Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ermanno Marchionna

Varietà di prima specie e varietà intersezioni complete.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 406–417.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_406_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Varietà di prima specie e varietà intersezioni complete.

Nota di ERMANNO MARCHIONNA (a Torino).

Sunto. - *Si assegna un criterio di equivalenza per gli ideali di due varietà algebriche di prima specie secondo* DUBREIL. *Tale criterio permette di riconoscere che una varietà algebrica* W_d *eventualmente riducibile (ma pura e priva di parti multiple) risulta intersezione completa di* $r-d$ *forme dello spazio ambiente* S_r *aventi ordini* $n_1, n_2, \ldots, n_{r-d}$, *se, e solo se:* a) *il suo genere aritmetico virtuale è un' opportuna funzione di* $n_1, n_2, \ldots, n_{r-d}$; b) *la sua sezione con un iperpiano* S_{r-1} *(generico, ma fissato) è intersezione di* $r-d$ *forme di* S_{r-1} *aventi gli stessi ordini delle precedenti. Si osserva inoltre che - contrariamente a quanto accade per le varietà irriducibili - la proprietà che una sezione iperpiana di una* V_d *spezzata sia di prima specie non implica che anche* V_d *sia di prima specie.*

Summary. - *Let* V_d *be a pure* d*-dimensional variety in* S_r, *i. e., a variety all irreducible components of which are of dimension* d. *The following theorem is proved:* V_d *is the complete intersection of* $r-d$ *hypersurfaces of orders* $n_1, n_2, \ldots, n_{r-d}$ *if the same is true of its general hyperplane section, with the further condition that its virtual arithmetic genus is a given function of the integers* $r, n_1, n_2, \ldots, n_{r-d}$.

1. Richiami ed osservazioni preliminari. In uno spazio proiettivo complesso S_r (ad r dimensioni) si consideri una varietà algebrica V_d (a $d \geq 1$ dimensioni) *pura* ([1]) *e priva di parti multiple.*

Indichiamo con $\alpha(V_d)$ l'ideale omogeneo costituito dalle forme di S_r che contengono V_d, e con $\varphi(V_d, l)$ la cosidetta *funzione complementare* dell'ideale, cioè il numero delle forme d'ordine l linearmente indipendenti che appartengono all'ideale.

Siano inoltre: V_{d-1} la sezione di V_d con un generico iperpiano S_{r-1}; $\alpha(V_{d-1})$ l'ideale delle forme di S_{r-1} che contengono V_{d-1}; $\varphi(V_{d-1}, l)$ la funzione complementare dell'ideale $\alpha(V_{d-1})$; e $\psi(V_{d-1}, l)$ il numero delle forme d'ordine l (linearmente indipendenti) appartenenti ad $\alpha(V_{d-1})$ e segate sopra S_{r-1} da forme dello stesso ordine contenenti V_d (ma non S_{r-1}). Si ha:

$$\psi(V_{d-1}, l) = \varphi(V_d, l) - \varphi(V_d, l-1); \tag{1}$$

$$\psi(V_{d-1}, l) \leq \varphi(V_{d-1}, l). \tag{2}$$

([1]) Cioè tale che le sue componenti abbiano tutte la stessa dimensione d.

Diciamo (con DUBREIL [2]) che la varietà V_d è di *prima specie* se per ogni l si ha

$$\psi(V_{d-1},\ l) = \varphi(V_{d-1},\ l),$$

cioè se le forme di S_{r-1}, aventi un ordine *qualsiasi* l e contenenti V_{d-1}, possono essere segate sopra S_{r-1} da forme di S_r, aventi ordine l e contenenti V_d.

Ricordiamo anche che una V_d *irriducibile* si dice *localmente normale* se esiste un intero h tale che le forme di ogni ordine $l \geq h$ seghino sopra V_d un sistema lineare completo; una V_d siffatta si dice poi *aritmeticamente normale* se $h = 1$ (cioè se le forme di *ogni* ordine l tagliano su V_d un sistema completo).

Per una varietà localmente normale la proprietà di essere di prima specie equivale a quella di essere aritmeticamente normale [3].

Aggiungiamo ora alcuni richiami sul genere aritmetico virtuale di una V_d (pura e priva di parti multiple) essenziali per il seguito.

