

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

CATALDO AGOSTINELLI

**Ulteriori considerazioni sul movimento di  
un ghiacciaio e sulla determinazione del  
profilo di una sua sezione retta.**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 13*  
(1958), n.3, p. 327-334.

Zanichelli

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1958\\_3\\_13\\_3\\_327\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_327_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Ulteriori considerazioni sul movimento di un ghiacciaio e sulla determinazione del profilo di una sua sezione retta.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino)

**Sunto.** - *Con riferimento ai risultati della nota precedente si stabilisce l'equazione differenziale del profilo della sezione retta di un canale glaciale in base alla legge di distribuzione della velocità del ghiaccio sulla superficie libera. Si esamina dettagliatamente il caso in cui questa legge di distribuzione è parabolica.*

**Summary.** - *We establish the equation differential of the profile in the right section of the glacier, with the law of the velocity distribution on free surface. We examine in detail the case in which this law is parabolical.*

1. Riferendomi ai risultati della nota pubblicata nel numero precedente di questo Bollettino (<sup>1</sup>), dimostro ora come, misurando secondo l'idea di SOMIGLIANA le velocità del ghiaccio sulla superficie libera, e supponendo che esse varino con continuità secondo una legge assegnabile in base ai dati di osservazione, si possa determinare l'equazione differenziale del profilo della sezione retta di un ghiacciaio. L'integrazione di questa equazione, che d'altronde può essere effettuata numericamente, o graficamente, non solo permette di ottenere la forma del profilo, ma consente di ricavare inoltre i valori del coefficiente di attrito tra ghiaccio e parete del canale alle diverse profondità.

Nel caso particolare in cui le velocità sulla superficie libera variano con legge parabolica, la detta equazione differenziale si integra in termini finiti e il profilo della sezione retta del ghiacciaio risulta un arco di parabola, anzichè una semiellisse, come nello stesso caso aveva ottenuto il SOMIGLIANA partendo dall'ipotesi che lungo il contorno del canale la velocità del ghiaccio fosse nulla (o costante). Qui ottengo invece che le *isotachie* sono bensì delle ellissi (omotetiche), ma la velocità lungo la parete del canale va crescendo con la profondità.

Considero infine brevemente i casi in cui il diagramma delle velocità superficiali è rappresentato da una curva di 3° ordine, o da una curva di 4° ordine.

(<sup>1</sup>) C. AGOSTINELLI, *Su un nuovo procedimento atto a determinare il profilo della sezione retta di un ghiacciaio.* « Bollettino della U. M. I. » Serie I I A. XIII, N. 2, vol. 13 1958.

2. Ricordiamo che la velocità  $v$  del ghiaccio nel senso dell'asse del canale, col riferimento indicato nella figura deve verificare, in ogni punto interno alla sezione retta, l'equazione

$$(1) \quad \Delta_2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu},$$

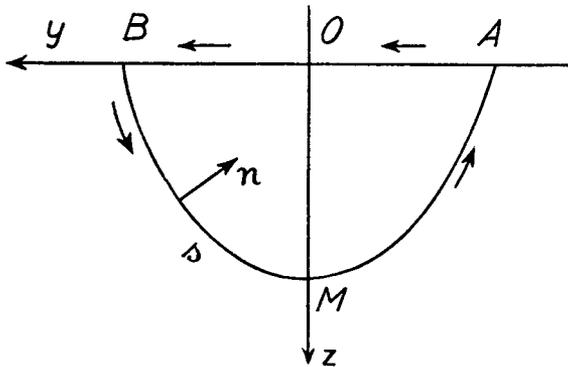
dove i simboli hanno lo stesso significato della nota precedente.

