Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Francia

Un criterio di sommazione per le serie di potenze.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 372–382.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_372_0>

Un criterio di sommazione per le serie di potenze.

Nota di GIOVANNI FRANCIA (a Genova)

Sunto. - *Si espone un criterio di sommazione e di convergenza per le serie di potenze, che in casi abbastanza generali estende il campo di convergenza fino alla stella rettilinea di* MITTAG-LEFFLER. *Per la sua semplicità e per la rapidità della convergenza esso appare particolarmente efficace per il calcolo numerico.*

Summary. - *In this Note I introduce a criterium for the summation and convergence of powers series wich in several cases enlarge the region of convergence to the star of* MITTAG-LEFFLER. *Owing to its simple form and the rapidity of the convergence it appears particularly potent for the numerical calculus.*

Sono noti diversi criteri di sommazione per serie divergenti e per serie di potenze [1]; in questo lavoro studio un procedimento di sommazione per serie di potenze, che mi sembra opportuno mettere in evidenza e sviluppare, sopratutto per le sue caratteristiche di semplicità. Esso è nato dallo studio di un problema meccanico molto noto alla cui soluzione utilmente si presta. Il procedimento si rifà all' idea di associare ad ogni serie di potenze $S(x)$. di una variabile complessa x, e ad ogni coppia di numeri h, p (h complesso $\neq 0$ e p intero non negativo) una serie di funzioni razionali ${}^{h,p}S(x)$ convergente in un campo ${}^{h}\Gamma$ (indipendente

[1] Sono classici, per es., quelli dovuti a EULERO, ABEL, HÖLDER, CESARO, LE ROY, BOREL, RIESZ; per notizie e informazioni bibliografiche confrontare: K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin 1924. Più recenti sono quelli di GRONWALL (T. H. GRONWALL, *Summation of series and conformal mapping*, « Annals of Mathematics », Second series, vol. 33, 1932) ampiamente studiati e generalizzati da L. AMERIO (L. AMERIO, *Un metodo di sommazione per le serie di potenze e sua applicazione alla teoria della trasformazione di Laplace*, « Annali Sc. N. di Pisa », Serie II, 1939 e *Sulle condizioni di validità dei metodi di sommazione di Gronwall,* « Annali di Matematica », Serie IV, Tomo XVIII, 1939) e da C. BIRINDELLI (C. BIRINDELLI, *Contributo all'analisi dei metodi di sommazione di Gronwall*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », Tomo LXI, 1938; *Sull'applicazione dei metodi di sommazione di Gronwall al problema del prolungamento analitico*, « Annali Sc. N. di Pisa », Serie II, vol. VI, 1937 e *Sui metodi di Gronwall per la sommazione delle serie*, « Annali Sc. N. di Pisa, Serie II, Vol. VIII, 1939).

da p) avente una regione comune col cerchio di convergenza C della $S(x)$, *e contenente interamente* C *per almeno un valore di* h.

In ogni punto di $C \cap {}^{h}\Gamma$ la somma delle ${}^{h,p}S(x)$ coincide con quella di $S(x)$ sicchè ciascuna delle ${}^{h,p}S(x)$ individua la stessa funzione olomorfa rappresentata in C da $S(x)$; e due serie ${}^{h_1,p_1}S(x$ ${}^{h_2,p_2}S(x)$ coincidono in ${}^{h_1}\Gamma \cap {}^{h_2}\Gamma$.

Risulterà dal seguito come le ${}^{h,p}S(x)$ convergono assai rapidamente, sicchè l'uso della serie ${}^{h,p}S(x)$ appare particolarmente efficace per il calcolo numerico; in casi abbastanza generali il campo di convergenza delle ${}^{h,p}S(x)$ è molto più vasto del campo di convergenza della $S(x)$ e comprende la stella rettilinea di MITTAG-LEFFLER. Illustrerò tutto questo con un esempio che, sebbene assai semplice, credo sarà sufficiente a mettere in evidenza l'interesse e la portata dei risultati.

Consideriamo la serie:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots; \tag{1}$$

dove $x = x_1 + i x_2$ è una variabile complessa; e sia $r \neq 0$ il suo raggio di convergenza e C il cerchio $|x| < r$.

