BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Luciano de Vito

Su una limitazione degli autovalori relativi a problemi al contorno per equazioni differenziali a derivate parziali di ordine $2n$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 319–326.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_319_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Su una limitazione degli autovalori relativi a problemi al contorno per equazioni differenziali a derivate parziali di ordine $2n$.

Nota di LUCIANO DE VITO (a Roma)

Sunto. - *Vengono determinate condizioni generali atte ad assicurare, per un operatore differenziale di ordine* 2n, *una limitazione per gli autovalori che generalizza quella stabilita da* CHIFFI *nel caso particolare di un operatore ellittico del secondo ordine.*

Summary. - *Suitable general conditions assuring a limitation for eigenvalues of differential operator of order* 2n *are here established. This limitation is a generalisation of* CHIFFI*'s one, concerning the particular case of a second order elliptical operator.*

In una sua recente Nota A. CHIFFI (*) si occupa di una limitazione relativa agli autovalori di un problema al contorno per un'equazione a derivate parziali del secondo ordine lineare di tipo ellittico. Nella presente Nota il risultato di CHIFFI viene esteso ad equazioni di ordine $2n$.

Svolgendo un ordine di considerazioni di tipo analogo a quello seguito in un mio precedente lavoro (*Sugli autovalori e sulle autosoluzioni di una classe di trasformazioni hermitiane*, « *Rend. Sem. Matem. Padova* » 1956, v. XXV) mostrerò come la limitazione del tipo di quella data dal CHIFFI sia una abbastanza immediata conseguenza della possibilità di fornire una rappresentazione spettrale per l'operatore differenziale e per i suoi iterati, nella varietà delle funzioni che già verificano le condizioni al contorno (cfr. la (4) della presente Nota). L'esistenza di tale rappresentazione proviene in modo ovvio dall'ammettere la totale continuità della *trasformazione risolvente* del problema e dal supporre questa sprovvista dell'autovalore nullo. L'ipotesi dell'ellitticità dell'operatore differenziale, nel caso $n = 1$, considerato dal CHIFFI, in questo soltanto gioca, in quanto la trasformazione risolvente verifica tali condizioni.

Sia A un campo limitato dello spazio euclideo ad r dimensioni, il punto generico del quale sarà indicato con $x \equiv (x_1, \dots, x_r)$. Sup-

(*) A. CHIFFI, *Sugli sviluppi in serie di autosoluzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, Vol. XI, Fasc. III-IV (1957), pp. 217-223.

porremo che il campo A verifichi condizioni di regolarità tali che consentano l'applicazione delle formule integrali di GREEN-GAUSS.

Indichiamo con $\mathcal{E}(u)$ un operatore differenziale lineare autoaggiunto di ordine $2n$ e con $L_1(u), \dots, L_q(u)$, q operatori differenziali lineari al contorno, al più di ordine $2n - 1$. Indichiamo inoltre con U la varietà costituita dalle funzioni continue insieme con le derivate fino all'ordine $2n$ in A e fino all'ordine n' in $A + \mathcal{F}A$ (ove $\mathcal{F}A$ è la frontiera di A ed n' è il massimo ordine degli operatori L_h).

Consideriamo il problema al contorno:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \mathcal{E}(u) &= f \qquad \text{in } A \\ L_h(u) &= 0 \qquad \text{su } \mathcal{F}A \qquad\qquad (h = 1, \dots, q). \end{aligned}$$

Supponiamo che tale problema, considerato nella classe U, sia dotato di funzione di GREEN $\mathcal{G}(x, y)$, essendo (x, y) un punto variabile nel prodotto topologico $A \times A$ e supponiamo che tale problema sia autoaggiunto nel senso che riesce: $\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x)$. Dicendo che il problema (1) è dotato di funzione di GREEN $\mathcal{G}(x, y)$ intendiamo che esistono una funzione $\mathcal{G}(x, y)$ definita in $A \times A$ ed una classe H di funzioni di quadrato integrabile in A verificanti le seguenti condizioni:

a) indicato con $L^{(2)}(A)$ lo spazio hilbertiano delle funzioni reali di quadrato integrabile in A, in cui il prodotto scalare è definito nel modo seguente:

$$u, v) = \int_A u(x)\, v(x)\, dx \qquad (dx \equiv dx_1\, dx_2 \dots dx_r),$$

la trasformazione integrale:

