Bollettino
Unione Matematica Italiana

Nicola Ginatempo

Alcune congruenze di Bianchi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 355–359.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_355_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Alcune congruenze di Bianchi.

Nota di NICOLA GINATEMPO (a Messina)

Sunto. - *Si ripigliano alcune ricerche di* BIANCHI *e* TORTORICI *su alcune congruenze* W *di assegnata prima focale e si caratterizzano quelle che derivano da un movimento infinitesimo della medesima, inquadrando l'argomento nel problema degli elementi ortogonali.*

Summary. - *Author retakes some inquiries of* BIANCHI *and* TORTORICI *about some* W *congruences with fixed first focale surface and he characterises that derive from a infinitesimal intrinsic movement, framing the argument in the problem of perpendicular elements.*

1. Il BIANCHI nella sua memoria: « Ricerche sulla deformazione delle quadriche » ha caratterizzato le congruenze rettilinee W le cui focali siano quadriche proiettive [1].

Precisamente il detto autore definisce le congruenze in discorso in due modi diversi e cioè in un primo modo puramente algebrico ed in un secondo modo attraverso le deformazioni infinitesime delle superficie.

Nella caratterizzazione per via algebrica il BIANCHI dimostra che, per avere, nel modo più generale, una congruenza W del tipo richiesto basta partire da una quadrica Q, che si può dare ad arbitrio come prima focale, ed assumere, come seconda focale, la quadrica Q' che si ottiene trasformando Q nella proiettività prodotto della polarità relativa a Q per un sistema nullo arbitrario. Allora la cercata congruenza è quella che si ottiene congiungendo i punti corrispondenti in Q e Q'.

Da questa prima caratterizzazione delle richieste congruenze risulta intanto che ogni quadrica Q, data comunque a priori, è sempre prima focale di ∞^5 congruenze W la cui seconda focale è una quadrica Q' proiettiva a Q.

Nella seconda caratterizzazione delle stesse congruenze, il BIANCHI le costruisce in relazione alle deformazioni infinitesime della prima focale Q, data ad arbitrio, facendo vedere che per avere, nel modo più generale una congruenza del tipo richiesto, basta che la deformazione infinitesima suddetta sia un movimento rigido (infini-

(1) BIANCHI L, *Opere*, v. IV° parte I° p. 437-461.

tesimo). In altre parole, per avere una siffatta congruenza di prima focale Q, basta considerare un qualunque movimento (infinitesimo) rigido di Q perchè allora la cercata congruenza si ottiene conducendo per ogni punto P di Q quella tangente che è perpendicolare alla direzione secondo cui si sposta P nel detto movimento.

In sostanza questa è la costruzione di GUICHARD [2] delle congruenze W di data prima focale e il risultato di BIANCHI afferma, dopo tutto che per le congruenze W in discorso la deformazione infinitesima della prima focale Q è un movimento rigido.

2. Nella presente nota importa rilevare che i risultati di BIANCHI si estendono facilmente al caso in cui invece che partire da una quadrica Q, si parta da una qualunque superficie S anche non algebrica (purchè regolare) quando si abbia l'accortezza di sostituire le suddette congruenze W, aventi come focali due quadriche proiettive, con le congruenze (sempre W) che vengono generate da un movimento rigido infinitesimo della prima focale S, data comunque.

Più precisamente chiamando per semplicità *trasformazione polare* della superficie S in sè il passaggio dalla S considerata come luogo di punti alla stessa S considerata come inviluppo dei corrispondenti piani tangenti, si hanno i due seguenti teoremi:

TEOREMA I. – « Si consideri una superficie S ed un suo movimento rigido infinitesimo. La corrispondente congruenza W avente S come prima focale (congruenza legata al suddetto movimento) ha come seconda focale una superficie S' che si ottiene trasformando S nel prodotto della trasformazione polare della S in sè per un sistema nullo ».

E inversamente:

TEOREMA II. – « Data una superficie S e dedotta da essa una superficie S' coll' applicare alla S la corrispondenza prodotto della trasformazione polare della S in sè per un sistema nullo arbitrario, avviene che S ed S' sono sempre le due focali di una congruenza W e questa è legata ad un movimento rigido infinitesimo di S [3] ».

[2] BIANCHI L., *Lezioni di Geom. Diff.*, v. II° parte I° c. XIII.

[3] In particolare, se la S è algebrica, anche la seconda focale S' risulta algebrica e il suo ordine è uguale alla classe della S. Si hanno così classi di congruenze W a superficie focali algebriche. Cfr. TORTORICI P., *Sulle deformazioni infinitesime ecc.*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », tomo XXXV,

3. Dimostriamo il teorema I:

La data superficie S sia rappresentata dall' equazione esplicita

$$z = z(x, y)$$

(con le solite ipotesi) e assoggettiamola ad una deformazione infinitesima. È noto che il punto $P(x, y, z)$ di S si porta in un punto $\widehat{P}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$ dato dalle formule

$$\widehat{x} = x + \varsigma X$$
$$\widehat{y} = y + \varsigma Y$$
$$\widehat{z} = z + \varsigma Z$$

dove ς è una costante infinitesima, (del I° ordine, di cui si trascurano le potenze di ordine superiore al primo), ed X, Y, Z sono le componenti dello spostamento che subisce P. È notissimo che ne risulta una superficie, quella descritta dal punto $(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$, che corrisponde alla data per ortogonalità di elementi lineari [4], ossia tale da aversi identicamente:

$$dxdX + dydY + dzdZ = 0.$$

Se in particolare vogliamo che la deformazione infinitesima in discorso della S sia un movimento rigido, basta assumere come superficie descritta dal punto (X, Y, Z) quella data con le formule

$$X = \frac{y}{a} \qquad Y = \frac{-x}{a} \qquad Z = b \tag{1}$$

con a e b costanti ed $a \neq 0$ [5].