Sia $f(x)$ una funzione olomorfa che coincide con la $S(x$ in C; diremo D il campo di olomorfia di $f(x)$ nel senso di PICONE [2].

Poniamo per definizione:

$$ {}^{h,p}b_0 = a_0 \tag{2}$$

ed

$$\begin{aligned} {}^{h,p}b_n = {} & \binom{n+p-1}{0} a_{1-p} h^{1-p} + \binom{n+p-1}{1} a_{2-p} h^{2-p} + \\ & + \binom{n+p-1}{2} a_{3-p} h^{3-p} + \ldots + \binom{n+p-1}{n+p-2} a_{n-1} h^{n-1} + \\ & + \binom{n+p-1}{n+p-1} a_n h^n ; \end{aligned} \tag{3}$$

con $h \neq 0$ e p intero, positivo o nullo, convenendo di considerare nulle le a_i con indice negativo;
e, supposto $x \neq -h$, consideriamo la serie:

$$ {}^{h,p}S(x) = \left(\frac{h}{h+x}\right)^p \sum_{n=0}^{n=\infty} {}^{h,p}b_n \left(\frac{x}{h+x}\right)^n . \tag{4}$$

Ci proponiamo di dimostrare che:
la (4) converge in un campo ${}^{h}\Gamma$ (dimostreremo che esso non dipende da p) che ha sempre in comune con C un intorno dell'origine; in questo intorno la (4) e la (1) hanno la stessa somma.

[2] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Napoli, RONDINELLA, II ed. 1946.

Di conseguenza la (4) rappresenta, nel suo campo di convergenza ${}^h\Gamma$, la stessa funzione olomorfa $f(x)$ sopra definita.

Mostreremo che, in molti casi, il campo ${}^h\Gamma$ contiene C ed è molto più vasto di C; infine vedremo che le ${}^{h,p}S(x)$ convergono molto rapidamente.

Moltiplicando e dividendo la (1) per $(h+x)^p$ si ha, per $x \neq -h$:

$$S(x) = \frac{h^p}{(h+x)^p}[c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots]; \tag{5}$$

dove le c_n sono definite dalla:

$$c_n = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} h^{-s} a_{n-s} = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} h^{s-p} a_{n-p+s} \tag{6}$$

con la solita convenzione di considerare nulle le a_t con indice negativo.

La serie che compare tra parentesi quadre in (5) ha lo stesso raggio di convergenza della (1).

Poniamo ora:

$$x = \frac{hy}{1-y}; \tag{7}$$

da cui:

$$\frac{h}{h+x} = 1 - y; \text{ ed } y = \frac{x}{x+h}. \tag{7 bis}$$

La (5) diventa (essendo $h \neq 0$ sarà anche $y \neq 1$):

$$S\left(\frac{hy}{1-y}\right) = (1-y)^p\left[c_0 + c_1 \frac{hy}{1-y} + c_2\left(\frac{hy}{1-y}\right)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + c_n\left(\frac{hy}{1-y}\right)^n + \ldots\right]; \tag{8}$$

convergente per

$$\left|\frac{hy}{1-y}\right| < r. \tag{9}$$

Studiamo, nel piano y, il campo (9).

Posto $y = y_1 + iy_2$, in corrispondenza rispettivamente di: $|h| = r$; $|h| > r$; $|h| < r$; si trova:

$|h| = r$: la (8) converge nel semipiano $y_1 < \frac{r}{2}$; questo dominio comprende il cerchio di centro l'origine e raggio $\frac{r}{2} = \frac{r}{|h| + r}$;

$|h| > r$: la (8) converge nei punti *interni* al cerchio che ha centro in $\frac{r^2}{|h|^2 - r^2}$ e raggio $\frac{r\,|h|}{|h|^2 - r^2}$; questo dominio comprende il cerchio di centro l'origine e raggio $\frac{r}{|h| + r}$;

$|h| < r$: la (8) converge nei punti *esterni* al cerchio che ha centro in $\frac{r^2}{|h|^2 - r^2}$ e raggio $\frac{r\,|h|}{r^2 - |h|^2}$; questo dominio comprende il cerchio di centro l'origine e raggio $\frac{r}{|h| + r}$.

