Bollettino
Unione Matematica Italiana

Antonio Pignedoli

Sul moto centrale di un punto-massa veloce. Nota I.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 341–350.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_341_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Sul moto centrale di un punto-massa veloce.

Nota I^{a} di ANTONIO PIGNEDOLI (a Bologna)

Sunto. - *In questa prima Nota ci si occupa di problemi classici relativi al movimento centrale di una particella veloce assimilabile ad un punto materiale. In particolare, si prendono in esame il caso di una particella elasticamente legata ed un caso « non-lineare relativistico », che può preludere ad ulteriori sviluppi.*

Summary. - *In this first paper the author deals with some classical problems of motion of a particle of relativistic energy in a central field of force. Particularly, one considers the case of an elastically relied particle and a « non-linear relativistic » case, that may lead to further developments.*

1. L'uso concreto delle equazioni differenziali dinamiche della Teoria della relatività ristretta per lo studio dei movimenti di particelle veloci comporta grandi difficoltà analitiche. È comunque certo che da esso non si può talvolta prescindere e possiamo anche dire che se ne ottengono risultati che incoraggiano a proseguire in ricerche sistematiche sull'argomento. Esse sono particolarmente dotate di interesse quando si riferiscono ai moti di elettroni o, più in generale, di particelle elettrizzate veloci [1] e spero di potere riferire, in una prossima nota, su alcuni nuovi risultati ottenuti.

In questo lavoro mi occupo del moto centrale di un punto-massa veloce in Dinamica relativistica ristretta. Riprendo, per questo, in considerazione l'equazione differenziale vettoriale indefinita della Dinamica del punto materiale di alta energia, equazione la quale, con notazioni ordinarie, si scrive notoriamente (e presenta carattere invariantivo di fronte alle trasformazioni di LORENTZ):

$$(I) \qquad \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad m = m_0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

essendo m_0 la massa « di quiete », c la velocità della luce nel vuoto ed $\vec{F}$ il vettore forza sollecitante.

(1) Per una esposizione riassuntiva di alcuni risultati già conseguiti, vedasi: A. PIGNEDOLI, *Über die Bewegung von relativistichen Elektronen in elektrischen und magnetischen Feldern*, « Zeit. für angew. Mathem. und Mechanik », 1958 (in corso di stampa).

Nel caso di un punto-massa veloce P sollecitato da una forza centrale la (I) diventa:

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dP}{dt}\right) = \frac{dU(r)}{dr}\frac{(P-O)}{r}, \; [r = \mathrm{mod}\,(P-O)],$$

dove O è il centro di forza ed $U(r)$ il potenziale da cui la forza centrale in questione dipende. La traiettoria è piana. Scegliendo le coordinate polari r e θ, di polo O nel piano della medesima, sussiste l'integrale relativistico « delle aree » o del momento della quantità di moto $mr^2\dot{\theta} = A$, cioè:

$$(2) \qquad m_0 r^2 \dot{\theta}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = A, \; \left(\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \; \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\right).$$

dove A è la « costante delle aree ». Sussiste anche l'integrale relativistico dell'energia $mc^2 = U - K$, che si può scrivere:

$$(3) \qquad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = c^2[1 - m_0{}^2c^4\,\{U(r) - K\}^{-2}],$$

dove K è una costante. Eliminando la massa maupertuisiana m fra l'integrale delle aree e quello soprascritto dell'energia, si ottiene la:

$$(4) \qquad r^2\dot{\theta} = Ac^2[U(r) - K]^{-1}.$$

Infine, eliminando il tempo dalla (3) per mezzo della (4), si ricava l'equazione differenziale della traiettoria:

$$(5) \qquad \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{A^2c^2}\,[(U(r) - K)^2 - m_0{}^2c^4].$$

Di tale questione io mi sono già occupato in una nota precedente (2), ma, per quanto riguarda il potenziale newtoniano, riprendo ora la impostazione del problema nell'intento di fornire una approssimazione semplice ed utile del problema relativistico dei due corpi celesti, atta alla deduzione di uno spostamento perielico paragonabile con quello che si trova nella Teoria della relatività generale, e che ad un sesto del medesimo si riduce per velocità convenienti.

(2) Cfr. A. PIGNEDOLI, « Atti e Memorie della Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena », 1950-51.