In superficie, cioè per  $z = 0$ , deve essere

$$(2) \quad \frac{dv}{dn} \equiv \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \text{ per } z = 0,$$

e sul contorno  $BsA$  del canale

$$(3) \quad \frac{dv}{dn} = \frac{v(z)}{\mu} p, \text{ con } p = p_0 + \rho g \cos \alpha \cdot z.$$



Avendo posto

$$(4) \quad v = U - \frac{1}{2} \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu} z^2,$$

si ha che  $U$  è una funzione armonica,

$$(5) \quad \Delta_2 U = 0,$$

soddisfacente al contorno alle condizioni

$$(6) \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \text{ per } z = 0,$$

$$(6)' \quad \frac{dU}{dn} = \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu} z \frac{dz}{dn} + \frac{v(z)}{\mu} p, \text{ sopra } BsA.$$

Ora, essendo  $n$  la normale al contorno  $BsA$ , diretta verso l'interno

dell'area, risulta

$$\frac{dz}{dn} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dy}{dn} = -\frac{dz}{ds},$$

e la condizione (6') diventa

$$(7) \quad \left( -\frac{\partial U}{\partial y} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \frac{dy}{ds} = \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu} z \frac{dy}{ds} + \frac{\nu(z)}{\mu} p.$$

Ricordando che per il profilo del canale si aveva l'equazione differenziale

$$(8) \quad \frac{\nu(z)p(z)}{\sqrt{1+z'^2}} = C \text{ (costante)}, \quad \left( z' = \frac{dz}{dy} \right)$$

se si pone ancora

$$(9) \quad z_0 = \frac{p_0}{\rho g \cos \alpha}, \quad C = C_0 \rho g \cos \alpha$$

e si osserva inoltre che sull'arco  $BsA$  è

$$\frac{ds}{dy} = -\sqrt{1+z'^2},$$

la condizione (7) porge

$$(10) \quad -\frac{\partial U}{\partial y} z' + \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha [C_0(1+z'^2) - \tan \alpha \cdot z] = 0.$$

Allora, se si riesce a determinare per altra via la funzione  $U$ , la (10) costituisce l'equazione differenziale del profilo del canale glaciale.

Dopo la sua integrazione la (8), tenendo conto delle (9), dà

$$(11) \quad \nu = \frac{C_0 \sqrt{1+z'^2}}{z+z_0},$$

che fornisce il valore del coefficiente di attrito  $\nu$  in funzione di  $z$ .

È opportuno osservare che se  $V$  è la funzione armonica coniugata della  $U$ , legata ad essa dalle condizioni di monogenità

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

l'equazione (1) si può scrivere

$$(10') \quad -\left( \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} z' \right) + \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha [C_0(1+z'^2) - \tan \alpha \cdot z] = 0.$$

Osserviamo ancora che dalla condizione  $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ , per  $z=0$ , segue che  $U$  sarà una funzione pari di  $z$ , e quindi la  $V$  sarà una funzione dispari di  $z$ .

Concludendo, tutte le volte che la funzione  $U$ , e quindi la  $V$ , si sappia costruire in base ai dati superficiali, mediante l'integrazione della precedente equazione differenziale si ha l'equazione del profilo  $z = z(y)$ .

Ora, se  $\bar{v} = \varphi(y)$  è l'equazione che dà la legge di variazione della velocità sul segmento  $AB$  dell'asse della  $y$ , compreso fra i bordi del canale, cioè per  $z = 0$ , equazione dedotta dai dati di osservazione, ricordando la forma dell'integrale generale dall'equazione di LAPLACE, si può porre, come osservò il SOMIGLIANA,

$$(12) \quad U(y, z) = \frac{1}{2} [\varphi(y + iz) + \varphi(y - iz)], \quad (i = \sqrt{-1}),$$

od anche

$$(13) \quad V = \frac{1}{2i} [\varphi(y + iz) - \varphi(y - iz)].$$

L'equazione differenziale del profilo risulta allora

$$(14) \quad -\frac{1}{2i} [\varphi'(y + iz) - \varphi'(y - iz)] - \frac{1}{2} [\varphi'(y + iz) + \varphi'(y - iz)] z' + \\ + \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha [C_0(1 + z'^2) - \tan \alpha \cdot z] = 0.$$

