Vincenzo Capra

Sulla traiettoria ottima di un missile leggero soggetto a forza gravitazionale centrale in atmosfera resistente.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 360–371.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_360_0>

Sulla traiettoria ottima di un missile leggero soggetto a forza gravitazionale centrale in atmosfera resistente.

Nota di VINCENZO CAPRA (a Torino)

Sunto - *Si stabilisce il programma della direzione della spinta da applicare perchè sia massima la gittata di un missile puntiforme, supponendo la resistenza proporzionale ad una potenza della velocità, la densità dell'aria variabile esponenzialmente con l'altezza e l'accelerazione di gravità di tipo Newtoniano. Si espone anche un procedimento per il calcolo numerico del programma.*

Summary. - *In order to settle the optimum trajectory of a pointlike missile and on the assumptions: drag proportional to a real power of the speed, exponential law for the variation of the air density with the height, central gravitational field the program of the direction of the thrust applied to the missile is found out. The numerical calculation of the program is devised too.*

1. In un recente lavoro [1], G. TORALDO DI FRANCIA ha esaminato il problema della determinazione del programma dell'orientamento, istante per istante, della direzione della spinta da applicare ad un missile puntiforme per ottenere la traiettoria di gittata massima. Il problema è stato studiato nelle seguenti ipotesi:

- forza propellente tale che il missile non abbandoni definitivamente l'atmosfera,
- terra piana e non in rotazione,
- resistenza dell'aria della forma $ae^{-by}v^2$ (y altezza dal suolo, v velocità, a e b costanti > 0),
- peso del missile trascurabile rispetto alla forza propellente (spinta) e alla resistenza (missile leggero).

Si riprende qui il problema considerando la terra sferica (non in rotazione), la traiettoria piana, l'accelerazione di gravità di tipo Newtoniano e la resistenza dell'aria della forma $ae^{-b\rho}v^n$, dove v è la velocità, ρ la distanza dal centro della terra, a, b, $n > 1$, costanti positive.

Il programma della direzione della spinta dipende dalla risoluzione di una equazione funzionale che viene eseguita numericamente.

Si osserva che le traiettorie ottime possono risultare omotetiche.

Per comodità di raffronto col lavoro citato [1] si sono usate, per quanto possibile, le stesse notazioni e la stessa disposizione degli argomenti.

Per quanto riguarda l'impostazione della questione si rimanda al lavoro di G. TORALDO [1], ma poichè colle nuove ipotesi introdotte non sono più utilizzabili le ordinarie equazioni della Balistica Esterna che ricorrono in [1], si premetterà, in sostituzione di quelle, la determinazione di alcune relazioni che verranno utilizzate nel corso del lavoro.

2. Supposta la terra sferica e non in rotazione e l' accelerazione di gravità di tipo Newtoniano, si stabiliscono subito le equazioni del moto di un grave lanciato con velocità iniziale non nulla e in direzione diversa dalla verticale. Da queste equazioni si traggono alcune conseguenze che verranno utilizzate successivamente. Siano perciò:

- $\vec{k}$, il versore della verticale locale della traiettoria nell'origine del moto,
- ρ la distanza polare (polo il centro della terra ,
- φ l'anomalia contata dalla verticale locale nell'origine del moto,
- $\vec{v}$ il vettore velocità,
- $\vec{R}$ il vettore resistenza del mezzo (funzione di v e di ρ),
- $\vec{g}$ il vettore accelerazione di gravità (funzione di ρ),
- ϑ la distanza zenitale locale relativa al vettore $\vec{v}$,
- m la massa del grave.