2. Siano m_0 ed M_0 le masse « a riposo » rispettivamente di un pianeta (puntiforme) P e del sole (puntiforme) O e sia r la loro distanza all'istante t. Assumiamo come forza inter-agente fra i due corpi celesti quella di NEWTON, essendo f la costante di CAVENDISCH ($f = 6{,}66.10^{-8}$ u. C. G. S.).

Potremo senz'altro assumere come equazione differenziale vettoriale indefinita relativistica del moto del pianeta rispetto al sole la seguente:

$$
\frac{d}{dt}\left[m\frac{d(P-O)}{dt}\right] = -fm_0\frac{M_0+m_0}{r^3}(P-O) \quad (7)
$$

(3),

$$
(m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}),
$$

la quale si riduce all'equazione classica

$$
\frac{d^2P}{dt^2} = -f\frac{m_0+M_0}{r^3}(P-O)
$$

per $\beta = \frac{v}{c} \to 0$. Posto $\mu_0 = fm_0(m_0+M_0)$, e, quindi $U = \frac{\mu_0}{r}$, l'equazione (5) della traiettoria diventerà:

$$
\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{A^2c^2}\left[\left(\frac{\mu_0}{r} - K\right)^2 - m_0^2c^4\right] \quad (5')
$$

e fornirà:

$$
\frac{1}{r} = \frac{1}{p}[1 + e\cos\lambda(\theta-\theta_0)], \quad (8)
$$

dove:

$$
p = \frac{\mu_0^2 - A^2c^2}{K\mu_0}, \quad \lambda = \sqrt{1 - \frac{\mu_0^2}{A^2c^2}}, \quad e^2 = \frac{A^2c^2}{\mu_0^2}\left(1 - \frac{m_0^2c^4\lambda^2}{K^2}\right) = \quad (9)
$$

$$
= 1 + \frac{A^2c^2\lambda^2}{\mu_0^2}\lambda^2\left(1 - \frac{m_0^2c^4}{K^2}\right).
$$

(3) La (7) si può pensare come equazione differenziale relativistica del moto di una « massa maupertuisiana ridotta »

$$
\mu = m_0M_0/(m_0+M_0)\sqrt{1 - v^2/c^2}
$$

sollecitata dalla forza newtoniana

$$
-f\frac{m_0M_0}{r^3}(P-O).
$$

Affinchè e sia reale, deve essere $\frac{m_0^2 c^4 \lambda^2}{K^2} \leq 1$, cioè $\lambda^2 \leq \frac{K^2}{m_0^2 c^4}$.
Nel caso in cui sia $\lambda^2 = \frac{K^2}{m_0^2 c^4}$, la eccentricità è nulla e la traiettoria è una circonferenza. Risulta poi $e \gtrless 1$ a seconda che si ha $\frac{m_0^2 c^4}{K^2} \lessgtr 1$.

Nel caso di $e < 1$, cioè nel caso in cui è $K^2 < m_0^2 c^4$, l'orbita si avvicina tanto più ad un'orbita ellittica quanto più piccolo è il rapporto $\mu_0^2/A^2 c^2$. In generale, nel caso di $e < 1$, la traiettoria è compresa fra le due circonferenze di raggi $r_1 = p/(1+e)$ ed $r_2 = p/(1-e)$ ed è una tipica curva « a rosetta ». La (8) mostra che lo spostamento *positivo* del perielio in una rivoluzione orbitale vale, in radianti:

$$\sigma = 2\pi[1/\lambda - 1] \backsim \frac{\pi\mu_0}{A^2 c^2}. \tag{10}$$

Per quanto riguarda l'equazione del tempo, posto

$$a = -\mu_0 K/(m_0^2 c^4 - K^2),$$

si ottiene:

$$dt = \frac{\left(r - \frac{\mu_0}{K}\right) dr}{c\sqrt{\frac{\mu_0^2 c^4}{K^2} - 1}\,\sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}}, \tag{11}$$

da cui, ponendo ancora $a - r = ae \cos u$, si ha, integrando

$$t - t_0 = \frac{a - \frac{\mu_0}{K}}{c\sqrt{\frac{\mu_0^2 c^4}{K^2} - 1}} \left[u - \frac{ae}{a - \frac{\mu_0}{K}} \operatorname{sen} u \right] \tag{12}$$

e, ponendo, infine:

$$\frac{c\sqrt{\frac{\mu_0^2 c^4}{K^2} - 1}}{a - \frac{\mu_0}{K}} = n\,; \quad \frac{ae}{a - \frac{\mu_0}{K}} = E, \tag{13}$$

si ottiene una equazione che corrisponde a quella classica di

KEPLERO, relativa al moto ellittico di un pianeta intorno al sole. Tale equazione è la seguente:

$$n(t-t_0)=u-E \operatorname{sen} u, \tag{14}$$

dove la u ha un significato analogo a quello di « anomalia eccentrica ». La (14) definisce la « anomalia media » $l=n(t-t_0)$ per mezzo della u e dà la legge temporale del moto sulla traiettoria ($n =$ « moto medio »). Il movimento è periodico di periodo $T=\dfrac{2\pi}{n}$.