In tutti i casi dunque la (8) converge nel cerchio che ha per centro l'origine $y = 0$ e raggio $\frac{r}{|h| + r} < 1$.

Essa è in quel cerchio una funzione olomorfa della y e si ha pertanto:

$$(10) \qquad (1-y)^p \left[c_0 + c_1 \frac{hy}{1-y} + c_2 \left(\frac{hy}{1-y}\right)^2 + \dots + c_n \left(\frac{hy}{1-y}\right)^n + \dots\right] =$$

$$= (1-y)^p g(y) = (1-y)^p \left[g(0) + y g'(0) + \frac{y^2}{2!} g''(0) + \dots + \frac{y^n}{n!} g^{(n)}(0) + \dots\right].$$

Esprimiamo $g^n(0)$ mediante le a_i.

Tenuto conto delle:

$$\left[D^n \left(\frac{y}{1-y}\right)^m\right]_{y=0} = m! \binom{n}{n-m} \left[D^{n-m} \frac{1}{(1-y)^m}\right]_{y=0} =$$

$$= m! \binom{n}{n-m} \frac{(n-1)!}{(m-1)!} = n! \binom{n-1}{m-1}; \text{ per } n \geq m > 0;$$

$$\left[D^n \left(\frac{y}{1-y}\right)^m\right]_{y=0} = 0, \qquad \text{per } n < m;$$

si ha:

$$(11) \qquad g^n(0) = n! \sum_{r=0}^{r=n-1} \binom{n-1}{r} c_{r+1} h^{r+1}$$

ossia:

$$(12) \qquad \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \binom{n-1}{r} \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} a_{r+1+s-p} h^{r+1+s-p}.$$

Posto per brevità $r + s = q$, la somma che compare nel secondo membro della (12) può scriversi:

$$(13) \qquad \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{s=0}^{s=p} \binom{n-1}{r} \binom{p}{s} a_{q+1-p} h^{q+1-p}$$

od anche, ordinando gli addendi per valori crescenti di q:

$$(14) \qquad \sum_{q=0}^{n+p-1} a_{q+1-p} h^{q+1-p} \sum_{r=0}^{q} \binom{n-1}{r} \binom{p}{q-r} =$$

$$= \sum_{q=0}^{n+p-1} \binom{n+p-1}{q} a_{q+1-p} h^{q+1-p}$$

cioè, per la (3)

$$\frac{1}{n!}g^{(n)}(0) = {}^{h,p}b_n\,;\ g(0) = {}^{h,p}b_0 \tag{15}$$

Dalle (13), segue:

$$(1-y)^p\left[c_0 + c_1\frac{hy}{1-y} + c_2\left(\frac{hy}{1-y}\right)^2 + \dots + c_n\left(\frac{hy}{1-y}\right)^n + \dots\right] = \tag{16}$$

$$= (1-y)^p[{}^{h,p}b_0 + {}^{h,p}b_1 y + {}^{h,p}b_2 y^2 + \dots + {}^{h,p}b_n y^n + \dots]\,;$$

la serie a secondo membro della (16) converge almeno entro il cerchio di centro $y = 0$ e di raggio $\frac{r}{|h| + r}$.

Sostituendo nella (16) i valori dati dalle (7 bis) si ha:

$$(1-y)^p \sum_{i=0}^{i=\infty} {}^{h,p}b_i y^i = \left(\frac{h}{h+x}\right)^p \sum_{i=0}^{i=\infty} {}^{h,p}b_i \left(\frac{x}{h+x}\right)^i,$$

cioè la (4).

Il secondo membro della (4) converge almeno nel dominio: $\left|\frac{x}{h+x}\right| < \frac{r}{|h| + r}$: che si può scrivere:

$$\left|x - \frac{h}{|h|}\frac{r^2}{2r + |h|}\right| < \frac{r(|h| + r)}{2r + |h|}\,; \tag{17}$$

ed è un cerchio che comprende l'origine.

Il dominio (17) ed il cerchio C hanno sempre una parte in comune; in questa parte comune la (1) e la (4) coincidono; di conseguenza la funzione olomorfa individuata dalla (4) è la stessa individuata dalla (1).