Se poi

$$\left\{\begin{aligned} \vec{v} &= e^{i(\varphi+\vartheta)} v \vec{k} \\ \vec{g} &= -e^{i\varphi} g(\rho) \vec{k} \\ \vec{R} &= -e^{i(\varphi+\vartheta)} R(v, \rho) \vec{k}, \end{aligned}\right. \qquad \left(g(\rho) = \frac{g^*}{\rho^2}\right) \tag{1}$$

dalla equazione vettoriale del moto:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{R}, \tag{2}$$

seguono facilmente le equazioni scalari:

$$\left\{\begin{aligned} m \frac{dv \cos\vartheta}{dt} - mv \sin\vartheta \frac{d\varphi}{dt} &= -mg(\rho) - R(v, \rho) \cos\vartheta \\ m \frac{dv \sin\vartheta}{dt} + mv \cos\vartheta \frac{d\varphi}{dt} &= -R(v, \rho) \sin\vartheta \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Associando alle (3) le

$$\frac{d\rho}{dt} = v \cos \vartheta, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v \sin \vartheta}{\rho} \tag{4}$$

si deducono le altre

$$m \frac{dv}{dt} = -mg(\rho) \cos \vartheta - R(v, \rho) \tag{5}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{g(\rho)\rho - v^2}{v\rho} \sin \vartheta. \tag{6}$$

Derivando le (4) e tenuto conto delle (5) e (6) si hanno infine le:

$$m \frac{d^2\rho}{dt^2} = -m \frac{g(\rho)\rho - v^2 \sin^2 \vartheta}{\rho} - \frac{R(v, \rho)}{v} \frac{d\rho}{dt} \tag{7}$$

$$m \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left[2m \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{\rho R(v, \rho)}{v^2 \sin \vartheta}\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{8}$$

3. $_1$ Si dimostrerà ora che anche sotto le mutate ipotesi continua a valere il risultato ottenuto in [1] secondo cui la gittata della traiettoria deve essere valutata in base alla posizione raggiunta alla fine della combustione. Se $\vec{F}(t)$ è la forza propellente non nulla in $0 \leq t < t_1$ $(F(t_1) = 0)$, $m(t) = \varepsilon M(t)$ la massa variabile, $ae^{-b\rho}v^{n-1}\vec{v}$ la resistenza dell'aria, l'equazione vettoriale del moto del missile è:

$$\varepsilon M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(t) - \varepsilon M(t)\vec{g} - ae^{-b\rho}v^{n-1}\vec{v}, \tag{9}$$

la quale per $\varepsilon \to 0$ assume la forma ridotta

$$\vec{F}(t) = ae^{-b\rho}v^{n-1}\vec{v}. \tag{10}$$

Dalla (10) risulta che $\vec{F}(t)$ e $\vec{v}$ hanno la stessa direzione ed inoltre dalla:

$$F(t) = ae^{-b\rho}v^n, \tag{11}$$

si ha che il missile deve essere lanciato con una forza impulsiva che gli imprime la velocità iniziale

$$v_0 = \sqrt[n]{\frac{F(0)}{ae^{-b\rho_0}}}.$$

Sostituendo nella (10) il valore di v che si ricava dalla (11) si ha:

$$e^{-\frac{b}{n}\rho}\vec{v} = \frac{\vec{F}(t)}{\sqrt[n]{a[F(t)]^{n-1}}}. \tag{12}$$

Considerato il riferimento polare introdotto in 2, la componente della (12) secondo la verticale locale risulta:

$$e^{-\frac{b}{n}\rho}\frac{d\rho}{dt} = \sqrt[n]{\frac{F(t)}{a}}\cos\vartheta(t). \tag{13}$$

Posto

$$K = \frac{n\sqrt{ae^{-b\rho_0}}}{b} \tag{14}$$

(ρ_0, distanza polare dell' origine della traiettoria)

e integrando la (13) si ha

$$e^{-\frac{b}{n}(\rho-\rho_0)} = 1 - \frac{1}{K}\int_0^t \sqrt[n]{F(\xi)}\cos\vartheta(\xi)d\xi. \tag{15}$$

Se per $t \leq t_1$ (t_1, istante in cui cessa la spinta) il secondo membro non si annulla il missile non può abbandonare definitivamente l'atmosfera terrestre (almeno durante la fase di combustione del propellente) e perciò basta che sia:

$$K > \int_0^{t_1} \sqrt[n]{F(\xi)}\, d\xi.$$

La componente della (12) secondo la orizzontale locale è

$$e^{-\frac{b}{n}\rho} v \sin\vartheta = \sqrt[n]{\frac{F(t)}{a}}\sin\vartheta. \tag{16}$$

