, Lezioni sui fonamenti della Matematica, Vol. primo: Premesse e questioni generali, C.E.D.A.M., Padova, 1958 (Guido Zappa)
* Federico Enriques, Natura, ragione e storia, Einaudi, Torino, 1958 (Pietro Buzano)
* Wolfang Pauli, Teoria sulla relatività, Boringhieri, Torino, 1958 (Mario Verde)
* I. M. Jaglom, W. G. Boltjanski, Konvexe Figuren, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956 (Eugenio Togliatti)
* G. Bouligand, Mécanique rationelle, Vuibert, Paris, 1954 (Antonio Pignedoli)
* W. A. Bidzadse, Zum Problem der Gleichungen von gemischten Typus, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957 (Maria Cinquini Cibrario)
* Hermann Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1955 (Edoardo Vesentini)
* Théodore Vogel, Physique mathématique classique, Collect. A. Colin, Paris, 1956 (Antonio Pignedoli)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 438–451.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_438_0>

RECENSIONI

FRANCESCO G. TRICOMI, *Equazioni a derivate parziali,* Edizioni Cremonese, Roma, 1957, pp. I-XII, 1-392.

Il volume (che e una totale rielaborazione del precedente corso litografato dell'A «*Lezioni sulle equazioni a derivate parziali*») viene incontro ad una esigenza estremamente sentita ed attuale porre in mano agli studenti di matematica e di fisica del secondo biennio e ai giovani laureati una trattazione ampia, ma elementare della teoria delle equazioni a derivate parziali, così che i giovani conoscano le principali equazioni a derivate parziali, che si incontrano nei corsi teorici e nelle matematiche applicate, i problemi relativi e i metodi piu notevoli di risoluzione Come e ben noto, finora non esisteva alcun trattato italiano, che avesse questo indirizzo didattico e largamente informativo sull'argomento, e potesse affiancarsi a ben noti volumi di AA stranieri Il piano del volume, gli argomenti maggiormente sviluppati, i metodi seguiti nella trattazione sono coerenti all'obiettivo, che l'A si e prefissato Sono quindi lasciati da parte metodi moderni ed elevati, fondati sull'Analisi funzionale oppure sulla moderna teoria delle funzioni di variabile reale, questioni critiche ricerche recenti relative a equazioni e sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari Ampie indicazioni bibliografiche danno pero al lettore la possibilita di approfondire argomenti appena sfiorati nel volume

Il recensore apprezza il fatto che le notazioni usate dall'A sono quelle classiche (si fa un uso minimo di notazioni vettoriali, il segno Σ non viene mai omesso, non si introducono simboli superflui)

Il volume e diviso in quattro capitoli, ognuno dei quali e corredato da una ampia raccolta di esercizi, che costituiscono un utile complemento alla teoria

Cap I *Equazioni del primo ordine e teoria delle caratteristiche* La teoria delle equazioni del primo ordine e impostata su una base geometrica, in gran parte intuitiva, per una equazione in due variabili indipendenti sono definiti cono di Monge e strisce caratteristiche, ed è risolto il problema di Cauchy Questi concetti sono estesi al caso di piu variabili indipendenti Seguono vari argomenti classici integrale completo, teoria di Hamilton-Jacobi (con applicazione al problema dei due corpi), sistemi di equazioni del primo ordine in una sola incognita, parentesi di Poisson e di Jacobi

Si viene poi alla definizione di caratteristica di una equazione del secondo ordine in due variabili indipendenti, alla classificazione delle equazioni del secondo ordine, alla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari del secondo ordine dei tre tipi classici Infine, dopo aver definite le caratteristiche dei sistemi di due equazioni in due variabili indipendenti e due funzioni incognite, sono date una classificazione dei sistemi della forma

$$(1) \quad a_{i1}(x, y)u_x + a_{i2}(x, y)u_y + a_{i3}(x, y)v_x + a_{i4}(x, y)v_y = f_i(x, y, u, v), \quad (i=1, 2),$$

e anche una riduzione a forma canonica dei sistemi (1) appartenenti ai tre tipi classici la quale risulta di particolare interesse e sfrutta non solo cambiamenti di variabili indipendenti, ma anche cambiamenti (lineari) di funzioni incognite.

Cap. II. *Equazioni di tipo iperbolico.* Considerate, in primo luogo, le equazioni in due variabili indipendenti, sono trattati numerosi argomenti classici: metodo di integrazione «in catena» di Laplace, equazione di Euler-Poisson, equazione delle corde vibranti (o delle onde piane), i problemi relativi alla quale vengono risolti con vari metodi (integrale generale, separazione delle variabili, trasformazione di Laplace).

Per una equazione lineare in forma canonica

$$z_{xy} + a(x, y)z_x + b(x, y)z_y + c(x, y)z = f(x, y) \tag{2}$$

è esposto il metodo di Riemann, mediante il quale viene risolto il problema di Cauchy e quello di Goursat nel caso particolare (detto da altri problema di Darboux), in cui la z sia assegnata su due segmenti di caratteristica uscenti da uno stesso punto; la funzione di Riemann è data esplicitamente per alcune note equazioni.

Ha carattere originale la risoluzione, mediante approssimazioni successive, del problema di Goursat (nel caso particolare già indicato) per il sistema di tipo iperbolico

$$u_x = F(x, y, u, v), \quad v_y = G(x, y, u, v). \tag{3}$$

Tale problema è poi risolto anche col metodo delle differenze finite, che viene applicato in seguito alla risoluzione del problema di Cauchy per lo stesso sistema (3) ed esteso a sistemi quasi-lineari generici; è messa in evidenza l'utilità del metodo sia per dimostrare teoremi di esistenza sotto ampie ipotesi, sia per giungere a risoluzioni numeriche mediante le moderne macchine calcolatrici.