È noto che la *postulazione effettiva* di V_d rispetto alle forme d'ordine l è il numero $P(V_d,\ l)$ delle condizioni lineari indipendenti che occorre imporre ad una generica forma d'ordine l affinchè essa contenga V_d per intero. Si ha ovviamente

$$P(V_d,\ l) = \binom{l+r}{r} - \varphi(V_d,\ l). \tag{3}$$

Quando l è abbastanza alto (superiore ad un certo l_0) la postulazione effettiva $P(V_d,\ l)$ è data — per un classico risultato di HILBERT — da un polinomio in l (detto *funzione caratteristica* dell'ideale $\alpha(V_d)$; o anche *postulazione virtuale* o *regolare* di V_d rispetto alle forme d'ordine l):

$$\chi(V_d,\ l) = \binom{l+d}{d} + \binom{l+d-1}{d} \cdot p_0 - \binom{l+d-2}{d-1} \cdot p_1 + \dots \tag{4}$$

$$\dots + (-1)^{d-1}\binom{l}{1} \cdot p_{d-1} + (-1)^d p_d.$$

Il coefficiente p_d prende il nome di *genere aritmetico virtuale*

(2) Cfr. [1], p 20.

(3) Cfr. ad es. GAETA [2], p. 183.

di V_d (4); si riconosce che gli altri coefficienti p_i $(0 \leq i < d)$ sono i generi aritmetici virtuali delle varietà V_i sezioni di V_d con generici spazi S_{r-d+i} (5).

I generi $p_0, p_1, \ldots, p_d$ verranno indicati complessivamente nel seguito come *caratteri virtuali* di V_d.

Se V_d è irriducibile e priva di punti multipli il genere aritmetico virtuale p_d coincide con il secondo genere aritmetico P_a introdotto da SEVERI (6) e prende anche il nome di *genere aritmetico effettivo* di V_d (o, più semplicemente, « genere aritmetico » della varietà).

Consideriamo ora in S_r, assieme a V_d, una seconda varietà algebrica d-dimensionale V_d^*, pura e priva di parti multiple.

Diremo che gl'*ideali* $\alpha(V_d)$ ed $\alpha(V_d^*)$ delle due varietà sono *equivalenti* se per ogni l si ha

$$\varphi(V_d, l) = \varphi(V_d^*, l),$$

il che — per la (3) — equivale a dire che in corrispondenza ad ogni l le due varietà hanno la stessa postulazione effettiva:

$$P(V_d, l) = P(V_d^*, l).$$

Diremo poi che gl'ideali delle due varietà (o, più in breve, le due varietà) hanno la stessa funzione caratteristica se per ogni l si ha

$$\chi(V_d, l) = \chi(V_d^*, l).$$

Per quanto ovvie, saranno utili nel seguito le seguenti osservazioni:

(4) Si ha ovviamente $(-1)^d p_d = \chi(V_d, 0) - 1$. Il genere aritmetico virtuale di una varietà è stato introdotto in [7] da SEVERI, il quale è ritornato sull'argomento in [8].

In tutte e due le memorie SEVERI esprime la funzione caratteristica nel modo che segue:

$$\chi(V_d, l) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i (p_{i-1} + p_i) \binom{l+d-i}{d-i}, \qquad (p_{-1} = 1).$$

L'espressione (4) del testo, equivalente alla precedente, si trova nella memoria [9] di ZARISKI, il quale tra l'altro ha ivi esteso la nozione di genere aritmetico virtuale a varietà assolutamente normali sopra un campo di caratteristica qualsiasi.

(5) Detto N l'ordine di V_d si ha $p_0 = N - 1$.

(6) Cfr. [7], n. 10. L'uguaglianza $p_d = P_a$, nota per $d < 3$ e congetturata in [7] da SEVERI per d qualsiasi, è stata dimostrata completamente da KODAIRA e SPENCER in *On arithmetic genera of algebraic varieties*, « Proc. Nat. Acad. U.S.A. » 39 (1953).

I) *Se gl' ideali* $\alpha(V_d)$ *ed* $\alpha(V_d^*)$ *sono equivalenti, le due varietà hanno la stessa funzione caratteristica* (il viceversa non è sempre vero).