3. Naturalmente, una impostazione più vicina alla realtà fisica è quella che si attua nella Teoria della relatività generale. In tale impostazione, come ben noto. la traiettoria di un pianeta attorno al sole è fornita da una geodetica dello spazio-tempo incurvato dal sole stesso. In prima approssimazione il moto risulta kepleriano; in seconda approssimazione, si trova, per la traiettoria planetaria, un'equazione del tipo:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos n\theta \tag{15}$$

dove p, ed n sono delle costanti e dove, si ha, in particolare:

$$n^2=1-\frac{6f^2M_0^2}{c^2C^2},\quad n\backsim 1-\frac{3f^2M_0^2}{c^2C^2},\quad \frac{1}{n}\backsim 1+\frac{3f^2M_0^2}{c^2C^2} \tag{16}$$

dove M_0 è la massa del sole e C la velocità areolare (costante). Per $e<1$, $n=1$, la traiettoria planetaria sarebbe un ellisse, ma, essendo $n<1$, si ha una traiettoria « a rosetta » con uno spostamento del perielio, in un giro, dato da

$$\sigma_1=2\pi\left(\frac{1}{n}-1\right)\backsim\frac{6\pi f^2M_0^2}{c^2C^2}. \tag{17}$$

La soluzione di seconda approssimazione in questione è sufficiente a soddisfare alle necessità sperimentali. Giova, tuttavia, tenere presente che una soluzione rigorosa è anche quella ottenuta da SCHWARZSCHILD [4] nell'ipotesi che lo spazio geometrico tridimensionale si incurvi simmetricamente attorno al sole. La teoria

[4] Cfr. K. SCHWARZSCHILD, *Ueber das Grevitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitber. Preuss. Akad. Wiss, 1916, p. 189. Vedi anche: J. CHAZY, *La théorie de la relativite et la Mecanique céleste,* t. I, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

Per quanto riguarda lo spostamento perielico, vedasi anche: G M. CLEMENCE, « Proc. Amer. Phil. Soc. », 93, 532, 1949.

di SCHWARZSCHILD conduce ad uno spostamento del perielio dato dalla formula seguente:

$$(18) \qquad \sigma_2 = \frac{6\pi f M_0}{a(1-e^2)c^2}.$$

In tale formula a va pensato come la media aritmetica dei valori estremi della distanza r durante il movimento ed e come « l'eccentricità osculatrice » ad un istante qualunque. Se assumiamo, come nel caso delle traiettorie classiche ellittiche (il che appare lecito)

$$p = \frac{C^2}{fM_0} = a(1-e^2),$$

la (18) diventa:

$$(18') \qquad \sigma_2 = \frac{6\pi f^2 M_0^2}{c^2 C^2} = \sigma_1 .$$

La (18) fornisce, come si sa, per una rivoluzione del pianeta Mercurio ($a = 5{,}8.10^{12}$ cm; $e = 0{,}2$) uno spostamento perielico dato in secondi da

$$\sigma_2 = \frac{6\pi f M_0}{ac^2(1-e^2)} \cdot \frac{6^4 \cdot 10^3}{2\pi} = \backsim 0{,}1 ,$$

e, siccome il pianeta compie in un secolo circa 420 rivoluzioni, fornisce uno spostamento secolare di 42″ circa, spostamento che si sovrappone a quello dovuto alle perturbazioni planetarie (532″).