Posto poi

$$h(t) = \frac{1}{K}\int_0^t \sqrt[n]{F(\xi)}\cos\vartheta(\xi)d\xi, \tag{17}$$

dalla (15) si ha

$$-\frac{b}{n}(\rho-\rho_0) = \lg[1-h(t)], \tag{18}$$

e con

(19) $\frac{b}{n}\rho_0 = m,$ (m ha significato diverso da quello che ha in 2.)

dalla (16) con la (15), (17), (18) e la seconda delle (4), segue:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{K}\,\frac{\sqrt[n]{F(t)}\,\sin\vartheta(t)}{[1-h(t)]\,\{m-\lg[1-h(t)]\}}\,. \tag{20}$$

Integrando la (20) fino a $t=t_1$ si ha l'anomalia alla fine della combustione del propellente:

$$\varphi_1 = \frac{1}{K}\int_0^{t_1}\frac{\sqrt[n]{F(t)}\,\sin\vartheta(t)}{[1-h(t)]\,\{m\lg[1-h(t)]\}}\,dt. \tag{21}$$

Per determinare la traiettoria di gittata massima si deve ottenere l'anomalia massima che è somma (perchè φ è sempre uscente come risulterà dai ragionamenti di $3._2$) della φ_1 data dalla (21) e dell'incremento della anomalia dopo la fine della combustione fino all'istante dell'impatto sulla superficie terrestre. Ma, come in [1], si dimostrerà che tale incremento $\Delta\varphi$ tende a zero per $\varepsilon \to 0$ ($m(t_1) = m_1 \to 0$). Sarà così $\varphi_{max} = \varphi_1$.

$3._2$ Si deve ora ottenere l'anomalia relativa a $t > t_1$. Intanto, se m_1 è la massa residua, costante, dopo la fine della combustione dalla (9) segue

$$m_1\frac{d\vec{v}}{dt} = m_1\vec{g} - ae^{-b\rho}v^{n-1}\vec{v} \qquad (m_1 = m(t_1) = \varepsilon M(t_1))\,, \tag{22}$$

che rientra nella (2) ponendo $\vec{R}(v,\rho) = -ae^{-b\rho}v^{n-1}\vec{v}$ e cambiando $\vec{g}$ in $-\vec{g}$. Si può quindi far ricorso a quanto stabilito in 2. In primo luogo trattandosi di missili destinati a non abbandonare definitivamente l'atmosfera terrestre è lecito supporre che, per $t \geq t_1$, sia sempre

$$g(\rho)\rho > v^2 \text{ (}^1\text{)} \tag{23}$$

e quindi (v. (6)) che sia sempre $\frac{d\vartheta}{dt} > 0$ se $\sin\vartheta > 0$. Ora, nel vuoto,

(1) $v > 6200\, m/s$ se $\rho = 8000\, Km$.

se è inizialmente $v \neq 0$ e $\vartheta \neq 0, \pi$, un grave soggetto a sola forza Newtoniana descrive una traiettoria ellittica. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti da alcuni Autori [2] si conclude, passando atmosfera resistente, che sono sempre $0 < \vartheta < \pi$ e $v > 0$ e perciò $\frac{d\vartheta}{dt} > 0$ e $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ (v.(4)).

Si può così cominciare col dimostrare che il tempo $t_2 - t_1$ per passare dal punto $P_1(\rho_1, \varphi_1)$, nel quale termina la combustione, al punto d'impatto, è finito. Infatti si ha (v. (23))

$$(24) \qquad -m_1 \frac{g(\rho)\rho - v^2 \sin^2 \vartheta}{\rho} \leq -m_1 \frac{g(\rho)\rho - v^2}{\rho} \leq -m_1 q < 0$$

$$\left(q = \text{cost} \leq \frac{g(\rho)\rho - v^2}{\rho}\right)$$

e inoltre

$$(25) \qquad A_1 < \frac{R(v, \rho)}{v} < A_2 \qquad (R(v, \rho) = ae^{-b\rho} v^n).$$