Cerchiamo il campo di convergenza della (4).

Indichiamo con I l'insieme dei punti singolari di $f(x)$ e diciamo R_h l'estremo inferiore della funzione $\left|\frac{\alpha}{h+\alpha}\right|$ al variare di α in I; il campo di convergenza della (4) è:

$$\left|\frac{x}{h+x}\right| < R_h. \tag{18}$$

Chiameremo ${}^h\Gamma$ questo campo per metterne in evidenza la dipendenza da h; esso invece non dipende da p. Avendo supposto la (1) convergente in un cerchio di raggio $r \neq 0$, sarà certamente $R_h \neq 0$.

La funzione olomorfa $f(x)$ rappresentata dalla (1) nel campo C è rappresentata dalla (4) nel campo ${}^h\Gamma$; la (1) potrà essere sostituita dalla (4) nel campo di convergenza di questa ultima.

È facile riconoscere che il contorno di ${}^h\Gamma$ è sempre un cerchio (eventualmente degenere in una retta); in corrispondenza di valori di R_h minori, maggiori, od uguali ad 1 si ha, posto $h = h_1 + ih_2$:

α) $R_h < 1$: ${}^h\Gamma$ è costituito dai punti *interni* al cerchio γ di centro $A = \frac{hR_h^2}{1 - R_h^2}$ e di raggio $\rho = \left|\frac{hR_h}{1 - R_h^2}\right|$; il cerchio δ_h di centro l'origine 0 e di raggio $\frac{|h| R_h}{1 + R_h}$ è contenuto in ${}^h\Gamma$, ed è tangente al suo contorno;

β) $R_h > 1$: ${}^h\Gamma$ è costituito dai punti *esterni* al cerchio γ di centro $A = \frac{hR_h^2}{1 - R_h^2}$ e di raggio $\rho = \left|\frac{hR_h}{1 - R_h^2}\right|$; il cerchio δ_h di centro l'origine 0 e raggio $\frac{|h| R_h}{1 + R_h}$ è contenuto in ${}^h\Gamma$ ed è tangente al suo contorno;

γ) $R_h = 1$: ${}^h\Gamma$ è costituito dai punti del semipiano $h_1x_1 + h_2x_2 + \frac{|h|^2}{2} > 0$; il cerchio δ_h di centro l'origine 0 e di raggio $\frac{|h| R_h}{1 + R_h}\left(= \frac{|h|}{2}\right)$ è contenuto in ${}^h\Gamma$ ed è tangente al suo contorno.

Questi tre casi possono essere riassunti così:
il campo ${}^h\Gamma$ *è costituito da quella, delle due parti in cui il cerchio di centro* $A = \frac{hR_h^2}{1 - R_h^2}$ *e di raggio* $\rho = \left|\frac{hR_h}{1 - R_h^2}\right|$ (degenere nella retta $h_1x_1 + h_2x_2 + \frac{|h|^2}{2} = 0$ se $R_h = 0$) *divide il piano, che contiene l'origine.*

Si può individuare ${}^h\Gamma$ in modo molto più espressivo.

I. Sia γ un cerchio passante per almeno uno dei punti α e soddisfacente ad una delle due seguenti condizioni:

a) nessun punto singolare della $f(x)$ è interno a γ: l'origine è interna a γ;

b) nessun punto singolare della $f(x)$ è esterno a γ: l origine è esterna a γ.

Chiamati A il centro di γ e ρ il suo raggio si trova facilmente che per

$$h = A\left(\frac{\rho^2}{|A|^2} - 1\right) \tag{18}$$

γ è contorno del campo ${}^h\Gamma$ costituito: nel caso a) dai punti interni al cerchio; nel caso b) dai punti esterni al cerchio.

I casi Ia) e Ib) corrispondono dunque ai casi α) e β) di pag. 377.

II. Se esiste una retta $\bar{\gamma}$, di equazione $x_1 \cos\varphi + x_2 \operatorname{sen}\varphi + d = 0$, con $d \neq 0$, passante per almeno uno dei punti α, e tale che in quello, dei due semipiani da essa individuati, che contiene l'origine, non cada nessun punto singolare della $f(x)$, il campo ${}^h\Gamma$. con

$$h = 2d(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi), \tag{19}$$

è costituito da quello, dei due semipiani individuati da $\bar{\gamma}$, che contiene l'origine.