Ora è certo interessante vedere cosa succeda per un satellite artificiale in traiettoria intorno alla terra. Supponiamo per esso $a = 650$ Km e la stessa eccentricità $e = 0{,}2$ che si ha per il pianeta Mercurio. Assumendo come massa della terra (pensata come fissa) $M_0^* = 5{,}969.10^{27}$ gr., si trova uno spostamento del perielio di $\backsim 305.10^{-5}$ secondi per ogni rivoluzione, il che significa che, nello stesso numero di rivoluzioni compiute da Mercurio in un secolo (420), si avrà uno spostamento perielico di 1,28 secondi. Per $a = 500$ Km, coeteris paribus, verrebbe, in 420 rivoluzioni, uno spostamento di 1,49 secondi. Si tratta di ordini di grandezza fortemente superati dalle altre cause di perturbazione, come, del resto, trova anche F. WINTERBERG [5], il quale fa vedere che anche la sola precessione dovuta all'appiattimento della terra è

[5] F. WINTERBERG, « Nuovo Cimento », VIII, serie decima, n. 1, 1° aprile 1958, e lavori ivi citati.

assai maggiore della precessione relativistica del perielio e rende la prima difficilmente osservabile. Vogliamo, prima di passare ad altro, scrivere il rapporto fra lo spostamento perielico dedotto nella nostra approssimazione e quello che si ottiene in Teoria della relatività generale. Si ha:

$$\sigma = \pi \frac{\mu_0^2}{A^2c^2} = \frac{\pi f^2 m_0^2 (M_0^2 + m_0^2)\left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{c^2}\right)}{m_0^2 c^2 r^4 \dot{\theta}^2},$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{\sigma}{\sigma_2} = \frac{m_0^2 C^2 (1 + m_0/M_0)^2}{6A^2}. \tag{19}$$

Per velocità sufficientemente basse, si può assumere

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{\sigma}{\sigma_2} \backsim \frac{1}{6} \text{ [6]}. \tag{19'}$$

[6] È noto come si possa, per altra via, trattare la questione: l'orbita relativistica di una particella in un campo centrale di potenziale U è la stessa che si avrebbe in meccanica newtoniana dipendentemente dal potenziale

$$U' = -\frac{(E-U)^2}{2m_0c^2}.$$

In maniera analoga si può studiare il movimento in un campo mesonico « scalare » il cui potenziale Φ è notoriamente la soluzione stazionaria a simmetria sferica

$$\Phi = \Lambda \frac{e^{-\overline{m}cr/\overline{h}}}{r}$$

(Λ = costante, $\overline{m}$ = massa del mesone π, $\overline{h} = h/2\pi$, con h costante universale di Planck) dell'equazione differenziale relativisticamente invariante di Klein e Gordon, interessante la teoria delle forze nucleari:

$$\Delta_2\Phi - \frac{\overline{m}^2c^2}{\overline{h}^2}\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Il movimento in questione si riduce a quello che si avrebbe in meccanica newtoniana sotto l'azione di un potenziale:

$$\Phi' = \Lambda\left(\frac{m_0^*c^2}{E}\right)^2\left(\frac{e^{-\frac{\overline{m}cr}{\overline{h}}}}{r} + \frac{\Lambda}{2m_0^*c^2}\,\frac{e^{-\frac{2\overline{m}cr}{\overline{h}}}}{r^2}\right),$$

dove m_0^* è una nuova costante (massa). Per questo, in relazione al problema dello «scattering» nucleone-nucleone, vedasi G. Marx e G. Szamosi, « Bull. de l'Acad. Pol. des Sciences », (3) 2, 475, 1954.

4. Un caso particolare, che può rivestire notevole interesse, della questione dei moti centrali relativistici, è senza dubbio quello del moto dell'elettrone elasticamente legato. L'equazione differenziale vettoriale del movimento in questione è la seguente:

$$\frac{d}{dt}\left[m\frac{d(P-O)}{dt}\right]+\omega^2(P-O)=0,\quad m=m_0(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}},\tag{20}$$

dove ω è la costante di frequenza.

Con riferimento ad un sistema di coordinate polari r e θ. di polo O nel piano del moto, la forza, che è diretta secondo il raggio vettore, risulta uguale a $-\omega^2 r$ ed il potenziale da cui essa deriva è $U(r)=-\frac{1}{2}\omega^2 r^2$. Dunque l'integrale relativistico delle forze vive risulta:

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=c^2\left[1-\frac{m_0{}^2c^4}{\left(\frac{1}{2}\omega^2r^2+K\right)^2}\right].\tag{21}$$

Eliminando, al solito, la massa maupertuisiana per mezzo dell'integrale delle aree $mr^2\dot{\theta}=A$ (costante), si ottiene l'equazione:

$$r^2\dot{\theta}=-\frac{Ac^2}{\frac{1}{2}\omega^2r^2+K};\tag{22}$$

indi, eliminando il tempo dalla (16) per mezzo della (17), si ottiene l'equazione differenziale della traiettoria:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}=\frac{1}{A^2c^2}\left[\left(\frac{1}{r}\omega^2r^2+K\right)^2-m_0{}^2c^4\right].\tag{23}$$

Quest'ultima potrà essere scritta anche come segue:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\Phi(r),\tag{24}$$

dove $\Phi(r)=\frac{r^4}{A^2c^2}\left[\left(\frac{1}{2}\omega^2r^2+K\right)^2-m_0{}^2c^4\right]-r^2$, e consentirà la discussione dei moti, in particolare oscillatori, coi soliti metodi [7].