Supponendo che P_1 sia addirittura sul ramo ascendente il tempo $t_2 - t_1$ si compone del tempo $t_v - t_1$ necessario per raggiungere il vertice e del tempo $t_2 - t_v$ per passare dal vertice al punto d'impatto. Dalla (7) per le (24) e (25) si ha [3]:

$$m_1 \frac{d^2\rho}{dt^2} < -m_1 q - A_1 \frac{d\rho}{dt}$$

e quindi la soluzione della equazione

$$m_1 \frac{d^2\rho}{dt^2} + A_1 \frac{d\rho}{dt} + m_1 q = 0 \quad \left(t = t_1, \ \rho = \rho_1, \frac{d\rho}{dt} = \rho_1'\right)$$

facendovi $\frac{d\rho}{dt} = 0$ condizione corrispondente al passaggio per il vertice, v. (4)), fornisce una maggiorazione per $t_v - t_1$.

Sempre dalla (7) e per le (24) e (25) e tenuto conto che per $t > t_v$ è $\frac{d\rho}{dt} < 0$, si ha

$$m_1 \frac{d^2\rho}{dt^2} < -m_1 q - A_2 \frac{d\rho}{dt}.$$

Quindi la soluzione della equazione

$$m_1 \frac{d^2\rho}{dt^2} + A_2 \frac{d\rho}{dt} + m_1 q = 0 \quad \left(t = t_v, \ \rho = \rho_v, \frac{d\rho}{dt} = 0\right)$$

per $\rho = \rho_2$ (ρ_2 = raggio della terra) fornisce una maggiorazione per $t_2 - t_v$. Facili calcoli accertano che entrambe le maggiorazioni producono valori finiti. È quindi finito il tempo $t_2 - t_1$ per passare dal punto P_1 a quello d'impatto.

Ciò premesso, se (*v.* (8)):

$$B > \left| - \left[2m_1 \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{\rho R(v, \rho)}{v^2 \sin \vartheta}\right]\right|$$

risulta

$$m_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} < B \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

e $\varphi_2 - \varphi_1$ è maggiorata dalla soluzione della

$$m_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - B \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0 \quad \left(t = t_1, \ \varphi = \varphi_1, \ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_1 \sin \vartheta_1}{\rho_1}\right)$$

per $t = t_2$, e che risulta

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \frac{m_1}{B} \lg \frac{Bt_2 + m_1 C_1^*}{Bt_1 + m_1 C_1^*} \quad C_1^* = - \frac{\rho_1}{v_1 \sin \vartheta_1} - \frac{B}{m_1} t_1 \tag{26}$$

Il secondo membro della (26) tende a zero per $m_1 \to 0$ e quindi $(\varphi_2 - \varphi_1) \to 0$. Così l'anomalia massima è data dalla (21).

4.$_1$ Per determinare la traiettoria ottima bisogna individuare la φ_1 massima (*v.* (21)) come funzionale di $\vartheta(t)$. Tenuto conto della (21) e dei consueti procedimenti variazionali [4] si deduce che condizione necessaria per il massimo è che $\vartheta(t)$ soddisfi l'equazione funzionale:

$$\frac{\cos \vartheta(t)}{[1 - h(t)] \, | \, m - \lg [1 - h(t)] \, |} = \tag{27}$$

$$= \frac{\sin \vartheta(t)}{K} \int_t^{t_1} \frac{\sqrt[n]{F(\xi)} \sin \vartheta(\xi) \, | \, m - 1 - \lg [1 - h(\xi)] \, |}{[1 - h(\xi)]^2 \, | \, m - \lg [1 - h(\xi)] \, |^2} d\xi ,$$

dove $h(t)$ è dato dalla (17). Siccome la sua soluzione risulterà unica si potrà senza ulteriori discussioni accettarla come corrispondente al massimo cercato.