3. Supponiamo che la  $\varphi(y)$  sia di secondo grado in  $y$ , che cioè la velocità in superficie vari con legge parabolica secondo la formula

$$(15) \quad \bar{v} = \varphi(y) = v_0 + (v_1 - v_0) \left(1 - \frac{y^2}{L^2}\right),$$

dove  $L$  è la semilarghezza del canale in corrispondenza dell'asse  $y$ ,  $v_0$  la velocità nei punti estremi  $y = \pm L$ , e  $v_1$  la velocità nel centro ( $y = 0$ ). Dalle (12) e (13) si ha quindi

$$(16) \quad U = v_1 - (v_1 - v_0) \frac{y^2 - z^2}{L^2}, \quad (16') \quad V = -\frac{2(v_1 - v_0)}{L^2} yz,$$

e l'equazione (10) diventa in questo caso

$$(17) \quad \frac{2(v_1 - v_0)}{L^2} (z + yz') + \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha [C_0(1 + z'^2) - \tan \alpha \cdot z] = 0.$$

Ponendo per semplicità

$$(18) \quad \tan \beta = \frac{2\mu(v_1 - v_0)}{\rho g L^2 \cos \alpha}, \quad k_0 = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\rho g L^2 \sin \alpha}{2\mu(v_1 - v_0)}$$

e inoltre

$$(19) \quad z_1 = \frac{C_0}{\tan \alpha - \tan \beta},$$

si può scrivere

$$(20) \quad z'^2 + 1 = \frac{1}{z_1} \left( z - \frac{yz'}{k_0 - 1} \right),$$

la quale ammette l'integrale

$$(21) \quad z = z_1 \left[ 1 - \frac{3 - k_0}{4(k_0 - 1)z_1^2} y^2 \right].$$

Il profilo è dunque un arco di parabola avente per asse l'asse  $z$ . La profondità massima risulta uguale a  $z_1$ , e poichè per  $y = \pm L$  deve essere  $z = 0$ , si ricava

$$(22) \quad z_1 = \frac{1}{2} L \sqrt{\frac{3 - k_0}{k_0 - 1}},$$

e quindi

$$(22') \quad C_0 = z_1 \tan \alpha \cdot \frac{k_0 - 1}{k_0}.$$

L'equazione (21) si può scrivere allora

$$(21') \quad z = z_1 \left( 1 - \frac{y^2}{L^2} \right).$$

La (22) richiede che sia

$$(23) \quad 1 < k_0 < 3;$$

si conclude allora che se la costante  $k_0$  è compresa fra 1 e 3, nelle ipotesi ammesse il profilo della sezione retta del canale risulta parabolico.

Se per esempio assumiamo la densità del ghiaccio uguale a  $0,9 \text{ kg/dm}^3$ ,  $g = 980 \text{ cm/sec}^2$ , il coefficiente di viscosità  $\mu$  uguale al valore medio generalmente ammesso di  $1,35 \cdot 10^{13}$ , e ammettiamo che sia  $v_1 - v_0 = 10 \text{ cm/giorno}$ ,  $\tan \alpha = 0,028$ , si ha che la (23) è verificata se la semilarghezza  $L$  è compresa fra 112 m. e 194 m. Per  $v_1 - v_0 = 15 \text{ cm/giorno}$  essa è verificata per  $L$  compresa fra 168 m. e 291 m.

Nel caso in esame, in virtù della (4) e della (16), la velocità in un punto generico ( $yz$ ) è data da

$$v = v_1 - (v_1 - v_0) \frac{y^2 - z^2}{L^2} - \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} z^2,$$

cioè, per la seconda delle (18),

$$(24) \quad v = v_1 - (v_1 - v_0) \left( \frac{y^2 - z^2}{L^2} + k_0 \frac{z^2}{L^2} \right).$$

Essa ha il valore massimo  $v_1$  nell'origine.