Infatti i due polinomi $\chi(V_d, l)$, $\chi(V_d^*, l)$, dovendo coincidere per infiniti valori di l superiori ad un certo l_0 (perchè coincidono allora con le postulazioni effettive delle due varietà) devono coincidere per ogni l (principio d'identità dei polinomi).

II) V_d *e* V_d^* *hanno la stessa funzione caratteristica se, e solo se, hanno gli stessi caratteri virtuali,* più precisamente se per ogni indice i compreso fra 0 e d, estremi inclusi, si ha $p_i = p_i^*$ (con $p_0^*, p_1^*, \dots, p_d^*$ abbiamo indicato i caratteri virtuali di V_d^*).

2. **Un criterio d'equivalenza per gl'ideali di due varietà di prima specie.** Il criterio in discorso è dato dal

TEOREMA 1. - *Siano* V_d *e* V_d^* *due varietà* d*-dimensionali, pure e prive di parti multiple, appartenenti ad uno spazio* S_r *e non ad uno spazio di dimensione inferiore.*

Si supponga che:

A) *gl' ideali* $\alpha(V_{d-1})$, $\alpha(V^*_{d-1})$ *delle sezioni* V_{d-1} *e* V^*_{d-1} *delle due varietà con un iperpiano* S_{r-1} (generico, ma fissato) *siano equivalenti;*

B) *i generi aritmetici virtuali* p_d *e* p_d^* *di* V_d *e* V_d^* *siano uguali;*

C) V_d *sia di prima specie.*

Allora anche V_d^* *è di prima specie; inoltre i due ideali* $\alpha(V_d)$ *ed* $\alpha(V_d^*)$ *risultano equivalenti.*

Per la dimostrazione osserviamo innanzitutto che dall'ipotesi A) segue — per le osservazioni I e II del paragrafo precedente — che V_{d-1} e V^*_{d-1} hanno gli stessi caratteri virtuali ($p_i = p_i^*$ per $i = 0, 1, \dots, d-1$).

Tenendo conto dell'ipotesi B) e del fatto che i primi d caratteri $p_0, p_1, \dots, p_{d-1}$ di una varietà coincidono con gli analoghi caratteri di una sua generica sezione iperpiana, si deduce che V_d e V^*_d hanno gli stessi caratteri virtuali, e di conseguenza (osservazione II) hanno la stessa funzione caratteristica.

Ciò mostra che, a partire da un certo $l = l_0$, le postulazioni effettive $P(V_d, l)$ e $P(V_d^*, l)$ delle due varietà sono uguali; laonde per $l \geq l_0$ si ha

$$\varphi(V_d, l) = \varphi(V^*_d, l).$$

Ora si dimostra che, se per un certo l è

$$\varphi(V_d^*, l) \geq \varphi(V_d, l),$$

allora anche

$$\varphi(V_d^*,\ l-1) \geq \varphi(V_d,\ l-1).$$

Infatti per la (1) del n. 1 è

$$\varphi(V^*_d,\ l-1) = \varphi(V^*_d,\ l) - \psi(V^*_{d-1},\ l)$$
$$\varphi(V_d,\ l-1) = \varphi(V_d,\ l) - \psi(V_{d-1},\ l);$$

sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\varphi(V_d^*,\ l-1) - \varphi(V_d,\ l-1) = \{\varphi(V_d^*,\ l) - \varphi(V_d,\ l)\} + \tag{5}$$
$$+ \{\psi(V_{d-1},\ l) - \psi(V^*_{d-1},\ l)\}.$$

Ora, poichè V_d è supposta di prima specie (ipotesi C), si ha per qualunque l

$$\psi(V_{d-1},\ l) = \varphi(V_{d-1},\ l), \tag{6}$$

mentre, per ora, in relazione a V_d^* sappiamo soltanto che per ogni l

$$\varphi(V^*_{d-1},\ l) \geq \psi(V^*_{d-1},\ l). \tag{7}$$

D'altra parte l'ipotesi A) del teorema afferma che per qualsiasi l

$$\varphi(V_{d-1},\ l) = \varphi(V^*_{d-1},\ l),$$

per cui — tenuto conto della (6) — la (5) diventa

$$\varphi(V_d^*,\ l-1) - \varphi(V_d,\ l-1) = \{\varphi(V_d^*,\ l) - \varphi(V_d,\ l)\} + \tag{8}$$
$$+ \{\varphi(V^*_{d-1},\ l) - \psi(V^*_{d-1},\ l)\}.$$

Di qui si ricava appunto — in base alla (7) — che, supposto $\varphi(V_d^*,\ l) \geq \varphi(V_d,\ l)$, è anche $\varphi(V_d^*,\ l-1) \geq \varphi(V_d,\ l-1)$.