Dopo qualche generalità sulle equazioni lineari in più di due variabili, è trattata l'equazione delle onde in $n + 1 (n > 1)$ variabili, in particolare nel caso $n = 3$ (per cui è data la formula di Poisson) e $n = 2$ (nel qual caso è sviluppato il metodo di Volterra). Il capitolo contiene anche una parte applicativa (§ 2.8 e parte del § 2.10), dedicata alla teoria del movimento dei fluidi compressibili, che viene ampiamente sviluppata, giungendo ai concetti di numero e di cono di Mach, e alle equazioni di tipo misto.

Cap. III. *Equazioni di tipo ellittico.*

Dopo varie considerazioni generali introduttive, sono dimostrati alcuni teoremi di unicità ed è data la formula di Green per l'equazione di tipo ellittico lineare in n variabili indipendenti. Riferendosi poi in particolare all'equazione di Laplace (in n variabili indipendenti), è dimostrato il teorema di Green, sono definite le funzioni di Green e di Neumann, è introdotto l'integrale di Poisson, è dimostrata l'analiticità delle funzioni armoniche (con cenni circa l'estensione del risultato ad equazioni generali di tipo ellittico), sono provati i teoremi di Harnack. Di particolare interesse sono sia la risoluzione del problema di Dirichlet col metodo delle funzioni subarmoniche, sia la risoluzione del problema stesso col metodo delle differenze finite. Sono esposti poi svariati metodi classici di risoluzione: teoria del potenziale, equazioni integrali, metodo delle immagini, metodo alternato di Schwarz. Si accenna (in seguito) ai legami tra calcolo delle variazioni ed equazioni di tipo ellittico e al *principio di minimo.* Tornando poi alle equazioni generali lineari del secondo ordine di tipo ellittico, è data qualche indicazione soltanto circa i metodi di costruzione della soluzione del problema di Dirichlet, che viene risolto esplicitamente, mediante equazioni integrali, nel caso, in cui le variabili indipendenti siano due e l'equazione sia ridotta a forma canonica. Il capitolo contiene una parte applicativa, e cioè lo studio del movimento dei fluidi incompressibili (§ 3.10), e quello dell'*equazione oscillatoria* (§ 3.12)

$$(4) \qquad \Delta_2 z + k^2 z = 0.$$

Ricordiamo anche il § 3.13, dedicato ai sistemi ellittici del primo ordine, studiati alla luce di ricerche recenti. Il capitolo si chiude collo studio delle funzioni biarmoniche e di questioni ad esse collegate.

Cap. IV. *Equazioni di tipo parabolico e di tipo misto.*

Dopo qualche considerazione introduttiva, è dimostrato un teorema di unicità, relativo all'equazione lineare di tipo parabolico in due variabili indipendenti

$$(5) \qquad z_{xx} + a(x, y)z_x + b(x, y)z_y + c(x, y)z = 0.$$

È poi studiata esclusivamente l'equazione del calore (in due variabili indipendenti), per la quale è dimostrato il teorema di Green, è risolto il classico problema dei valori al contorno nel caso del rettangolo, è data la formula di Poisson (problema della barra infinita), è data la trasformazione di Gauss. In dettaglio è esposto il metodo delle differenze finite sia per l'equazione del calore sia anche per un sistema lineare canonico parabolico in due variabili indipendenti.

Circa le equazioni di tipo misto, che per la prima volta trovano posto in un trattato italiano, l'A., dopo qualche cenno sulla classificazione di tali equazioni, studia la ben nota equazione

$$(6) \qquad y z_{xx} + z_{yy} = 0,$$

conosciuta ovunque col di lui nome, rielaborando e semplificando notevolmente la propria classica Memoria lincea del 1923; l'equazione (6) è studiata prima separatamente nei due semipiani iperbolico ($y < 0$) ed ellittico ($y > 0$); poi sono dati il teorema di unicità, e, in un caso particolare, il teorema di esistenza per il classico «*problema di* Tricomi». La teoria è infine applicata (§ 4.12) alle correnti fluide transoniche.

MARIA CINQUINI CIBRARIO

F. CECIONI, *Lezioni sui fondamenti della Matematica.* Vol. primo: *Premesse e questioni generali.* Pubblicazione edita sotto gli auspici della Scuola Normale Superiore di Pisa. Padova, C.E.D.A.M. 1958.

L'Autore, in queste Lezioni, di cui è apparso ora il primo volume, ha raccolto l'oggetto dei suoi Corsi di Matematiche Complementari, da lui tenuti per tanti e tanti anni presso l'Università di Pisa. L'Autore dichiara che esse sono dirette in modo particolare alla preparazione degli insegnanti delle Scuole secondarie. Non si deve credere però di trovarsi di fronte ad un'opera di carattere esclusivamente didattico, poichè al contrario essa, a giudicare almeno da questo primo volume, presenta anche un notevole interesse filosofico.

Infatti, anzichè presupporre noti i princìpi della logica, da usare nello sviluppo deduttivo, e anzichè porre a priori i postulati della disciplina matematica da studiarsi, l'Autore si rifà, nei due capitoli che costituiscono questo primo volume, proprio all'esposizione degli elementi di logica, e all'esame del procedimento mentale attraverso il quale, a partire dalla esperienza, mediante astrazione, la mente umana giunge a porre i postulati dell'aritmetica e della geometria elementare.

Precisamente, il primo capitolo concerne i princìpi di logica, e appare quanto mai opportuno, specie perchè oggi tali princìpi sono solo da poche persone conosciuti a fondo, e intorno ad essi si fa spesso molta confusione. L'Autore si riferisce alla « logica classica », cioè alla logica tradizionale, ed illustra dettagliatamente il significato e la funzione dei tre princìpi fondamentail (di identità, di non-contraddizione, del terzo escluso), le varie forme di sillogismo, il procedimento di riduzione all'assurdo, le leggi delle inverse, etc., ricorrendo spesso ad esempi tratti dalla matematica, specie dalla geometria elementare.