$$\int_A \mathcal{G}(x, y)\, u(y) dy$$

è definita in $L^{(2)}(A)$, muta $\mathring{L}^{(2)}(A)$ in una sua parte, ed è totalmente continua (cioè è continua e trasforma insiemi limitati in insiemi compatti);

b) per ogni $f \in H$ il problema (1) ammette soluzione contenuta in U e questa può porsi nella forma:

$$u(x) = \int_A \mathcal{G}(x, y) f(y) dy .$$

Supponiamo che esista una funzione $\Im(x)$, definita in $A + \mathfrak{F}A$, ivi positiva e lipschitziana. tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1°) per ogni $f \in H$ riesce: $\Im f \in H$, $f / \Im \in H$,

2°) posto:

$$T(u) = \int_A \mathcal{G}(x, y) u(y) \Im(y) dy,$$

ogni autosoluzione u, di quadrato integrale in A, dell'equazione:

$$T(u) = \mu u$$

appartiene ad H.

Supporremo inoltre che:

3°) l'equazione integrale

$$\int_A \mathcal{G}(x, y) u(y) \mathrm{d}y = 0$$

sia priva di autosoluzioni in $L^{(2)}(A)$.

Dimostriamo che:

In tali ipotesi il problema al contorno

$$(1') \qquad \begin{aligned} &\mathcal{E}(u) + \lambda \Im u = 0 && \text{in } A \\ &L_h(u) = 0 && \text{su } \mathfrak{F}A \qquad (h = 1, \dots, q) \end{aligned}$$

ammette un'infinità numerabile di autovalori. Inoltre l'insieme di tutte le autosoluzioni di tale problema è contenuto in T(H) *e costituisce una base per lo spazio* S *delle funzioni reali, di quadrato integrabile in* A, *reso hilbertiano con la seguente definizione di prodotto scalare:*

$$(u, v)_S = \int_A u(x) v(x) \Im(x) dx.$$

Lo spazio S è completo; inoltre la trasformazione

$$T(u) = \int_A \mathcal{G}(x, y) u(y) \Im(y) dy,$$

la quale muta S in una sua parte $T(S)$, è lineare, continua. e trasforma insiemi limitati in insiemi compatti. Questi fatti sono immediata conseguenza dell'esistenza di due numeri positivi M ed N tali che

$$M\int_A |u(y)|^2 dy \leq \int_A |u(y)|^2 \Im(y) dy \leq N \int_A |u(y)|^2 dy. \quad (^1)$$

La trasformazione T è simmetrica, cioè:

$$(T(u),\ v)_S = (u,\ T(v))_S\,.$$

Si ha infatti

$$(T(u),\ v)_S = \int_A v(x)\Im(x)\,dx \int_A \mathcal{G}(x,\ y)\,u(y)\Im(y)\,dy =$$

$$= \int_A v(x)\Im(x)\,dx \int_A \mathcal{G}(y,\ x)\,u(y)\Im(y)\ dy =$$

$$= \int_A u(y)\Im(y)\,dy \int_A \mathcal{G}(y,\ x)\,v(x)\Im(x)\,dx = (u,\ T(v))_S\,.$$

In corrispondenza ad ogni $v \in T(H)$ poniamo: $\mathcal{E}(v)/\Im = E(v)$.

La trasformazione lineare E muta $T(H)$ nell'insieme H. Infatti se $v \in T(H)$ si ha $\mathcal{E}(v) \in H$ e quindi, per la 1ª) anche $\dfrac{\mathcal{E}(v)}{\Im}$ appartiene ad H; se, d'altra parte, è $f \in H$ si ha anche, per la 1ª), $\Im f \in H$ e poichè esiste in $T(H)$ una funzione v, tale che $\mathcal{E}(v) = \Im f$, si ha che per ogni $f \in H$ esiste una v in $T(H)$ tale che $E(v) = f$.

Dalle 2ª) e 3ª) segue che ogni autosoluzione di $T(u) = \mu u$ appartiene a $T(H)$ e dalla 3ª) segue che l'equazione $T(u) = 0$ è priva di autosoluzioni in S.