[7] Per quanto riguarda il caso particolare dell'« oscillatore armonico », vedasi anche R. H. Penfield e H. Zatzkis, « Journ. Franklin Inst. », 262, 121, 1956.

5. E veniamo, infine, ad un altro caso particolare che sembra non privo di interesse. Nella ordinaria Meccanica non-lineare, si studiano, come ben noto, i movimenti rappresentati dall'equazione differenziale:

$$m_0\ddot{x}(t) + ax(t) + bx^3(t) = 0, \tag{25}$$

dove $a > 0$ e $b > 0$ sono assegnate costanti. Il corrispondente caso relativistico conduce allo studio della equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}}\right] = -ax - bx^3. \tag{26}$$

Essa può scriversi:

$$m_0\dot{x}d\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}}\right) = -(ax + bx^3)dx,$$

e, ponendo:

$$\frac{x}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} = cu, \qquad \dot{x} = \frac{cu}{\sqrt{1 + u^2}},$$

essa diventa:

$$m_0c^2\frac{udu}{\sqrt{1 + u^2}} = -(ax + bx^3)dx.$$

Integrando e sostituendo, si ottiene l'integrale relativistico delle forze vive:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} = mc^2 = -\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{4}bx^4 - K, \quad (K \text{ costante}). \tag{27}$$

Da tale integrale primo, si ricava:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm c\sqrt{1 - \frac{{m_0}^2c^4}{\left(K + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4\right)^2}}, \tag{28}$$

da cui, separando le variabili ed integrando:

$$c(t - t_0)\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\pm\sqrt{1 - \frac{{m_0}^2c^4}{\left(K + \frac{1}{4}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4\right)^2}}} = \tag{29}$$

$$= \int_{x_0}^{x}\frac{K + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4}{\pm\sqrt{\left(K + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4 - m_0c^2\right)\left(K + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4 + m_0c^2\right)}}dx.$$

La discussione dei moti si farà coi soliti metodi ed il periodo del moto oscillatorio sarà fornito da un integrale iperellittico (nel caso particolarissimo in cui sia $b = 0$, tale periodo sarà fornito da un integrale ellittico).

Giova, naturalmente, osservare che, per $\dot{x} << c$, si rientra nel caso non-lineare classico, per cui l'equazione differenziale del movimento (25) fornisce:

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -(\alpha x + \beta x^3), \qquad \left(\alpha = \frac{a}{m_0}, \ \beta = \frac{b}{m_0}\right) \tag{30}$$

da cui, se, per semplicità, si assume, per $t = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ si ricava:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\alpha(x_0^2 - x^2)\left[1 + \frac{\beta}{2\alpha}(x_0^2 + x^2)\right]},$$

e, per il tempo t, l'integrale ellittico:

$$t = \pm \alpha^{-\frac{1}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - x^2)\left[1 + \frac{\beta}{2\alpha}(x_0^2 + x^2)\right]}}. \tag{31}$$

Ponendo, al solito, $x = x_0 \cos\varphi$, se $\lambda^2 = \dfrac{\beta x_0^2}{2(\alpha + \beta x_0^2)}$ otterremo (λ^2 deve essere < 1):

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta x_0^2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta x_0^2}} \cdot F(\lambda, \varphi), \tag{32}$$

dove $F(\lambda, \varphi)$ è un integrale ellittico incompleto di prima specie di modulo λ.

[Introducendo le funzioni di Jacobi, si ha

$$\operatorname{sen}\varphi = sn\sqrt{\alpha + \beta x_0^2} \cdot t)]. \tag{33}$$

In lavori successivi, mi propongo di occuparmi di questioni analoghe, più generali, che si potranno chiamare di « Meccanica non-lineare relativistica », delle quali, certo, non mi nascondo la grande difficoltà.

Il presente lavoro sarà, invece, completato da una seconda Nota.