4.$_2$ Per risolvere il sistema delle equazioni (27) e (17), siccome quest' ultima si può scrivere

$$h'(t) = \frac{1}{K} \sqrt[n]{F(t)} \cos \vartheta(t), \tag{28}$$

si osserva che la (27) può assumere la forma seguente

$$\frac{Kh'(t)\,\{m - 1 - \lg[1 - h(t)]\}}{[1 - h(t)]^3\,\{m - \lg[1 - h(t)]\}^3} =$$
$$-\frac{1}{2K}\frac{d}{dt}\left[\int_t^{t_1} \frac{\sqrt[n]{F(\xi)}\,\sin\vartheta(\xi)\,\{m - 1 - \lg[1 - h(\xi)]\}}{[1 - h(\xi)]^2\,\{m - \lg[1 - h(\xi)]\}^2}\,d\xi\right]^2.$$

Integrando la precedente, estraendo la radice, derivando e riducendo:

$$\frac{-[1 - h(t_1)]\,\{m - \lg[1 - h(t_1)]\}\,h'(t)}{\sqrt{[1 - h(t)]^2\,\{m - \lg[1 - h(t)]\}^2 - [1 - h(t_1)]^2\,\{m - \lg[1 - h(t_1)]\}^2}} = \tag{29}$$
$$-\frac{1}{K}\sqrt[n]{F(t)}\,\sin\vartheta(t).$$

Quadrando e sommando le (28) e (29) ed estraendo nuovamente la radice si ottiene

$$\frac{[1 - h(t)]\,\{m - \lg[1 - h(t)]\}\,h'(t)}{\sqrt{[1 - h(t)]^2\,\{m - \lg[1 - h(t)]\}^2 - [1 - h(t_1)]^2\,\{m - \lg[1 - h(t_1)]\}^2}} = \tag{30}$$
$$= \frac{1}{K}\sqrt[n]{F(t)}\,.$$

Infine dalle (29) e (30) si ha

$$\sin\vartheta(t) = \frac{[1 - h(t_1)]\,\{m - \lg[1 - h(t_1)]\}}{[1 - h(t)]\,\{m - \lg[1 - h(t)]\}}\,. \tag{31}$$

Il sistema delle (27) e (17) risulta così trasformato in quello delle (31) e (30). In 5.$_1$ e segg. si vedrà come sia possibile ricavare la $h(t)$ dalla (30) dopo di che la (31) fornirà $\vartheta(t)$.

Si osserva intanto dalla (31) che $\sin \vartheta(t_1) = 1$ e quindi $\vartheta(t_1) = \frac{\pi}{2}$ e perciò il punto nel quale termina la combustione è il vertice della traiettoria.

4.$_3$ Per determinare l' equazione della traiettoria si riprenda la 20). Sostituendo mediante le (30) e (31) e siccome dalle (14), (16), 17), (18) e (19) si ha

$$(32)\quad 1-h(t)=e^{-\frac{b}{n}(\rho-\rho_0)},\ h'(t)dt = \frac{b}{n}\, e^{-\frac{b}{n}(\rho-\rho_0)}d\rho,\ m-\lg[1-h(t)] = \frac{b}{n}\rho,$$

si giunge alla:

$$(33)\qquad d\varphi = \frac{1}{K}\frac{d\rho}{\rho\sqrt{e^{-\frac{2b}{n}(\rho-\rho_1)}\frac{\rho^2}{\rho_1{}^2}-1}}.$$

Il radicando della (33) è sempre positivo in quanto $\frac{e^{2\frac{b}{n}\rho}}{\rho^2}$ è crescente con ρ perchè

$$D\ \frac{e^{2\frac{b}{n}\rho}}{\rho^2} = \frac{2e^{2\frac{b}{n}\rho}\left[\frac{b}{n}\rho-1\right]}{\rho}$$

che è positiva perchè $\frac{b}{n} > 0{,}00001$ [5] e $\rho > 6.300.000$.