Dalle proprietà ora dimostrate per le trasformazioni E e T segue che il problema (1′) ammette un'infinità numerabile di autovalori; inoltre ogni autosoluzione del problema (1′) è autosoluzione di $T(u) + 1/\lambda u = 0$ e, viceversa, ogni autosoluzione di $T(u) + \mu u = 0$ è autosoluzione di (1′) con $\lambda = 1/\mu$ [2].

[1] Cfr. G. Fichera, *Lezioni sulle trasformazioni lineari,* Istit. Mat. Trieste 1954, p. 479.

[2] Cfr. loc. cit. in (1) pp. 224-245.

Poichè quest'ultima equazione è priva dell'autovalore $\mu = 0$ l'insieme di tutte le autosoluzioni di (1') costituisce una base per S [3]. In tal modo il teorema è completamente dimostrato.

Indichiamo con $\{\lambda_k\}$ il sistema degli autovalori dell'equazione $E(v) + \lambda v = 0$, convenendo che in tale successione ogni autovalore sia ripetuto un numero di volte eguale alla sua molteplicità; indicheremo inoltre con u_k un'autosoluzione di $E(v) + \lambda_k v = 0$ tale che il sistema $\{u_k\}$ sia ortonormale in S cioè tale che

$$\int_A u_k u_h \Im dx = \delta_h^k.$$

Questo sistema risulta completo nella varietà di tutte le autosoluzioni di $E(v) + \lambda v = 0$ e quindi, per il teorema ora dimostrato, è completo in S.

Faremo, in quel che segue, l'ulteriore ipotesi che:

4°) se u e v sono due funzioni di U verificanti le $L_h(u) = 0$ $(h = 1, \dots, q)$, si abbia:

$$\int_A \mathcal{E}(u) v dx = \int_A u \mathcal{E}(v) dx.$$

Sussiste il seguente teorema:

Sia s *un intero positivo. Supponiamo che i coefficienti dell'operatore* $\mathcal{E}$ *e la funzione* $\Im$ *siano continui con le loro derivate fino all'ordine* $(\mathrm{s}-2)\mathrm{n}$ *in* $\mathrm{A} + \mathcal{F}\mathrm{A}$ *se* s *è pari e fino all'ordine* $(\mathrm{s}-1)\mathrm{n}$ (*ovvero* $2\mathrm{n}-1$ *per* $\mathrm{s}=1$) *se* s *dispari.*

Allora, nel caso che s *sia pari, per ogni funzione* u *continua in* $\mathrm{A} + \mathcal{F}\mathrm{A}$ *insieme con le sue derivate fino all'ordine* ns *e tale che* $\mathrm{L}_h[\mathrm{E}^i(\mathrm{u})] = 0$ $(\mathrm{h} = 1, \dots, \mathrm{q};\ \mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{s}/2 - 1)$ (*ove si è posto* $\mathrm{E}^1 = \mathrm{E}$, $\mathrm{E}^k = \mathrm{E}(\mathrm{E}^{k-1})$ *per* $\mathrm{k} \geq 2$), *sussiste la diseguaglianza*:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^s_m c^2_m \leq M \sum_{t=0}^{ns} \sum_{t_1 + \dots + t_r = t} \int_A \left(\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1} \dots \partial x_r^{t_r}} \right)^2 dx \tag{2}$$

ove

$$c_m = \int_A u u_m \Im dx.$$

Se s *è dispari, per ogni funzione* u *continua in* $\mathrm{A} + \mathcal{F}\mathrm{A}$ *con le sue derivate fino all'ordine* $(\mathrm{s}+1)\mathrm{n}$ *e tale che* $\mathrm{L}_h[\mathrm{E}^i(\mathrm{u})] = 0$ $(\mathrm{h} = 1, \dots, \mathrm{q};$

[3] Cfr. loc. cit. in [1] p. 223.

$i = 1, \ldots, \frac{s-1}{2}\Big)$, *sussiste la diseguaglianza:*

$$\text{(3)} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^s_m c^2_m \leq M \sum_{t=0}^{ns} \sum_{t_1+\ldots+t_r=t} \int_A \left(\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_r^{t_r}}\right)^2 dx +$$

$$+ N \sum_{t=0}^{n(s+1)-1} \sum_{\tau=0}^{ns-1} \sum_{t_1+\ldots+t_r=t} \sum_{\tau_1+\ldots+\tau_r=\tau} \int_{\mathfrak{F}A} \left| \frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_r^{t_r}} \cdot \frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1} \ldots x_r^{\tau_r}} \right| d\sigma,$$

ove $d\sigma$ *è l'elemento di misura ipersuperficiale su* $\mathfrak{F}A$ *ed* M *ed* N *sono due convenienti numeri positivi, dipendenti esclusivamente da* $\mathcal{E}$, L_h, $\Im$ *ed* A.