Del massimo interesse, ed oltremodo efficaci, sono le pagine dedicate alle osservazioni sulle critiche ai princìpi della logica, alla confutazione di alcuni presunti paradossi logici, all'esame delle logiche polivalenti. Il Cecioni mette chiaramente in luce come le logiche polivalenti, pur potendo riuscire utili in alcune questioni. rientrano in realtà nella logica classica.

Per es., la logica trivalente, che, anzichè sui due concetti di vero e falso, si basa sui tre concetti di vero, falso e dubbio, si riduce alla logica classica. Infatti « le qualificazioni di *vero* e di *falso* sono adoperate in senso traslato ». « Dovrebbe dirsi, in luogo di *è vero* e di *è falso,* rispettivamente *sappiamo che è vero, sappiamo che è falso* ». Non è giusto equiparare in modo assoluto il terzo caso della logica trivalente agli altri due. « L'equiparazione del terzo caso con gli altri due suppone ... che si dichiari esplicitamente che la verità, e la conoscenza che di essa abbiamo in un determinato momento, sono la stessa cosa; cioè che la verità è storica; la quale affermazione però, se vuol essere vera, diviene storica anch'essa, cioè vera solo in un certo momento storico. Ma chi, come lo scrivente » (e come il recensore) « non accetta il punto di vista ora accennato, deve distinguere "vero" da "noi sappiamo che è vero" etc. come sopra è detto ».

Il secondo capitolo inizia con alcune interessantissime considerazioni generali sull'organizzazione logica di una scienza. Notevole la tesi, circa la quale si può anche dissentire dall'autore, ma che appare in ogni caso sostenuta con molta efficacia, secondo cui i concetti primitivi ed i postulati della geometria e dell'aritmetica provengono dall'esperienza del mondo fisico; interessante l'esame del procedimento di idealizzazione nella formazione dei concetti della geometria; degna di nota la distinzione tra organizzazione logica tipica e organizzazione logica non tipica di una scienza (si ha, secondo l'autore, organizzazione logica tipica nell'aritmetica, in cui i postulati sono fatti sperimentali diretti, e si ha invece organizzazione logica non tipica nella geometria, nella meccanica, etc., in cui i postulati sono fatti sperimentali idealizzati, o addirittura ipotesi). Dopo aver illustrato la struttura di una disciplina che sia stata organizzata in sistema assiomatico, mettendo fra l'altro in luce come, di fronte alla logica, il complesso dei postulati di un qualunque sistema assiomatico costituisce la definizione collettiva dei concetti primitivi del sistema stesso, e aver discusso il ruolo dell'intuizione nella costruzione della scienza, l'autore passa ad esporre l'organizzazione logica dell'aritmetica, presentando e commentando i postulati di Peano, e mettendone in luce il carattere sperimentale. Molto interessanti, in particolare, le considerazioni sul principio di induzione, sulle quali non possiamo soffermarci per ragioni di spazio.

Il Cecioni, dopo aver illustrato anche i postulati di Pieri, ed esaminato altri aspetti dei primi elementi dell'aritmetica, torna ad occuparsi del problema generale dell'organizzazione logica delle scienze, trattando della compatibilità logica e della indipendenza logica dei postulati. Per il Cecioni, l'organizzazione logica tipica di una scienza non può essere contradditoria, perchè i suoi postulati sono fatti certi, risultanti dall'esperienza fisica, e il reale non può essere contradditorio. Pertanto, afferma l'autore, il sistema assiomatico dell'aritmetica, dato da Peano, è logicamente compatibile. La compatibilità logica della geometria euclidea si deduce da quella dell'aritmetica, grazie all'interpretazione analitica dei suoi postulati fornita dalla geometria analitica.

Chiudono il libro alcune considerazioni sulla natura della matematica e altre sul postulato di Zermelo. Circa la natura della matematica, l'autore mostra come essa non si riduca all'espressione logica della medesima, ma ne facciano parte anche tutti i suoi possibili « contenuti reali ». La discussione sul postulato di Zermelo è molto profonda. Secondo il Cecioni, « se si ammettesse la legittimità della considerazione degli insiemi infiniti in atto, la proposizione di Zermelo sarebbe un'immediata "deduzione elementare"; cioè sarebbe un *principio logico*; essa apparterrebbe alla logica, col carattere di una regola per dedurre »; poichè, però, gli insiemi infiniti debbono essere dati solo in potenza, la proposizione di Zermelo non risulta affatto un principio logico; esso, d'altra parte non può essere un postulato specifico della teoria degli insiemi, perchè se tale fosse, esso verrebbe « a *restringere* (almeno *a priori*) *il concetto di* classe », il che « è in contraddizione con la proposizione stessa, che afferma proprio la possibilità di scelta *qualunque* sia la natura *degli insiemi che in essa compaiono*, e con ciò accetta il concetto di « classe » quale risulta dal sistema dei princìpi della logica senza nessuna restrizione ». Secondo Cecioni, pertanto, « la proposizione di Zermelo non è affatto intuitiva, e non è nè un principio logico nè un postulato specifico della teoria degli insiemi ». Essa è « una congettura », che va formulata come segue: « Si congettura che, per ogni particolare definizione (mediante leggi o proprietà) degli insiemi etc. sia possibile assegnare la legge di scelta ». Il recensore, pur essendo d'accordo col fatto che l'unica formulazione corretta del principio di Zermelo sia quella che consiste nel postulare l'*esistenza di una legge di scelta,* non condivide l'opinione che detto principio sia una congettura; egli ritiene che ogni proposizione matematica sia soltanto una verità condizionata, e precisamente condizionata dalla validità dei postulati ammessi. Vi sono categorie di insiemi per cui il principio di Zermelo è valido (p. es., gli insiemi numerabili); se si pone detto principio tra i postulati, si costruisce la matematica zermeliana; la quale sarà valevole tutte le volte che gli insiemi considerati verificano quel principio. Dal punto di vista strettamente matematico, mi sembra quindi che una matematica zermeliana sia da porre sullo stesso piano di una matematica non zermeliana. Quando si tratterà di applicazioni, bisognerà vedere. La cosa non mi sembra molto dissimile dal dilemma: geometria euclidea o non euclidea, archimedea o non archimedea, etc.