Il caso II corrisponde al caso γ di pag. 377.

I punti I e II forniscono una definizione di ${}^h\Gamma$ assai comoda, quando, conoscendo il dominio D in cui è definita la $f(x)$ si voglia trovare quale degli sviluppi ${}^{h,p}S(x)$ è più conveniente.

Consideriamo alcuni casi particolari, notevoli perchè comprendenti molte delle funzioni elementari.

1). Se la funzione $f(x)$ è olomorfa in tutto il piano salvo un solo punto singolare, esiste un valore di h in corrispondenza del quale le ${}^{h,p}S(x)$ convergono in tutto il piano eccetto quel punto.

Infatti:
chiamato α l'unico punto singolare della $f(x)$ consideriamo il cerchio γ di centro $A = \alpha$ e di raggio $\rho = 0$; esso soddisfa alle condizioni Ib: applicando la (18) si trova che le ${}^{h,p}S(x)$ con $h = -\alpha$ e p qualsiasi verificano l'asserto.

2). Se la funzione $f(x)$ è olomorfa in tutto il piano salvo due punti singolari, entrambi al finito, e se γ è il cerchio che ha questi punti come estremi di un diametro (e non passa per l'origine), esiste un valore di h in corrispondenza del quale le ${}^{h,p}S(x)$ convergono in quella, delle due parti in cui γ divide il piano, che contiene l'origine.

Infatti:
chiamati α e β i due punti singolari, il cerchio γ di centro $\frac{\alpha+\beta}{2}$ e di raggio $\frac{|\alpha-\beta|}{2}$ soddisfa ad una delle due condizioni I); applicando la (18) si trova che le ${}^{h,p}S(x)$ con

$$h = \frac{\alpha+\beta}{2}\left(\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right|^2 - 1\right)$$

e p qualsiasi verificano l'asserto.

2 bis). Se la funzione $f(x)$ è olomorfa in tutto il piano salvo un solo punto singolare α al finito ed è singolare all'infinito e se $\bar{\gamma}$ è una retta che passa per α e non passa per l'origine, esiste un valore di h in corrispondenza del quale le ${}^{h}{}_{p}S(x)$ convergono in quello, dei due semipiani individuati da $\bar{\gamma}$, che contiene l'origine.

Infatti:

$\bar{\gamma}$ soddisfa alla condizione II); se $x_1 \cos\varphi + x_2 \operatorname{sen}\varphi + d = 0$ è la sua equazione, applicando la (19) si trova che le ${}^{h,p}S(x)$ con

$$h = 2d(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

e p qualsiasi verificano l'asserto.

3). Se la funzione $f(x)$ è singolare all'∞ ed ha un numero qualunque di altri punti singolari, ma è olomorfa in tutto un semipiano che contiene l'origine, esiste un ${}^{h}\Gamma$ che coincide con quel semipiano. Dimostrazione come al numero precedente.

4). Se tutti i punti singolari della funzione olomorfa $f(x)$ stanno su un cerchio γ, non passante per l'origine, di centro A e di raggio ρ, esiste un valore di h in corrispondenza del quale le ${}^{h,p}S(x)$ convergono in quella, delle due parti in cui γ divide il piano, che contiene l'origine.

Infatti:

il cerchio γ soddisfa ad una delle due condizioni I); le ${}^{h,p}S(x)$ con

$$h = A\left(\frac{\rho^2}{|A|^2} - 1\right)$$

e p qualsiasi, verificano l'asserto.

La proprietà continua a valere quando il cerchio γ degenera in una retta $\bar{\gamma}$.

Se x_0 è un punto che sta, rispetto a γ (od a $\bar{\gamma}$), dalla parte opposta dell'origine, e se si conosce, della $f(x)$, oltre allo sviluppo di partenza $S(x)$, anche lo sviluppo $\bar{S}(x - x_0)$ in serie di potenze di $x - x_0$, ripetendo il ragionamento fatto poc'anzi, si trovano le ${}^{\bar{h},p}\bar{S}(x - x_0)$ convergenti in quella, delle parti in cui γ divide il piano, che non contiene l'origine.