Se s è pari, la funzione $E^{s/2}(u)$ è continua in $A + \mathfrak{F}A$; essa allora, pensata come elemento di S, può essere rappresentata per mezzo del seguente sviluppo in serie di FOURIER rispetto al sistema $\{u_k\}$, completo in S:

$$F^{s/2}[u(x)] = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) \int_A E^{s/2}[u(y)] u_m(y) \Im(y) dy.$$

Per le ipotesi fatte, si ha

$$\int_A E^{s/2}(u) u_m \Im dy = \int_A \mathcal{E}[E^{s/2-1}(u)] u_m dy =$$

$$= \int_A E^{s/2-1}(u) \mathcal{E}(u_m) dy = -\lambda_m \int_A E^{s/2-1}(u) u_m \Im dy \text{ (4)};$$

ne viene:

$$\int_A E^{s/2}(u) u_m \Im dy = (-\lambda_m)^{s/2} \int_A u\, u_m \Im dy = (-\lambda_m)^{s/2} c_m.$$

Si ha in tal modo

$$\text{(4)} \qquad E^{s/2}[u(x)] = \sum_{m=1}^{\infty} (-\lambda_m)^{s/2} u_m(x) \int_A u(y) u_m(y) \Im(y) dy,$$

ove la serie a secondo membro converge nella metrica di S (cioè in media di ordine due). Si ha allora, per l'ipotesi dell'ortonor-

(4) Si tenga presente che: $u_m \in T(H) \subset U$.

malità di $\{u_m\}$ in S:

$$\int_A (E^{s/2}[u(x)])^2 \mathfrak{I}(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^s{}_m c^2{}_m .$$

D'altra parte è immediato constatare che riesce:

$$\int_A (E^{s/2}[u(x)])^2 \mathfrak{I}(x)\, dx \leq M \sum_{t=0}^{ns} \sum_{t_1+\ldots+t_r=t} \int_A \left(\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_r^{t_r}}\right)^2 dx$$

ove M è un'opportuna costante positiva dipendente dai coefficienti dell'operatore $\mathcal{E}$ e da $\mathfrak{I}$.

In tal modo è provata la (2).

Se s è dispari, applicando gli stessi procedimenti usati nel caso di s pari, si arriva alla relazione:

$$\int_A E^{\frac{s+1}{2}}(u) E^{\frac{s-1}{2}}(u) \mathfrak{I} dx = - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^s{}_m c^2{}_m . \tag{5}$$

Per trasformare l'integrale a primo membro di questa relazione, cominciamo con l'osservare che il suo integrando ha un'espressione del tipo seguente:

$$E^{\frac{s+1}{2}}(u) E^{\frac{s-1}{2}}(u) \mathfrak{I} = \left(\sum_{t=0}^{(s+1)n} \sum_{t_1+\ldots+t_r=t} a^{(t)}_{t_1\ldots t_r}(x) \frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_r^{t_r}} \right) \cdot$$

$$\left(\sum_{\tau=0}^{(s-1)n} \sum_{\tau_1+\ldots+\tau_r=\tau} b^{(\tau)}_{\tau_1\ldots\tau_r}(x) \frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1} \ldots \partial x_r^{\tau_r}} \right),$$

ove $a^{(t)}_{t_1\ldots t_r}$ e $b^{(\tau)}_{\tau_1\ldots\tau_r}$ sono funzioni che dipendono dai coefficienti dell'operatore $\mathcal{E}$ e dalla funzione $\mathfrak{I}$ nonchè dalle loro derivate fino all'ordine $(s-1)n$ incluso.