Dalla (24) si ha che l'equazione delle *isotachie*, delle linee cioè lungo le quali la velocità ha un valore costante  $c$ , ( $0 < c < v_1$ ), risulta

$$(25) \quad \frac{v_1 - v_0}{L^2} y^2 + \frac{v_1 - v_0}{L^2} (k_0 - 1) z^2 = v_1 - c,$$

e poichè è  $k_0 > 1$ , si ha che le isotachie sono ellissi omotetiche di semiassi

$$a = L \sqrt{\frac{v_1 - c}{v_1 - v_0}}, \quad b = L \sqrt{\frac{v_1 - c}{(v_1 - v_0)(k_0 - 1)}},$$

il cui rapporto

$$\frac{a}{b} = \sqrt{k_0 - 1}$$

si mantiene costante.

Eliminando dal secondo membro della (24) il valore di  $\frac{y^2}{L^2}$ , per mezzo della (21'), si ha che la velocità  $v_s$  lungo il profilo, in funzione della profondità  $z$ , risulta

$$(26) \quad v_s = v_1 - (v_1 - v_0) \left[ 1 - \frac{z}{z_1} + (k_0 - 1) \frac{z^2}{L^2} \right].$$

Si ricava

$$\frac{dv_s}{dz} = \frac{v_1 - v_0}{z_1} \left[ 1 - \frac{2(k_0 - 1)z}{L^2} z \right],$$

il cui secondo membro si annulla per  $z = L^2/[2(k_0 - 1)z_1]$ . Poichè, avendo riguardo alla (22) e alla (23), risulta

$$z_1 < \frac{L^2}{2(k_0 - 1)z_1},$$

si ha che per  $0 \leq z \leq z_1$ , è  $\frac{dv_s}{dz} > 0$ , cioè la velocità lungo la parete del canale va crescendo con la profondità.

È utile ricavare ancora dalla (11), nel caso considerato, il coefficiente di attrito  $\nu$ . Tenendo conto del valore (22') della costante  $C_0$  e dell'equazione (21'), si deduce facilmente

$$v = \frac{k_0 - 1}{k_0} \tan \alpha \cdot \frac{z_1}{z + z_0} \sqrt{\frac{2}{k_0 - 1} - \frac{3 - k_0}{k_0 - 1} \frac{z}{z_1}},$$

da cui risulta manifesto che il coefficiente di attrito  $\nu$  decresce col crescere della profondità dal valore

$$\nu_0 = \frac{k_0 - 1}{k_0} \tan \alpha \cdot \frac{z_1}{z_0} \sqrt{\frac{2}{k_0 - 1}} = \frac{1}{2} \frac{L}{z_0} \frac{\tan \alpha}{k_0} \sqrt{2(3 - k_0)}, \quad \text{per } z = 0,$$

al valore

$$\nu_1 = \frac{k_0 - 1}{k_0} \tan \alpha \cdot \frac{z_1}{z_1 + z_0}$$

per  $z = z_1$ .

4. Nel caso in cui il diagramma delle velocità sulla superficie libera sia rappresentato da una curva di 3° ordine, ciò che può avvenire quando detto diagramma risulta dissimmetrico rispetto al piano mediano del canale, assumendo l'origine 0 degli assi nel punto in cui la velocità ha il valore massimo  $v_1$ , e indicando rispettivamente con  $v_0$ ,  $v_0'$  le velocità nei punti estremi dove è  $y = -L$  ed  $y = L'$ , possiamo scrivere

$$(27) \quad \varphi(y) \equiv \bar{v} = v_1 - \frac{LL'}{L + L'} \left( \frac{v_1 - v_0}{L^3} + \frac{v_1 - v_0'}{L'^3} \right) y^2 + \frac{1}{L + L'} \left( \frac{v_1 - v_0}{L^2} - \frac{v_1 - v_0'}{L'^2} \right) y^3.$$

Ponendo per semplicità

$$(28) \quad a = \frac{LL'}{L + L'} \left( \frac{v_1 - v_0}{L^3} + \frac{v_1 - v_0'}{L'^3} \right),$$

$$b = \frac{1}{L + L'} \left( \frac{v_1 - v_0}{L^2} - \frac{v_1 - v_0'}{L'^2} \right),$$

si ricava in questo caso

$$(29) \quad U = v_1 - a(y^2 - z^2) + b(y^3 - 3yz^2)$$

e l'equazione differenziale del profilo del canale risulta

$$(30) \quad [2ay - 3b(y^2 - z^2)]z' + 2az - 6byz + \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha [C_0(1 + z'^2) - \tan \alpha \cdot z] = 0.$$