Le ${}^{h,p}S(x)$ ed ${}^{\bar{h},p}\bar{S}(x - x_0)$ rappresentano la $f(x)$ in tutto il piano all'infuori del cerchio γ.

I risultati fin qui esposti e, più ancora, le applicazioni di cui daremo qualche esempio più avanti, suggeriscono una estensione del concetto di convergenza delle serie di potenze e, quindi, delle serie numeriche.

Cominciamo con l'osservare che se ${}^{h'}\Gamma$ e ${}^{h''}\Gamma$ hanno a comune un punto X, le ${}^{h',p}S(x)$ e le ${}^{h'',p}S(x)$ hanno lo stesso valore in X:

infatti ${}^{h'}\Gamma$ ha in comune con C il cerchio $\delta_{h'}$, $|x| < \left|\dfrac{h'R_{h'}}{1+R_{h'}}\right|$, e ${}^{h''}\Gamma$ ha in comune con C il cerchio $\delta_{h''}$, $|x| < \left|\dfrac{h''R_{h''}}{1+R_{h''}}\right|$, entrambi di raggio non nullo; nel più piccolo di quei due cerchi ${}^{h',p}S(x)$ ed ${}^{h'',p}S(x)$ coincidono; esse coincidono dunque in tutta l'area comune.

Poniamo ora $\Gamma = \bigcup {}^h\Gamma$. È facile dimostrare che il campo Γ così definito contiene sempre il cerchio C in cui la serie $S(x)$ converge al modo solito (è anzi $\lim\limits_{h\to\infty} {}^h\Gamma = C$): quando il contorno di C è tutto costituito di punti singolari, $\Gamma = C$; negli altri casi $\Gamma \supset C$.

Porremo la seguente:

DEFINIZIONE. - *Una serie di potenze $S(x)$ converge in senso generalizzato in X quando esiste un valore h in corrispondenza del quale le ${}^{h,p}S(x)$ convergono al modo solito in X; chiameremo campo di convergenza Γ l'insieme di tutti i punti X in cui la serie converge secondo la nostra definizione, cioè l'unione di tutti i campi ${}^h\Gamma$; porremo infine $S(X) = {}^{h,p}S(X)$.*

Esaminiamo alcuni casi particolari:

1) quando la $f(x)$ individuata dalla $S(x)$ ha un solo punto singolare α il campo Γ coincide con ${}^{-\alpha}\Gamma$ e comprende tutto il piano eccetto il punto α.

2) quando la $f(x)$ individuata dalla $S(x)$ ha due soli punti singolari, α e β, (uno dei quali eventualmente improprio) il campo Γ comprende tutto il piano eccetto l'arco $\alpha\beta$ del cerchio (eventualmente degenere) che passa per i punti α, β, 0, che non contiene l'origine.

3) quando tutti i punti singolari della $f(x)$ individuata dalla $S(x)$ stanno su un cerchio eventualmente degenere che passa per l'origine, il campo Γ comprende tutto il piano eccetto quello, degli archi di cerchio che contengono tutti i punti singolari, che non contiene l'origine.

ESEMPIO. -

La serie:

$$S(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{n!\,2^n}x^n + \ldots; \tag{20}$$

converge nel cerchio C, $|x| < 1$, e definisce la funzione olomorfa $f(x) = \sqrt{1+x}$ che ha i soli punti singolari -1 ed ∞. Siamo nel caso 2) di pag. 380 e 2 bis) di pag. 379:

il campo Γ è costituito da tutto il piano complesso esclusi i punti di quella, delle semirette in cui il punto -1 divide l'asse reale, che non contiene l'origine;
ogni retta passante per -1 (e non per l'origine) è contorno di un campo ${}^h\Gamma$ costituito dal semipiano che contiene l'origine.