Ho insistito su questo punto perchè mi permette di mettere in luce una mia differente posizione di fronte ai princìpi della matematica, rispetto a quella del mio amato maestro Francesco Cecioni: più platonica la mia, più aristotelica la sua. Ma, chiarita questa differenza, devo esprimere la mia ammirazione per l'organicità dell'opera, per la profondità del pensiero, per l'efficacia dell'esposizione. Attendiamo con molto interesse il secondo volume, che dovrà trattare (secondo quanto risulta dalla prefazione) dei fondamenti della Geometria elementare e della Teoria dei numeri razionali, reali, etc. Son certo che queste lezioni contribuiranno a risollevare molti di nostri corsi di Matematiche complementari, che talora sono dedicati ad argomenti un po' distanti dal loro compito precipuo di preparazione all'insegnamento, oppure si smarriscono in un'esposizione frammentaria e superficiale di argomenti vari, desunti dal programma di preparazione ai concorsi di scuole secondarie.

Il libro desterà un profondo interesse anche negli insegnanti medi, i quali potranno approfondire la struttura logica e il fondamento intuitivo della loro disciplina, e meglio comprendere gli stessi motivi del loro insegnamento.

Guido Zappa

FEDERIGO ENRIQUES, *Natura, ragione e storia*, pag. 286, Edizioni Scientifiche Einaudi, Torino 1958, L. 2500.

« Oggi il ritornare allo studio di Enriques, scienziato-filosofo e uomo di cultura, non è omaggio di sentimento ad un maestro non dimenticabile, ma necessità di pensiero, di opere e di lotte ». Così Lombardo-Radice conclude la sua bella introduzione, che si estende ad occupare circa un quarto dell'intero volume, e nella quale con affetto di discepolo e serenità di critico egli inquadra la parte più significativa dell'opera filosofica di Federigo Enriques sullo sfondo del movimento europeo di rinnovamento critico del pensiero positivistico che da Mach conduce fino ad Einstein

L'appellativo galileiano di « filosofo naturale » meglio di ogni altro ci sembra appropriato per definire sinteticamente la personalità scientifica dell'Enriques i cui aspetti, già delineati nell'ampio saggio introduttivo, si rivelano compiutamente attraverso la lettura dei dieci scritti, per lo più articoli di rivista, che con felice discernimento Lombardo-Radice ha scelto per comporre quest'antologia. Prescindendo dall'ordine cronologico in cui vengono riprodotti ci è parso di poter ripartire questi scritti in due gruppi: uno di carattere prevalentemente fisico-matematico e l'altro di carattere prevalentemente critico-filosofico. Non vorremmo tuttavia che si desse a questa suddivisione un peso eccessivo, attribuendoci l'intenzione di separare due aspetti della problematica dell'Enriques che, influenzandosi profondamente a vicenda, non potrebbero essere intesi l'uno in assenza dell'altro.

Al primo gruppo assegneremo gli scritti: « Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria », « Il tempo », « Il principio d'inerzia e le dinamiche newtoniane », « Il principio di ragion sufficiente nella costruzione scientifica », « Scienza e determinismo ». L'accostamento che così veniamo a fare di un saggio di carattere geometrico ad altri di contenuto fisico non tradisce affatto il pensiero dell'Autore, piuttosto ostile alle vedute formalistiche e al convenzionalismo e propenso invece a concepire la geometria come un ramo della fisica in cui prima di dimostrare, occorre anzitutto « vedere »: interpretazione ancor oggi sostenibile ma assai più difficile da coltivare nell'ambito di una fisica che nel frattempo ha riveduto molti suoi concetti dal punto di vista critico-operativo. Anche la strada dell'interpretazione psicologica, cara all'Enriques, potrebbe essere utilmente ripercorsa dalla critica moderna che spesso l'ignorerebbe se non le venisse riproposta da esigenze didattiche: tuttavia ci sembra che l'indagine psicologica dovrebbe essere indirizzata verso le proposizioni della geometria intuitiva che riflettono un'esperienza più immediata anzichè verso i postulati e gli enti della geometria razionale che da detta realtà si possono far derivare solo in maniera indiretta per mezzo di una complessa analisi del linguaggio.

Alle posizioni « convenzionalistiche », care al Poincaré, Enriques si dimostra contrario anche negli scritti di carattere più propriamente fisico, cercando ad esempio di dare un contenuto sensibile al giudizio relativo all'uguaglianza degli intervalli di tempo e arrivando a negare l'esistenza dei corpuscoli elementari. Vissuto a cavallo di due secoli che per molti aspetti possono ben dirsi « l'un contro l'altro armato », Enriques rinuncia mal volentieri all'ideale razionalistico di una scienza universale in cui progressivamente s'inquadrino tutti i fenomeni possibili e si ritrae un poco amareggiato dagli incontri coi fisici delle nuove generazioni che non amano i grandi problemi filosofici e concentrano il loro interesse sun una ben circoscritta tecnica scientifica.