Il ragionamento svolto mostra che, avendosi per $l \geq l_0$

$$\varphi(V_d^*,\ l) = \varphi(V_d,\ l),$$

sussiste *per ogni valore di* l la disuguaglianza

$$\varphi(V_d^*,\ l) \geq \varphi(V_d,\ l). \tag{9}$$

Per dimostrare il teorema occorre verificare che in corrispondenza ad ogni valore di l si ha

$$\varphi(V_d^*,\ l) = \varphi(V_d,\ l) \tag{10}$$

cioè che gl'ideali di V_d^* e V_d sono equivalenti) e che

$$\psi(V^*_{d-1},\ l) = \varphi(V^*_{d-1},\ l) \tag{11}$$

(vale a dire che V_d^* è di prima specie).

Notiamo innanzitutto che le (10), (11) sono valide per $l=1$.

Infatti, poichè V_d, V_d^* appartengono ad S_r e non ad uno spazio di dimensione inferiore, si ha

$$\varphi(V_d,\ 1)=\varphi(V_d^*,\ 1)=0;$$

d'altra parte, poichè V^*_{d-1} — sezione di V_d^* con un generico iperpiano S_{r-1} — non appartiene ad uno spazio di dimensione inferiore ad $r-1$, è anche

$$\psi(V^*_{d-1},\ 1)=\varphi(V^*_{d-1},\ 1)=0.$$

Per provare completamente il teorema resta da verificare che se in corrispondenza all'ordine $l-1$ si ha

$$\varphi(V_d^*,\ l-1)=\varphi(V_d,\ l-1), \tag{12}$$

allora le (10), (11) sono soddisfatte per l'ordine l.

Infatti, supposta vera la (12), si ricava dalla (8) che

$$\{\varphi(V_d^*,\ l)-\varphi(V_d,\ l)\}+\{\varphi(V^*_{d-1},\ l)-\psi(V^*_{d-1},\ l)\}=0;$$

ma per le disuguaglianze (9), (7), le due espressioni dentro le parentesi graffe non possono essere negative, quindi esse sono nulle, e ciò prova l'asserto.

Nota. - Sebbene non sia necessario per il seguito, osserviamo che se due varietà *di prima specie* V_d, V_d^* hanno ideali equivalenti (il che implica tra l'altro che sia $p_d=p_d^*$) allora anche gl'ideali delle loro generiche sezioni iperpiane V_{d-1}, V^*_{d-1} risultano equivalenti.

Infatti, per la (1) del n. 1, è

$$\psi(V_{d-1},\ l)=\varphi(V_d,\ l)-\varphi(V_d,\ l-1),$$
$$\psi(V^*_{d-1},\ l)=\varphi(V_d^*,\ l)-\varphi(V_d^*,\ l-1);$$

e di qui si deduce che, dovendo essere per ogni l

$$\psi(V_{d-1},\ l)=\varphi(V_{d-1},\ l),$$
$$\psi(V^*_{d-1},\ l)=\varphi(V^*_{d-1},\ l),$$
$$\varphi(V_d,\ l)=\varphi(V_d^*,\ l),$$

risulta anche

$$\varphi(V_{d-1},\ l)=\varphi(V^*_{d-1},\ l),$$

il che prova l'asserto.