Indicando con  $\gamma_0 (> 0)$  il valore di  $z'$ , il valore cioè del coefficiente angolare nel punto estremo  $y = -L$ ,  $z = 0$ , si deduce per la costante  $C_0$  il valore

$$(31) \quad C_0 = \frac{\mu L(2a + 3bL)\gamma_0}{\rho g \cos \alpha \cdot (1 + \gamma_0^2)}$$

detto analogamente  $-\gamma_0'$  il coefficiente angolare all'altro estremo ( $y = L'$ ,  $z = 0$ ), si deduce che  $\gamma_0$  e  $\gamma_0'$  devono essere legati dalla relazione

$$(32) \quad \frac{(2a + 3bL)L\gamma_0}{1 + \gamma_0^2} = \frac{(2a + 3bL')L'\gamma_0'}{1 + \gamma_0'^2}.$$

Il profilo della sezione del canale si otterrà quindi costruendo (numericamente, o graficamente) l'integrale  $z = z(y)$  della (30), tale che per  $y = -L$ , sia  $z = 0$ . È evidente che per  $v_0' = v_0$ ,  $L' = L$ , risulta  $b = 0$ , e il profilo diventa parabolico.

5. Consideriamo infine il caso in cui il diagramma delle velocità sulla superficie libera sia rappresentabile con una curva di 4° ordine, simmetrica rispetto al piano mediano del canale. Si può scrivere allora

$$(33) \quad \varphi(y) = \bar{v} = v_0 + (v_1 - v_0) \left(1 - \frac{y^2}{L^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{M^2}\right)$$

dove  $L$  è la semilarghezza del canale ed è  $M$  una costante maggiore di  $L$ . Si ricava in questo caso

$$(34) \quad U = v_0 + (v_1 - v_0) \left[1 - \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2}\right)(y^2 - z^2) + \frac{1}{L^2 M^2}(y^4 - 6y^2 z^2 + z^4)\right]$$

e l'equazione differenziale del profilo risulta

$$(35) \quad (v_1 - v_0) \left[2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2}\right) y - \frac{4}{L^2 M^2} (y^3 - 3y z^2)\right] z' + \\ + (v_1 - v_0) \left[2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2}\right) z + \frac{4}{L^2 M^2} (z^3 - 3y^2 z)\right] + \\ + \frac{\rho g}{\mu} \cos \sigma [C_0 (1 + z'^2) - \tan \alpha \cdot z] = 0.$$

Indicando ancora con  $\gamma_0$  il valore di  $z'$  all'estremo  $y = -L$ ,  $z = 0$ , si ha per la costante  $C_0$  il valore

$$(36) \quad C_0 = \frac{2\mu(v_1 - v_0)L\gamma_0}{\rho g \cos \alpha \cdot (1 + \gamma_0^2)} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{M^2}\right),$$

e la profondità massima  $z_1$ , in corrispondenza della quale sarà  $y = 0$ ,  $z = 0$ , sarà fornita, come si deduce facilmente, dall'equazione

$$(37) \quad z_1^3 - \frac{1}{2} M^2 \left[ \frac{\rho g L^2 \sin \alpha}{2\mu(v_1 - v_0)} - \left(1 + \frac{L^2}{M^2}\right) \right] z_1 + \frac{L M^2 \gamma_0}{2(1 + \gamma_0^2)} \left(1 - \frac{L^2}{M^2}\right) = 0,$$

la quale ammette due radici positive se

$$\frac{\rho g L^2 \sin \alpha}{2\mu(v_1 - v_0)} > 1 + \frac{L^2}{M^2}.$$

In tal caso si avranno due soluzioni del problema.

Anche qui va osservato che per  $\frac{L}{M}$  tendente a zero si ricade nel caso del profilo parabolico.