La fiducia nel valore obiettivo della razionalità del sapere, l'avversione di Enriques a tutte le teorie che negassero alla scienza dignità di effettiva conoscenza per attribuire ai suoi risultati un valore esclusivamente di comodo, la sua visione — forse un po' troppo ottimistica — del progresso scientifico come strumento di liberazione sociale, e il profondo anelito verso un concetto più largo della filosofia trovano vaste risonanze nel restante gruppo di lavori della raccolta: « Il valore della scienza », « Razionalismo e storicismo », « Il pragmatismo », « La filosofia positiva e la classificazione delle scienze », « Nuovo concetto della ragione ». Nessuno di questi scritti tratta però della polemica fra Enriques e Croce (tramite Gentile) al cui riguardo occorre nuovamente risalire all'introduzione di Lombardo-Radice, il quale obiettivamente mette in luce le debolezze di entrambe le parti, che sotto diversi aspetti potrebbero essere accusate di incompetenza: e questa — osserva il Geymonat (1) — potrebbe anche esser perdonata in una persona come il Croce, dottissima in tante altre discipline, se non fosse accompagnata da un disprezzo un po' troppo esagerato per le scienze. Nè può esser perdonata all'idealismo italiano l'incomprensione dell'importanza filosofica del movimento critico-scientifico che era in rigoglioso sviluppo anche in Italia negli anni in cui Croce e Gentile condussero la battaglia contro ogni filosofia scientifica determinando quel distacco fra scienza e filosofia che per vari anni mise la nostra cultura filosofica in stato di inferiorità rispetto a quella di altri paesi.

Perciò oggi, nel rinnovato interesse che i giovani filosofi dimostrano per la problematica scientifica, auspichiamo che l'uscita di questa raccolta di scritti filosofici di Federigo Enriques apra davvero la via del ritorno ad un pensiero troppo a lungo trascurato.

PIERO BUZANO

WOLFANG PAULI, *Teoria sulla relatività*, (Boringhieri, Torino 1958), di pp. 327, L. 3000.

Il famoso contributo del Prof. W. Pauli alla « Encyklopädie der Mathematishen Wissenschaften » (Vol. 5, Teubner, Lipsia 1921) riguardante la teoria della relatività, si presenta in ottima traduzione italiana ed una eccellente edizione tipografica (Boringhieri, Torino 1958).

Il testo ha conservato praticamente il suo aspetto originale, ma ad esso molte note sono state aggiunte che trattano i fatti di maggior rilievo comparsi nel frattempo.

La teoria della relatività ristretta di Einstein ha retto mirabilmente a numerosissime prove sperimentali. Cinquant'anni fa essa poggiava essenzialmente su alcune esperienze su scala celeste, oggi le grandi macchine acceleratrici di cui dispongono molti laboratori di fisica, hanno permesso di ottenerne la conferma nelle condizioni più disparate. Si può dire che la dinamica relativistica di un elettrone che si sposti a grandi velocità è divenuta patrimonio comune degli ingegneri. Un'altra conferma brillante riguarda l'inerzia dell'energia di cui la fisica nucleare fornisce ormai esempi a profusione.

La costruzione di Einstein ha retto dunque al fenomeno di erosione che di solito il tempo riserva a molte teorie della fisica moderna. Ciò vale a spiegare la conservazione quasi integrale della trattazione originale di Pauli, che ha così il pregio di avere anche un interesse storico.

L'opera si svolge in otto capitoli, di cui cinque sono dedicati ai fondamenti della teoria della relatività ristretta ed agli sviluppi che essa comporta per la dinamica, l'elettrodinamica, termodinamica e statistica. Si

(1) « Il problema della conoscenza nel positivismo », pag. 117, Bocca, Torino, 1931.

riconosce nell'impostazione dell'autore l'accento sulle questioni di principio e la preoccupazione costante di rimanere su un terreno fisico.

Un lungo capitolo, il secondo, è dedicato all'aspetto matematico della teoria della relatività generale che viene poi svolta in due capitoli finali. Rispetto alla edizione originale vi si nota una digressione sugli spazi a connessione affine in particolare sulla nozione corrispondente di tensore di curvatura ed alcune sue proprietà quali ad esempio le identità del Bianchi.

Nella trattazione della teoria della relatività generale trova posto, in questa edizione italiana, una breve discussione del problema cosmologico, in particolare della metrica dipendente dal tempo di Friedman relativa ad un modello di cosmo omogeneo ed isotropo. Il problema cosmologico ha avuto un notevole sviluppo in seguito alla scoperta dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali provenienti dalle galassie al di fuori del nostro gruppo locale e che indica una espansione dell'intiero Universo. È noto che la velocità di espansione risulta proporzionale alla distanza dalla nostra galassia, e perciò c'è un tempo caratteristico del fenomeno che va sotto il nome di costante di Hubble. Recentemente misure astronomiche accurate hanno condotto ad un valore della costante di Hubble di circa quattro volte superiore al valore accettato in un primo tempo. Questa circostanza dà forza alla tesi di Einstein condivisa dall'Autore che le equazioni della relatività generale non hanno bisogno di essere completate dal cosiddetto termine cosmologico.

A proposito delle più recenti teorie unitarie che mirano a ricondurre tutti i fenomeni sia gravitazionali che elettromagnetici a proprietà geometriche dello spazio-tempo, Pauli dichiara apertamente il suo scetticismo per l'affermazione sostenuta tenacemente dallo stesso Einstein, che la nozione classica di campo basti a spiegare gli aspetti quantistici del mondo atomico.

L'opera di Pauli è vivamente raccomandabile agli studiosi di fisica teorica e di fisica matematica. In essa può trovarsi una delle più autorevoli e complete informazioni sulla teoria della relatività. Malgrado l'indirizzo moderno della fisica teorica sia prevalentemente rivolto alla meccanica quantistica, la presenza della relatività generale non può tardare a farvisi sentire di nuovo perchè è innegabile che il comportamento dinamico della materia e la stabilità delle particelle elementari ne sono strettamente collegate.