Questa osservazione permette di precisare il Teorema 1 nel modo seguente:

Date due varietà V_d, V^*_d, *di cui una di prima specie,* (ma entrambe pure, prive di parti multiple, ed appartenenti ad S_r e non ad uno spazio di dimensione inferiore), *le condizioni necessarie e sufficienti affinchè anche l'altra varietà risulti di prima specie ed inoltre i loro ideali risultino equivalenti, sono che*:

A) *i generi aritmetici virtuali di* V_d, V^*_d *siano uguali;*

B) *gl'ideali* $\alpha(V_{d-1})$, $\alpha(V^*_{d-1})$ *di due loro generiche sezioni iperpiane siano equivalenti.*

3. **Richiami sulle varietà intersezioni complete.** Consideriamo in S_r una varietà intersezione completa di $r-d$ forme degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-d}$, e con essa l'insieme di tutte le W_d (pure e prive di parti multiple) che risultano — singolarmente — intersezioni complete di $r-d$ forme aventi gli stessi ordini delle precedenti.

Gl'ideali di due varietà qualsiansi dell'insieme sono equivalenti.

Ciò dipende dal fatto che le forme di un medesimo ordine l contenenti una W_d dell'insieme possono esprimersi come combinazione lineare delle $r-d$ forme di cui W_d è intersezione completa; il che implica che il numero $\varphi(W_d, l)$ sia una funzione $f(r, l, n_1, n_2, \ldots, n_{r-d})$ dei soli interi $r, l, n_1, n_2, \ldots, n_{r-d}$, e non della particolare W_d considerata. Più precisamente è

$$(13) \qquad f(r, l, n_1, n_2, \ldots n_{r-d}) = \sum_i \binom{l+r-n_i}{r} - \sum_{i,k} \binom{l+r-n_i-n_k}{r} + \ldots + (-1)^{r-d-1} \binom{l+r-n_1-n_2-\ldots-n_{r-d}}{r} \ (^7).$$

Dalla circostanza che gl'ideali di due varietà qualsiansi dell'in-

(7) Cfr. SEVERI [6], nn. 1, 2.
Ricordiamo che nel calcolo effettivo della funzione f occorre attribuire il valore zero a quelle espressioni $\binom{l+r-n_i-\ldots-n_k}{r}$ in cui $l+r-n_i-\ldots-n_k<0$, ed il valore 1 al simbolo $\binom{r}{r}$; inoltre bisogna accettare per f il valore zero allorquando l è minore di tutte le n_i (non esistendo in tal caso forme d'ordine l passanti per W_d).

sieme siano equivalenti si deduce che *le nostre* W_d *hanno gli stessi caratteri virtuali* (osservazioni I, II del n. 1), *in particolare lo stesso genere aritmetico virtuale* p_d.

Quest'ultimo può essere valutato riferendosi ad una particolare W_d dell'insieme — che indicheremo con $\overline{W}_d$ — la quale sia irriducibile e priva di punti multipli, poichè in questo caso p_d coincide con il genere aritmetico effettivo P_a.

A tale scopo si ricordi che sopra una $\overline{W}_d$ cosiffatta le forme d'ordine

$$\rho = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-d} - r - 1$$

tagliano ipersuperficie del sistema canonico impuro, anzi addirittura il sistema canonico completo, poichè $\overline{W}_d$ è aritmeticamente normale. D'altra parte l'irregolarità d-dimensionale q_d di $\overline{W}_d$ è nulla ([8]), per cui — detto P_g il genere geometrico di $\overline{W}_d$ — si ha:

$$P_a = P_g = P(\overline{W}_d,\ \rho) = \binom{\rho + r}{r} - \varphi(\overline{W}_d,\ \rho)\ ([9]).$$

Cosicchè *il genere aritmetico virtuale di una* W_d (pura e priva di parti multiple) *intersezione completa di* $r - d$ *forme di* S_r *aventi gli ordini* $n_1, n_2, \dots, n_{r-d}$ *è*

$$(14) \qquad p_d = \binom{\rho + r}{r} - f(r, \rho,\ n_1,\ n_2, \dots . n_{r-d}).$$

L'espressione di p_d si semplifica notevolmente per $d = 1$. Infatti il genere aritmetico di una curva $\overline{W}_1$, irriducibile e priva di punti multipli (cioè l'ordinario genere della curva), la quale sia intersezione completa di $r - 1$ forme di S_r aventi gli ordini $n_1, n_2, \dots, n_{r-1}$, è notoriamente

$$(14') \qquad p = \frac{1}{2} n_1 n_2 \dots n_{r-1}(n_1 + n_2 \dots + n_{r-1} - r - 1) + 1;\ ([10])$$

([8]) Tutte queste proprietà si possono dedurre da alcuni risultati di SEVERI; cfr. ad es. la nota [5] dell'A., p. 676.