Posto ancora $r = \frac{\rho}{\rho_1}$ e $\frac{2b}{n}\rho_1 = c$ si ha dalla (33):

$$(34)\qquad \varphi_1 - \varphi = \frac{1}{K}\int_r^1 \frac{dr}{r\sqrt{e^{c(1-r)}r^2-1}}.$$

Per la positività della funzione integranda la (34) risulta invertibile e quindi è

$$r = \psi[K(\varphi_1 - \varphi),\ c],$$

la quale prova che le traiettorie, a pari valori di K e di c, sono omotetiche. Inoltre dalla (16) e dall'ultima delle (32) si ha:

$$v(t) = \frac{e^m \sqrt[n]{(Ft)}}{\sqrt[n]{a}\,[1 - h(t)]} \tag{35}$$

e quindi la velocità istantanea dipende da $F(t)$ e da $\vartheta(t)$.

5_1 Occorre ora determinare la funzione $h(t)$. Essa può aversi dalla (30) nella quale conviene fare la sostituzione

$$\tau = 1 - h(t) \qquad -d\tau = h'(t)dt,$$

orre inoltre

$$\begin{aligned} &g(\tau) = \tau[m - \lg \tau], \qquad g(\tau_1) = \tau_1[m - \lg \tau_1] \qquad (\tau_1 = 1 - h(t_1)) \\ &g'(\tau) = m - 1 - \lg \tau, \qquad g''(\tau) = -\frac{1}{\tau} \end{aligned} \tag{36}$$

ottenendo

$$\int_{\tau} \frac{g(\eta)}{\sqrt{g^2(\eta) - g^2(\tau_1)}}\, d\eta = \frac{1}{K}\int_0^t \sqrt[n]{F(\xi)}d\xi\,. \tag{37}$$

È opportuno cominciare con la determinazione di τ_1 che si fa ponendo

$$A = \frac{1}{K}\int_0^{t_1} \sqrt[n]{F(\xi)}\, d\xi \tag{38}$$

e quindi si deve risolvere per iterazione la

$$\gamma(\tau_1) \equiv \int_{\tau_1}^{1} \frac{g(\eta)}{\sqrt{g^2(\eta) - g^2(\tau_1)}}\, d\eta - A = 0. \tag{39}$$

Siccome integrando per parti è

$$\int_{\tau_1}^{1} \frac{g(\eta)g'(\eta)}{\sqrt{g^2(\eta) - g^2(\tau_1)}} \frac{d\eta}{g'(\eta)} = \left[\sqrt{g^2(\eta) - g^2(\tau_1)}\,\frac{1}{g'(\eta)}\right]_{\tau_1}^{1} +$$

$$\int_{\tau_1}^{1} \sqrt{g^2(\eta) - g^2(\tau_1)}\,\frac{g''(\eta)}{g'^2(\eta)}\, d\eta,$$

la (39), tenuto conto della (36) si trasforma nella

$$(40) \qquad \gamma(\tau_1) \equiv \frac{1}{m-1}\sqrt{m^2 - g^2(\tau_1)} - \int_{\tau_1}^{1} \frac{\sqrt{g^2(\eta) - g^2(\tau_1)}}{\eta[m-1-\log\eta]^2}\,d\eta - A = 0,$$

dove $m - 1 - \lg\eta = \frac{b}{n}\rho_0 - 1 - \lg e^{-\frac{b}{n}(\rho-\rho_0)} = -1 + \frac{b}{n}\rho > 62$ (v. 4_3).
Per la esecuzione pratica dei calcoli numerici convengono i cambiamenti di variabile

$$(41) \qquad \eta = \frac{1}{2}[(1-\tau_1)u + 1 + \tau_1], \quad d\eta = \frac{1-\tau_1}{2}du;$$

$$\xi = \frac{t_1}{2}(1+v), \quad d\xi = \frac{t_1}{2}dv$$

coi quali in entrambi gli integrali di (38) e (39) l'intervallo di integrazione diviene $(-1, +1)$ per il quale si dispone di numerose formule di quadratura [6].