MARIO VERDE

I. M. JAGLOM und W. G. BOLTJANSKI, *Konvexe Figuren*, VEB deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956; pp. XVI+257.

Il presente volume è una traduzione dal russo di un'opera con lo stesso titolo pubblicata a Mosca nel 1951 nella « Biblioteca del circolo matematico »; la presente edizione tedesca differisce dall'originale russa solo perchè alcune dimostrazioni sono state semplificate e perchè sono stati introdotti alcuni completamenti ed alcune indicazioni bibliografiche. Il libro, che è destinato a studenti delle scuole medie superiori e dei primi semestri universitari, ed in genere a tutti coloro che si interessano di questioni geometriche, ha la forma di una raccolta ordinata di esercizi riguardanti varie questioni della teoria generale delle figure piane convesse (brevi e schematici sono i cenni alle estensioni spaziali). La comprensione della materia non esige alcuna speciale preparazione nel campo delle matematiche superiori; effettivamente, i metodi attraenti ed ingegnosi, di questa teoria, tipicamente geometrica, si basano direttamente su rappresentazioni geometriche elementari senza che occorra alcun apparato analitico. È un campo dove i matematici russi hanno portato contributi notevoli; e la lettura del presente volume può servire di introduzione a quella di trattati più estesi e completi sullo stesso argomento, quali quelli recenti di L. A. Lusternik e di A. D. Alexandrow. Le questioni proposte sono state scelte tra le più interessanti; notevoli sono pure le applicazioni tecniche delle questioni proposte che qua e là affiorano.

Il libro è diviso in otto capitoli, ciascuno dei quali contiene delle nozioni preliminari esplicative, qualche esercizio semplice già risolto, e poi degli esercizi proposti, raggruppati per affinità di materia; quelli la cui risoluzione è meno semplice sono contrassegnati o con uno o con due asterischi. Ecco in breve il contenuto dei vari capitoli:

1°. Proprietà generali delle figure piane convesse limitate o no;

2°. il teorema di Helly (riguardante l'esistenza di punti comuni a più figure piane convesse che abbiano a tre a tre qualche punto comune) e le sue applicazioni (tra cui ad es. il teorema di Jung sul raggio minimo di un cerchio che contenga n punti dati nel piano);

3°. alcune proprietà delle funzioni continue, applicate alla dimostrazione di proprietà delle figure piane convesse (ad es. il teorema di S. S. Kowner sulle figure convesse dotate di centro inscrittibili in una data figura convessa ed il teorema di Winternitz sul rapporto delle aree delle due parti in cui una figura convessa è divisa da una retta qualsiasi passante per il suo baricentro);

4°. addizione di figure e di curve convesse, con applicazione alla ricerca di figure limiti di figure convesse variabili;

5°. questioni isoperimetriche, riguardanti in particolare il cerchio;

6°. vari problemi di massimo e di minimo geometrici;

7°. curve piane di larghezza costante;

8°. generalizzazione alle curve Δ, cioè alle curve piane che si possono far muovere entro un triangolo equilatero.

Le questioni proposte sono in tutto 116; le loro soluzioni si trovano, esposte per esteso, in una seconda parte del volume; molte questioni proposte appaiono di soluzione tutt'altro che semplice. Due appendici sono dedicate l'una ad una generalizzazione del teorema di Bolzano-Weierstrass e l'altra al concetto di figura convessa; esse hanno lo scopo di precisare in modo rigoroso i concetti fondamentali a cui le questioni proposte si riferiscono. Completano il volume un elenco bibliografico ed un indice dei nomi citati e degli argomenti trattati. In complesso è un'ottima collezione di questioni sulle figure piane convesse, che può essere utilizzata sia come raccolta di esercizi, sia come trattato, e che merita altamente di essere segnalata e raccomandata.

Eugenio Togliatti

G. Bouligand, *Mécanique rationelle*, Paris, Vuibert, 1954, p. 572.

L'opera, sotto il nuovo titolo di « Mécanique rationelle », riunisce i « Précis » e i « Compléments et exercices ». Essa è caratterizzata dalla intenzione, pienamente attuata, di completare l'insegnamento dei principî con l'apporto concreto dei problemi, e di spingere il lettore alla lettura dei lavori originali. Il libro è suddiviso in tredici capitoli di teoria vera e propria, ai quali si aggiungono nove capitoli di complementi riguardanti soprattutto i problemi di attrito e di urto con attrito, e di esempi ed esercizi criticamente scelti ed estremamente opportuni.

Da notare che, nella trattazione della Dinamica analitica, l'A. non manca di rivolgere l'attenzione all'intervento della Topologia.

L'orientamento, poi, chiaramente fornito al lettore, verso i problemi della Relatività sancisce il carattere altamente moderno di un'opera la cui lettura (superfluo, forse, dirlo) è di grandissima utilità.

ANTONIO PIGNEDOLI

W. A. BIZADSE, *Zum Problem der Gleichungen von gemischten Typus*, (Math. Forschungsberichte herausgegeben von H. GRELL, V), Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957, pp. 1-59,

Il volumetto è dedicato unicamente all'esposizione di ricerche dell'A. stesso e di M. A. Lawrentjev relative alla equazione di tipo misto

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + sgn\, y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0; \tag{1}$$

soltanto nell'introduzione è fatto un brevissimo cenno delle ricerche di F. Tricomi e di S. Gellerstedt. L'A. afferma che la (1) è la più semplice e tipica equazione lineare di tipo misto, affermazione che io non condivido.