([9]) Quando è $\rho < 0$ si ha $P_g = 0$, poiche il sistema canonico di $\overline{W}_d$ risulta virtuale (non effettivo); per $\rho = 0$ si ha invece $P_g = 1$, in quanto il sistema canonico si riduce allo zero dell'equivalenza ipersuperficiale.

([10]) Ciò perchè $\overline{W}_1$ ha ordine $N = n_1 n_2 \dots n_{r-1}$ e le forme d'ordine $\rho = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} - r - 1$ tagliano su di essa gruppi (di $2p - 2$ punti) appartenenti alla serie canonica.

pertanto il genere aritmetico virtuale p_1 di una curva W_1 (anche riducibile, ma priva di parti multiple) la quale sia intersezione completa di $r-1$ forme di S_r aventi gli stessi ordini delle precedenti, è dato dalla (14'). [11]

4. Caratterizzazione delle varietà (eventualmente spezzate) intersezioni complete di forme. Si ha il

TEOREMA 2. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una varietà* d*-dimensionale* V_d^* (pura e priva di parti multiple) *appartenente ad uno spazio* S_r (e non ad uno spazio di dimensione inferiore) *risulti intersezione completa di* $r-d$ *forme irriducibili degli ordini* $n_1, n_2, \dots, n_{r-d}$ ($n_i > 1$; $d \geq 1$) *è che:*

a) *il suo genere aritmetico virtuale sia dato dalla* (14);

b) *esista un iperpiano* S_{r-1} *che tagli* V_d^* *secondo una varietà* V^*_{d-1} (pura e priva di parti multiple) *intersezione completa di* $r-d$ *forme irriducibili* (*di* S_{r-1}) *aventi gli stessi ordini delle precedenti.* [12]

Le condizioni *a*) e *b*) sono necessarie: precisamente la *b*) è ovvia, in quanto *tutte* le sezioni iperpiane di una V_d^* intersezione completa godono della proprietà indicata, e la *a*) è stata verificata come condizione necessaria nel paragrafo precedente. Quel che importa è la dimostrazione della sufficienza dell'insieme delle due condizioni.

A tale scopo consideriamo in S_r — accanto ad una V_d^* che soddisfi le ipotesi dell'enunciato — un'altra varietà V_d (pura e priva di parti multiple) la quale sia intersezione completa di $r-d$ forme degli ordini $n_1, n_2, \dots, n_{r-d}$, e verifichiamo che anche V_d^* è intersezione completa di $r-d$ forme aventi gli stessi ordini. Osserviamo innanzitutto che la varietà ausiliaria V_d è *di prima*

(11) Conviene ricordare che se W_1 si decompone in s curve $C_1, C_2, \dots, C_s$ (irriducibili, prive di punti multipli e con mutue intersezioni semplici) il suo genere aritmetico virtuale p_1 — detto anche semplicemente "genere„ — si esprime in funzione dei generi π_h delle componenti C_h. Precisamente, indicato con i_{hk} il numero dei punti comuni a due componenti C_h, C_k, si ha

$$p_1 = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_s - (s-1) + \Sigma i_{hk}.$$

(12) Nel caso particolare che V_d^* sia una curva irriducibile e priva di punti multipli, il teorema in esame è già stato dimostrato nella nota [4] dell'A.

specie ([13]) e che il suo genere aritmetico virtuale è dato anch'esso dalla (14). Inoltre la sezione V_{d-1} di V_d con l'iperpiano S_{r-1} di V^*_{d-1} risulta (come V^*_{d-1}) intersezione completa di $r-d$ forme di S_{r-1} aventi gli ordini $n_1, n_2, \dots, n_{r-d}$.

Pertanto gl'ideali $\alpha(V_{d-1})$ ed $\alpha(V^*_{d-1})$ sono equivalenti (cfr. il paragrafo precedente).