Per le (41) si ha così

$$A = \frac{1}{2K}\int_{-1}^{1} \sqrt[n]{F(\xi)}\; t_1 dv;$$

$$\gamma(\tau_1) \equiv \frac{1}{m-1}\sqrt{m^2 - g^2(\tau_1)} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{g^2(\eta) - g^2(\tau_1)}}{\eta[m-1-\lg\eta]^2}(1-\tau_1)du - A = 0.$$

Sostituendo nell'ultima gli integrali con formule di quadratura:

$$\gamma(\tau_1) = \tilde{\gamma}(\tau_1) + R_1(\tau_1) + R_2(t_1)$$

e, trascurando i resti, si possono eseguire le iterazioni

$$(42) \qquad \tau_1^{(\nu)} = \tau_1^{(\nu-1)} + \frac{1}{H}\tilde{\gamma}(\tau_1^{(\nu-1)}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

che si possono iniziare con un valore arbitrario di τ_1, per es. $\tau_1^{(0)} = 1$ e scegliendo il fattore $\frac{1}{H}$ $(H > 1)$ in modo che la successione delle iterate converga [7]. La convergenza delle iterazioni con $\tau_1^{(0)}$ arbitrario alla soluzione unica della (39) discende dalla monotonia di $\gamma(\tau_1)$. Siccome si usa in pratica la (42) converrà impiegare, per ottenere $\tilde{\gamma}(\tau_1)$, formule di quadratura a coefficienti peso tutti positivi. In tal modo anche $\tilde{\gamma}(\tau_1)$ è monotona perchè le funzioni integrande (*v.* (39)) sono positive e monotone.

5.$_2$ Una volta determinato il valore di τ_1 si possono calcolare numericamente le funzioni:

(43) $$L(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{g(\eta)}{\sqrt{g^2(\eta) - g^2(\tau_1)}}(1-\tau)du \qquad \eta = \frac{1}{2}[(1-\tau)u + (1+\tau)],$$

(44) $$N(t) = \frac{1}{2K}\int_{-1}^{1} \sqrt{F(\xi)}\, t dv \qquad \xi = \frac{t}{2}(1+v).$$

L'equazione

(45) $$L(\tau) = N(t)$$

equivale alla $\tau = 1 - h(t)$ e quindi la corrispondenza fra t e τ è numericamente determinata. La sua effettiva costruzione può farsi come segue:

- dalla (43), assegnati $\tau_{(1)}$, $\tau_{(2)}$, ..., si hanno $L(\tau_{(1)})$, $L(\tau_{(2)}$, ...,

- dalla (44), assegnati $t_{(1)}$, $t_{(2)}$, ..., (indipendentemente da $\tau_{(1)}$, $\tau_{(2)}$, ...) si hanno $N(t_{(1)})$, $N(t_{(2)})$, ...,

- considerata la tabella $\tau_{(i)}$, $L(\tau_{(i)})$, per la (45) si possono inserire i valori $N(t_{(j)})$ tra i valori $L(t_{(i)})$; risulta così conveniente l'impiego del metodo di interpolazione inversa di Neville [8] per determinare il valore di $\tau_{(j)}$ corrispondente di $t_{(j)}$.

Infine dalla (31) si ha $\vartheta(t)$ ed il programma della direzione della spinta è determinato.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Toraldo di Francia, *Sulla traiettoria ottima di un missile leggero soggetto a una resistenza quadratica, funzione esponenziale dell'altezza* (Boll. U.M.I., 1957, vol 12, n. 3).
[2] T. Levi Civita - U. Amaldi, *Nozioni di Balistica Esterna* (Zanichelli, Bologna, 1935).
[3] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale* (Zanichelli, Bologna, 1948).
[4] A. R. Forsyth, *Calculus of variations* (Cambridge University Press, 1927).
[5] E. Cavalli, *Balistica Esterna* (S.T.E.N., Torino, 1928).
[6] A. D. Booth, *Numerical methods* (Butterworths, London, 1955).
[7] R Zurmühl, *Praktische Mathematik* (Berlino, 1953).
[8] L. M. Milne - Thomson, *The calculus of finite differences* (Macmillan, London, 1951).