Ora i parametri direttori di una qualunque tangente alla S nel punto $P(x, y, z)$ sono del tipo

$$m, \qquad n, \qquad mp + nq \tag{2}$$

con m, n funzioni di x, y e

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

1913 p. 1-28 e TORTORICI P., *Sulle trasformazioni asintotiche ecc.*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », tomo XXXVIII (2° semestre 1914) p. 357-369.

(4) CALAPSO R., *Corso di Geom. Diff.*, parte IIª Ed. Univ. Messina 1948.

(5) BIANCHI L., *Lezioni di Geom. Diff.*, v. Iª parte II° c. X.

quindi la congruenza richiesta è generata dalla tangente a S avente i suddetti parametri direttori a patto che questa retta sia perpendicolare alla direzione di parametri direttori dati dalle (1), direzione secondo cui si sposta il punto P nel movimento rigido infinitesimo.

Si deve imporre cioè che sia

$$m\frac{y}{a}+n\frac{-x}{a}+(mp+nq)b=0$$

ossia

$$m(y+abp)-n(x-abq)=0. \tag{3}$$

Pertanto la nostra congruenza W è descritta dalla retta che passa per il punto $P(x, y, z)$ della S ed ha come parametri direttori le (2) in cui m e n sono legati dalla (3).

Determiniamo la seconda focale della congruenza in discorso. Un punto qualunque del raggio della congruenza ha coordinate del tipo

$$x-h(x-abq), \qquad y-h(y+abp), \qquad z-h(px+qy)$$

bisogna ora esprimere che il raggio della congruenza è tangente alla superficie S' luogo del punto $(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$. Si trova così $h=1$ e la seconda focale è rappresentata da:

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= abq \\ \widehat{y} &= -abp \\ \widehat{z} &= z-px-qy. \end{aligned} \tag{4}$$

Introducendo ora le coordinate omogenee u_1, u_2, u_3, u_4, del piano tangente, si ha

$$-p=\frac{u_1}{u_3}, \qquad -q=\frac{u_2}{u_3}, \qquad z-px-qy=-\frac{u_4}{u_3} \tag{5}$$

e introducendo per la focale S' le coordinate puntuali omogenee

$$\widehat{x}=\frac{\widehat{x}_1}{\widehat{x}_4}, \qquad \widehat{y}=\frac{\widehat{x}_2}{\widehat{x}_4}, \qquad \widehat{z}=\frac{\widehat{x}_3}{\widehat{x}_4}$$

per le (5), le (4) divengono

$$\begin{aligned} \widehat{x}_1 &= -ab\,u_2 \\ \widehat{x}_2 &= +ab\,u_1 \\ \widehat{x}_3 &= -u_4 \\ \widehat{x}_4 &= u_3 \end{aligned} \tag{6}$$

e queste sono le formule di un sistema nullo, c. v. d.

4. Dimostriamo ora il teorema inverso o teorema II°.

Siano S ed S' due superficie e, per ipotesi, sia S' deducibile da S componendo la trasformazione polare di S in sè con uno qualunque degli ∞^5 sistemi nulli dello spazio ordinario.

Per opportuna scelta degli assi di riferimento il sistema nullo arbitrario si può pensare assegnato sotto forma canonica, per il che il passaggio dalla S alla S' si ottiene con le formule (4). Se, seguendo MONGE, poniamo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

per derivazione parziale si deduce

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{x}}{\partial x} &= abs & \qquad \frac{\partial \widehat{x}}{\partial y} &= abt \\ \frac{\partial \widehat{y}}{\partial x} &= -abr & \qquad \frac{\partial \widehat{y}}{\partial y} &= -abs \\ \frac{\partial \widehat{z}}{\partial x} &= -rx - sy & \qquad \frac{\partial \widehat{z}}{\partial y} &= -sx - ty \end{aligned}$$

e quindi i parametri direttori della normale alla S' sono

$$y, \qquad -x, \qquad ab$$

Allora le relazioni identiche

$$\begin{aligned} y(x - abq) - x(y + abp) + ab(px + qy) &= 0 \\ p(x - abq) + q(y + abp) - (px + qy) \quad &= 0 \end{aligned}$$

mostrano che S ed S' sono focali di una congruenza, la quale risulta una congruenza W: immaginando, infatti, espresse le coordinate omogenee del punto di S in funzione dei parametri u, v di un sistema coniugato le coordinate tangenti u_1, u_2, u_3, u_4 soddisfano ad una stessa equazione di LAPLACE; ma allora, come è ovvio, lo stesso sarà per le coordinate omogenee puntuali del generico punto di S' e perciò sulle superficie S ed S' si corrispondono i sistemi coniugati e quindi le asintotiche, c. v. d..