Si può ora applicare il Teorema 1 del n. 2 ed affermare che anche V_d^* è di prima specie. Ciò implica che le $r-d$ forme irriducibili di S_{r-1} che s'intersecano lungo V^*_{d-1} devono essere tagliate (sopra S_{r-1}) da $r-d$ forme irriducibili di S_r passanti per V_d^* ed aventi gli stessi ordini $n_1, n_2, \dots, n_{r-d}$.

Si conclude così che V_d^* è intersezione completa di queste forme.

5. Osservazioni sull'indipendenza delle condizioni *a*) e *b*) del Teorema 2.

Se V_d^* è una curva ($d=1$) la condizione *b*) non basta *da sola* a caratterizzarla come intersezione completa, anche nel caso più semplice che la curva sia irriducibile e priva di punti multipli: basta pensare ad una quartica gobba di seconda specie dello spazio ordinario, la quale non è intersezione completa di due quadriche, mentre il gruppo di 4 punti tagliato sopra di essa da un piano generico è intersezione di due coniche. ([14])

Invece *se una varietà* V_d^* *di dimensione* d ˛ 1, *irriducibile e priva di varietà multiple a* $d-1$ *dimensioni, soddisfa la condizione* b), *essa è certamente intersezione complcta di* $r-d$ *forme degli*

([13]) Cfr. Dubreil [1], p. 21. La proprietà in questione era già stata dimostrata da Severi per $d=2$ (cfr. [6], n. 14) mediante un ragionamento estendibile ad una V_d qualsiasi con ovvie varianti di linguaggio

([14]) Cosippure, la condizione *a*) non basta da sola a caratterizzare quali intersezioni complete le curve di S_r aventi ordine $N=n_1n_2\dots n_{r-1}$.

Ad es., per $r=3$, $n_1=n_2=3$ la *a*) impone che sia $p_1=10$.

Ora esistono in S_3 delle curve C irriducibili e prive di punti multipli d'ordine $N=9$ e genere $p=10$, le quali non possono essere intersezioni complete di due superficie cubiche, perchè appartengono ad una quadrica. (Nella proiezione stereografica della quadrica le C hanno per immagine sul piano iconico curve C' d'ordine 9 passanti con molteplicità 3 e 6 per i due punti fondamentali della rappresentazione).

La condizione *a*) da sola non basta a caratterizzare neanche le varietà V_d intersezioni complete, aventi dimensione $d>1$ ed ordine $N=n_1n_2\dots n_{r-d}$.

Ad es., per $r=4$, $n_1=n_2=2$ ($d=2$), la *a*) impone che sia $p_2=0$. Tuttavia una generica proiezione in S_4 della superficie di Veronese, pur avendo ordine $N=4$ e genere $p_2=P_a=P_g=0$, non è affatto intersezione completa di due iperquadriche di S_4.

ordini $n_1, n_2, \dots, n_{r-d}$ (e in tal caso la condizione a) risulta sovrabbondante). ([15])

Tuttavia, se si ammette che V_d^* possa essere spezzata, la sola condizione *b*) non basta a riconoscerla come intersezione completa.

Ciò è provato dal seguente esempio.

Si consideri in S_4 una superficie V^*_2 del quart'ordine formata da quattro *piani* generici α_1, α_2, α_3, α_4 (non intersecantisi a due a due secondo rette); s'indichi con P_{ik} il punto intersezione dei piani α_i, α_k, e con S_3 l'iperpiano individuato da P_{13}, P_{23}, P_{14}, P_{24}. Tale S_3 taglia i quattro piani α_1, α_2, α_3, α_4 rispettivamente secondo le quattro rette

$$s \equiv P_{13}P_{14}, \quad s' \equiv P_{23}P_{24}, \quad t \equiv P_{13}P_{23}, \quad t' \equiv P_{14}P_{24}$$

le quali formano complessivamente una curva V_1^* (del quart'ordine) sezione di V_2^* con l'iperpiano S_3.

Ora si noti che la retta t si appoggia alle rette s, s' nei punti P_{13}, P_{23}, e la retta t' si appoggia ad s, s' nei punti P_{14}, P_{24}.

Tenendo conto di ciò, si vede facilmente che la curva V^*_1 appartiene ad ∞^1 quadriche di S_3, e quindi risulta intersezione completa di due di esse, diciamo F, F'.