Nel primo capitolo è risolto il problema di Tricomi relativo alla (1): sia D un campo (aperto), semplicemente connesso, limitato nel semipiano $y \geq 0$ da una curva di Jordan σ (tutta posta nel semipiano $y > 0$, tranne gli estremi $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$), e nel semipiano $y \leq 0$ dalle caratteristiche $AC(y = -x)$ e $CB(y = x - 1)$; la funzione $U(x, y)$ richiesta è continua nel campo $\overline{D}$ chiuso, soddisfa la (1) nei punti interni a D, per cui sia $y \neq 0$, ha derivate $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ continue nei punti interni a D (mentre nei punti A e B tali derivate possono avere infiniti di ordine minore di uno), su σ e su una delle caratteristiche, p. es. su AC, si riduce a funzioni assegnate. Sono dimostrati il teorema di esistenza e il teorema di unicità della soluzione di tale problema.

Il secondo capitolo è dedicato a varie generalizzazioni del problema di Tricomi (sempre per l'equazione (1)); tra l'altro (§ 11) è considerato il caso, in cui su σ sia assegnata la derivata normale $\frac{\partial U}{\partial n}$, invece che la U.

Il capitolo terzo contiene una ulteriore estensione del problema di Tricomi relativamente alla (1); il campo D è limitato nel semipiano $y \leq 0$ da una curva $L : y = -\gamma(x)$ $(0 \leq x \leq l;\ \frac{1}{2} < l < 1;\ \gamma(0) = 0;\ l + \gamma(l) = 1;$ $\gamma(x) > 0$ per $x > 0$, $\gamma(x)$ crescente), tutta interna, eccettuati gli estremi, al triangolo ABC, e dal segmento della caratteristica $y = x - 1$, corrispondente a $l \leq x \leq 1$; si ricerca la soluzione $U(x, y)$ della (1), che assume valori assegnati su σ e su L. Sono dimostrate l'unicità e l'esistenza della soluzione, introducendo alcune ipotesi. Chiude il volumetto una bibliografia, peraltro molto limitata.

MARIA CINQUINI CIBRARIO

HERMANN WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche,* Dritte vollständig umgearbeitete Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1955, pp. VIII + 162, 13 fig., DM 22.

La prima edizione di questa classica opera apparve nel 1913, dopo che la teoria delle funzioni algebriche di una variabile e dei loro integrali, nell'assetto datole da Dedekind e Weber e da Hensel e Landsberg, si era arricchita dei contributi topologici di Brouwer e dei risultati di Koebe sulla uniformizzazione. Già il Klein, nella prefazione alle sue lezioni *Über Riemanns Theorie der Algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (Leipzig, Teubner, 1882), si dichiarava debitore al Prym dell'osservazione secondo la quale le superficie di Riemann originariamente non erano superficie a più fogli ricoprenti il piano complesso, ma che, al contrario, le funzioni analitiche complesse possono essere studiate sopra superficie arbitrarie esattamente nello stesso modo che sul piano. Questa idea, che implicava — come osservava ancora il Klein — il ricorso alla teoria delle correnti fluide sopra le superficie, veniva posta dal Weyl alla base della sua trattazione.

Nel primo capitolo di essa, dopo aver introdotto la nozione di prolungamento analitico di Weierstrass e quella di dominio analitico, vengono posti i fondamenti della topologia delle superficie; fra queste ultime, le superficie di Riemann vengono caratterizzate in base al criterio dell'uniformizzazione locale mediante funzioni olomorfe, criterio che consentiva di provarne direttamente l'orientabilità. Lo studio delle superficie di ricoprimento di una superficie di Riemann conduceva inoltre il Weyl al teorema di monodromia e, come caso particolare di quest'ultimo, al teorema integrale di Cauchy.

Il secondo capitolo era dedicato alle funzioni analitiche sulle superficie di Riemann. Sulla base del principio di Dirichlet veniva stabilito il teorema di esistenza ed erano costruiti i differenziali abeliani di prima, seconda e terza specie, e veniva dimostrato il teorema di Riemann-Roch, mentre lo studio dei periodi degli integrali di prima specie conduceva al teorema di Abel. Inoltre, associato ad ogni superficie di Riemann un gruppo di movimenti del piano di Lobacevskij, si caratterizzavano, mediante tale gruppo, le superficie di Riemann equivalenti nel gruppo conforme, e si costruivano le rappresentazioni, mediante serie di Poincaré, delle funzioni analitiche non diramate sopra le superficie normali di Riemann. Infine si esaminava il gruppo delle trasformazioni conformi d'una superficie di Riemann compatta in sè, pervenendo al teorema di Schwarz-Klein.

Alla prima edizione del 1913 seguiva nel 1923 una ristampa anastatica con un'appendice dedicata allo studio della *forma caratteristica* di una superficie di Riemann, cioè della forma bilineare avente per coefficienti gli indici di Kronecker relativi ad una base dei cicli lineari della superficie stessa (1). In tal guisa, questo trattato di Weyl assumeva l'assetto, ormai classico, che inspirava, da un lato, le ricerche di Kerékjártó sulla caratterizzazione topologica delle trasformazioni conformi e quelle di Stoïlow sulla teoria topologica delle funzioni analitiche, e, d'altro lato, penetrando in campi più lontani, i lavori di Hodge sugli integrali armonici. Ed era proprio il fiorire di questa teoria che maturava — come avverte lo stesso Weyl — la necessità di una rielaborazione di tutta l'opera, che, relativamente alle considerazioni topologiche del primo capitolo, diveniva una vera e propria revisione critica.

---

(1) L'edizione del 1923 è stata ristampata anastaticamente nel 1947 dalla Chelsea Publishing Company.

Nasceva così questa terza edizione, ampiamente rinnovata ed aggiornata nella nomenclatura e nella bibliografia. Di tale rinnovamento resta traccia soprattutto — per quanto concerne il primo capitolo — nella rielaborazione dell'appendice all'edizione del 1923, che viene inserita nel § 8 del testo; rielaborazione alla quale il Weyl ha dedicato una sua Nota, pubblicata nella Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik (vol. 4 (1953), pp. 471-492). Inoltre viene modificata la classificazione delle superficie, inserendo, fra la classe delle superficie topologiche e quella delle superficie di Riemann, le superficie differenziabili orientate e non orientate.