Consideriamo, in particolare, la retta $x_1 + 1 = 0$; applicando la (19) troviamo $h = 2$: le ${}^{2,p}S$ convergono in tutto il semipiano $x_1 > -1$. L'andamento della funzione $\sqrt{1+x}$ suggerisce la scelta $p = 0$; applicando le (3) si trova

$$ {}^{2,0}b_{2n} = {}^{2,0}b_{2n-1} = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} ; $$

e sostituendo nella (4):

$$ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2+x}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2+x}\right)^3 + \dots \tag{21} $$

La (21) converge molto più rapidamente della (20).

Tra gli infiniti sviluppi ${}^{h,p}S(x)$ conviene scegliere, volta per volta, quello che meglio soddisfa alle esigenze del calcolo; per es., uno sviluppo rapidissimamente convergente per x, reale, compreso tra $-0,3$ ed 1, si ottiene ponendo il centro A del cerchio di convergenza nel punto $2/5$, da cui segue $\rho = 7/5$ e per la (18):

$$ h = \frac{2}{5}\left(\frac{49}{25} \Big/ \frac{4}{25} - 1\right) = \frac{9}{2} ; $$

da cui, sempre per $p = 0$:

$$ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{9}{4}\,\frac{x}{9/2+x} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{9/2+x}\right)^2 + \dots ; $$

e, fermandoci al secondo termine:

$$ \sqrt{1+x} \simeq \frac{18+13x}{18+4x} . \tag{22} $$

La tabella seguente mostra l'approssimazione della (22), nell'intervallo considerato:

$1+x$	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
$\frac{18+13x}{18+4x}$	0,8393	0,8953	0,9488	1	1,0489	1,0957	1,1406
$\sqrt{1+x}$	0,8367	0,8944	0.9487	1	1,0488	1,0954	1,1402
Diff.	+0,0026	+ 0,0009	+0,0001	0	+0,0001	+0,0003	+0,0004

$1+x$	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$\frac{18+13x}{18+4x}$	1,1837	1,2250	1,2647	1.3029	1,3396	1,3750	1,4091
$\sqrt{1+x}$	1,1832	1,2247	1,2649	1,3038	1,3416	1,3784	1,4142
Diff.	+0,0005	+0,0003	−0,0002	−0,0009	−0,0020	− 0,0034	−0,0051

La funzione $\sqrt{1+x}$, che ha i soli punti singolari -1 ed ∞, soddisfa alla condizione 4) di pag. 379: come dallo sviluppo in serie di potenze di x, (20), abbiamo ottenuto lo sviluppo (21) convergente nel semipiano $x_1 > -1$; così da uno sviluppo in serie di potenze di $x - x_0$, con x_0 appartenente al semipiano $x_1 < -1$, si ottengono gli sviluppi ${}^{h,p}S(x - x_0)$ convergenti in tutto il semipiano $x_1 < -1$.

Dall'identità $\sqrt{1+x} = i\sqrt{1-(x+2)}$, sviluppando il secondo membro in serie di potenze di $x+2$ si ha:

$$\sqrt{1+x} = i\left[1 - \frac{x+2}{2} - \frac{(x+2)^2}{8} - \frac{(x+2)^3}{16} - \dots\right]. \tag{23}$$

La (23) converge nel cerchio $|x+2| < 1$ di centro -2; posto $x+2 = z$, la (23) individua la funzione olomorfa $f(z) = i\sqrt{1-z}$ che ha i soli punti singolari $z=1$ e $z=\infty$; ad ogni retta passante per $z=1$ (e non per l'origine) corrispondono infinite ${}^{h,p}S(z)$ convergenti in quello, dei due semipiani individuati dalla retta, che contiene l'origine $z=0$. Scelta, come al solito, la retta $z_1 - 1 = 0$, posto $p = 0$, dalle (19), (3) e (4) si ha, nel semipiano $z_1 < 1$, cioè, ritornando alla variabile x, $x_1 < -1$:

$$\sqrt{1+x} = i + i\frac{x+2}{x} + \frac{i}{2}\left(\frac{x+2}{x}\right)^2 + \frac{i}{2}\left(\frac{x+2}{x}\right)^3 + \frac{3i}{8}\left(\frac{x+2}{x}\right)^4 + \dots. \tag{24}$$

Le (24) e (21) danno una rappresentazione della funzione $\sqrt{1+x}$ in tutto il piano complesso esclusi, al più, i punti della retta $x_1 = -1$.