Tuttavia la superficie V_2^* non è intersezione completa di due iperquadriche di S_4.

Per dimostrarlo consideriamo la curva $\bar{V}_1^*$ sezione di V_2^* con un iperpiano $\bar{S}_3$ che non passi per nessuno dei sei punti P_{ik}. Se

([15]) Questa proposizione si trova dimostrata nella nota [4] dell'A., ed è equivalente ad un teorema di Jongmans, [3], p. 460.

Per completezza riferiamo qui la breve dimostrazione.

Dentro l'iperpiano S_{r-1}, che taglia su V^*_d la varietà V^*_{d-1} intersezione completa di $r-d$ forme irriducibili degli ordini $n_1, n_2, \dots, n_{r-d}$, consideriamo una successione di spazi lineari S_{r-2}, $S_{r-3}, \dots$, S_{r-d+2}, S_{r-d+1} contenuti ciascuno nel precedente e del resto generici.

Siano V^*_{d-2}, $V^*_{d-3}, \dots$, V^*_2, V^*_1 le sezioni rispettive di V^*_{d-1} (e di V^*_d) con i detti spazi. Per l'ipotesi fatta su V^*_{d-1}, la curva V^*_1 risulta intersezione completa di $r-d$ forme di S_{r-d+1}; inoltre, poichè V^*_d è priva di varietà multiple a $d-1$ dimensioni, V^*_1 risulta priva di punti multipli. Quindi V^*_1 è aritmeticamente normale (Severi [6], n. 6), il che implica che anche V^*_2, $V^*_3, \dots$, V^*_{d-1}, V^*_d siano aritmeticamente normali (cfr. ad es. Gaeta [2], p. 193), cioè di prima specie. Orbene poichè V^*_d è di prima specie, succede che le forme irriducibili di S_{r-1} di cui V^*_{d-1} è intersezione completa, sono segate sopra S_{r-1} da forme degli stessi ordini passanti per V^*_d, il che prova che V^*_d è intersezione completa di queste ultime forme.

V_2^* fosse intersezione completa di due iperquadriche, $\overline{V}_1^*$ dovrebbe essere intersezione completa di due quadriche di $\overline{S}_3$; ma ciò è evidentemente assurdo in quanto $\overline{V}_1^*$ è formata da quattro rette, sghembe a due due.

Questo esempio mette in luce un' altra circostanza interessante, e precisamente che *la superficie* V_2^* *non è di prima specie* (in quanto almeno una delle quadriche F, F' di S_3 passanti per V_1^* non è segata sopra S_3 da un' iperquadrica contenente V_2^*) *mentre la sua sezione iperpiana* V_1^* *è di prima specie* (perchè intersezione completa di due quadriche di S_3).

Ciò mostra che la nota proprietà enunciata da GAETA ([16]) per le varietà irriducibili localmente normali: « Se *una* sezione iperpiana di una varietà V_d è di prima specie, allora anche V_d è di prima specie » non può essere estesa alle varietà spezzate.

([16]) Cfr [2], p. 193.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. DUBREIL, *Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l' Algébre moderne*, « Act. scient. ind. », 210, Hermann, Paris (1935).

[2] F. GAETA, *Sulle curve sghembe di residuale finito*, « Annali di Matem. », serie IV, t. XXVII (1948).

[3] F. JONGMANS, *Contribution à la théorie des variétés algébriques*, « Mém. Soc. Scient. », Liège, IV, 7 (1947).

[4] E. MARCHIONNA, *Varietà intersezioni complete e varietà di diramazione*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXXV (1952).

[5] E. MARCHIONNA, *Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche*, (Nota III) « Rend. Acc. Lincei », Serie VIII, vol. XXIV, fasc. 6 (1958).

[6] F. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione*, « Rend. Circ. Matem. di Palermo », t. XVII (1903).

[7] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, « Rend. Circ. Matem. di Palermo », t. XXVIII (1909).

[8] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (2ª memoria), « Annali di Matem. », Serie IV, t. XXXII (1951).

[9] O. ZARISKI, *Complete linear systems on normal varieties and generalization of a lemma of Enriques-Severi*, « Annals of Mathem. », 55 (1952).