Anche il Capitolo secondo appare profondamente rimaneggiato con l'introduzione dei differenziali armonici e con lo studio della forma quadratica avente per coefficienti i coefficienti degli immaginari dei periodi di una base degli integrali di prima specie sopra una superficie compatta di Riemann, calcolati lungo un sistema di retrosezioni di quest'ultima.

Con tali ammodernamenti — realizzando quanto si proponeva il Weyl nella prefazione, ma perdendo forse alcuni dei caratteri più peculiari della edizione del 1913 — questa terza edizione si inserisce fra le recentissime opere di Schiffer-Spencer e di Pfluger sull'argomento, e diviene ancora una volta uno strumento attivo di indagine.

EDOARDO VESENTINI

THÉODORE VOGEL, *Physique mathématique classique*, Collect. A. COLIN, Paris, 1956, pagine 214.

L'opera parte da una distinzione fra la « Fisica teorica » e la « Fisica matematica », la prima considerata come uno stadio iniziale del pensiero del teorico dei fenomeni fisici, stadio nel quale il pensatore assume un modello che ha il ruolo di « immagine » e lega l'astratto al reale per mezzo d'un insieme di concetti già noti; la seconda considerata come uno stadio ulteriore in cui il natural filosofo desidera stabilire la corrispondenza fra « osservabili » e concetti ad un livello più astratto, prendendo per questi ultimi degli enti matematici puri, scelti in modo che le conseguenze logiche delle loro proprietà corrispondano, a loro volta, a fenomeni effettivamente osservabili.

E l'opera stessa è permeata di tale visione informatrice, la quale è completata, in felice sintesi, dall'altra idea fondamentale che guida la trattazione, idea che è sostanzialmente l'inversa — per così dire — di quella che guida una esposizione di matematica pura. Qui il matematico cerca di dare ai proprî enunciati la più vasta estensione possibile, nelle ipotesi meno vincolanti; la trattazione fisico-matematica del Vogel cerca di semplificare i ragionamenti, senza pregiudizio del rigore, scegliendo le ipotesi più vincolanti nelle quali possa trovarsi immerso il fisico. Altro carattere fondamentale del libro è la costante attenzione alla « assiomatizzazione » fisico-matematica. Il volume consta di una introduzione dedicata, oltre che alla definizione della Fisica matematica, alla discussione del concetto di « assiomatizzazione » in Matematica ed in Fisica matematica; e di tre capitoli. Il primo di essi, dopo richiami di essenziali nozioni analitiche, concerne gli enti fondamentali della Fisica matematica e la discussione dell'assioma di principio comune a tutti i sistemi della Fisica matematica stessa: « Esiste un funzionale delle variabili di stato, che diventa stazionario quando tali variabili ricevono, in funzione dei punti dello spazio di configurazione, le espressioni che verificano la corrispondenza con le osservabili ».

Il secondo capitolo è dedicato allo studio dei problemi fondamentali della Teoria del potenziale, di quelli relativi alla propagazione delle onde e di quelli relativi ai campi vettoriali (equazioni di Helmoltz e di Laplace ed equazione di Navier).

Nel terzo capitolo, l'Autore fa una teoria assiomatica della Meccanica dei corpi deformabili, dell'Elettromagnetismo e dell'Ottica, nonchè della Trasmissione del calore.

Concludendo, in una visione riassuntiva dell'esposizione, l'Autore definisce il corpo di dottrina di cui si è occupato come segue: « La Fisica matematica classica è lo studio delle soluzioni del problema variazionale:

$$\delta \int [cT(\varphi) \cdot T(\varphi) - U \cdot \varphi] d\tau = 0,$$

ove c, U, φ e T sono funzioni tensoriali nello spazio-tempo, delle quali c ed U date, φ da determinare per mezzo della condizione di estremo, T data in funzione di φ (coi punti si indicano prodotti scalari) ».

Va notato che ogni argomento basilare è preceduto, nel testo, da un sommario, che illumina il lettore non solo sulla materia che verrà trattata ma anche sullo spirito nel quale la trattazione sarà fatta.

Dopo ciò, è forse superfluo sottolineare l'interesse del volume in parola.

ANTONIO PIGNEDOLI

LIBRI RICEVUTI

BARBILIAN D., *Teoria aritmetica a idealelor (in inele necomutative)*, pp. 379, Bucarest, 1956.

GHELFAND I. M., *Lectii de Algebra liniara*, pp. 249, Editura tehnica, Timisoara, 1953.

GHELFOND A. O., *Calculul cu diferente finite*, pp. 470, Editura tehnica, Bucarest, 1956.

IONESCU TULCEA C. T., *Spatii Hilbert*, pp. 283, Editura Academiei republicii populare romine, Bucarest, 1956.

LAVRENTIEV M. A. - LIUSTERNIK L. A., *Curs de Calcul variational*, pp. 268, Editura tehnica, Timisoara, 1955.

NATANSON I. P., *Teoria functiilor de variabila reala*, pp. 598, Editura tehnica, Bucarest, 1957.

NICOLESCU M., *Analiza matematica, I*, pp. 399, Editura tehnica, Bucarest, 1957.

ONICESCU O. - MIHOC G. - IONESCU TULCEA C. T., *Calculul probabilitatilor si aplicatii*, pp. 787, Editura academiei republicii populare romine, Bucarest, 1956.

TZITZEICA G., *Oeuvres, I*, pp. 503, Academie Roumaine des Sciences, Bucarest, 1941.

* * *

STRUBECKER K., *Differentialgeometrie. II. Theorie der Flächenmetrik*, Sammlung Goschen, Bd. 1179/1179 a, W. de Gruyter & Co, Berlin, 1958.