Allora, l'integrale a primo membro della (5) è dato dalla somma:

$$\sum_{t=0}^{sn} \sum_{\tau=0}^{(s-1)n} \sum_{t_1+\ldots+t_r=t} \sum_{\tau_1+\ldots+\tau_r=\tau} \int_A a^{(t)}_{t_1\ldots t_r} b^{(\tau)}_{\tau_1\ldots\tau_r} \frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_r^{t_r}} \frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1} \ldots \partial x_r^{\tau_r}} dx +$$

$$+ \sum_{t=sn+1}^{(s+1)n} \sum_{\tau=0}^{(s-1)n} \sum_{t_1+\ldots+t_r=t} \sum_{\tau_1+\ldots+\tau_r=\tau} \int_A a^{(t)}_{t_1\ldots t_r} b^{(\tau)}_{\tau_1\ldots\tau_r} \frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_r^{t_r}} \frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1} \ldots \partial x_r^{\tau_r}} dx$$

È immediato constatare, come nel caso di s pari, l'esistenza di un numero positivo M' tale che si abbia:

$$\left|\sum_{t=0}^{sn}\sum_{\tau=0}^{(s-1)n}\sum_{t_1+\ldots+t_r=t}\sum_{\tau_1+\ldots+\tau_r=\tau}\int_A a^{(t)}_{t_1\ldots t_r}\, b^{(\tau)}_{\tau_1\ldots\tau_r}\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_r^{t_r}}\frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1}\ldots\partial x_r^{\tau_r}}dx\right|\leq$$

$$\leq M'\sum_{t=0}^{sn}\sum_{t_1+\ldots+t_r=t}\int_A\left(\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_r^{t_r}}\right)^2 dx.$$

Si ha inoltre, eseguendo n successive integrazioni per parti, per ogni t tale che $sn+1\leq t\leq(s+1)n$ e τ tale che $0\leq\tau\leq(s-1)n$:

$$\int_A a^{(t)}_{t_1\ldots t_r}\, b^{(\tau)}_{\tau_1\ldots\tau_r}\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_r^{t_r}}\frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1}\ldots\partial x_r^{\tau_r}}dx=$$

$$=(-1)^n\int_A\frac{\partial^{t-n}u}{\partial x_1^{t_1-t_1^{(n)}}\ldots\partial x_r^{t_r-t_r^{(n)}}}\frac{\partial^n}{\partial x_1^{t_1^{(n)}}\ldots\partial x_r^{t_r^{(n)}}}\left(\frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1}\ldots\partial x_r^{\tau_r}}a^{(t)}_{t_1\ldots t_r}\, b^{(\tau)}_{\tau_1\ldots\tau_r}\right)dx+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}\int_{\mathfrak{F}A}\frac{\partial^{t-l}u}{\partial x_1^{t_1-t_1^{(l)}}\ldots\partial x_r^{t_r-t_r^{(l)}}}\frac{\partial^{l-1}}{\partial x_1^{t_1^{(l-1)}}\ldots\partial x_r^{t_r^{(l-1)}}}\left(\frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1}\ldots\partial x_r^{\tau_r}}a^{(t)}_{t_1\ldots t_r}\, b^{(\tau)}_{\tau_1\ldots\tau_r}\right)\nu_{k_l}\,d\sigma$$

ove $t_k^{(0)}=0$, $t_k^{(l)}\geq t_k^{(l-1)}\geq 0$, $t_1^{(l)}+\ldots+t_r^{(l)}=l$, k_l è quello dei valori dell'indice k in corrispondenza al quale si ha: $t_k^{(l)}-t_k^{(l-1)}=1$, ν_{k_l} è la componente della normale interna ν secondo l'asse x_{k_l}. Ne viene facilmente l'esistenza di due numeri M'' ed N tali che:

$$\left|\sum_{t=sn+1}^{(s+1)n}\sum_{\tau=0}^{(s-1)n}\sum_{t_1+\ldots+t_r=t}\sum_{\tau_1+\ldots+\tau_r=\tau}\int_A a^{(t)}_{t_1\ldots t_r}\, b^{(\tau)}_{\tau_1\ldots\tau_r}\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_r^{t_r}}\frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1}\ldots\partial x_r^{\tau_r}}dx\right|\leq$$

$$\leq M''\sum_{t=0}^{sn}\sum_{t_1+\ldots+t_r}\int_A\left(\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_r^{t_r}}\right)^2 dx+$$

$$+N\sum_{t=0}^{n(s+1)-1}\sum_{\tau=0}^{ns-1}\sum_{t_1+\ldots+t_r=t}\sum_{\tau_1+\ldots+\tau_r=\tau}\int_{\mathfrak{F}A}\left|\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_r^{t_r}}\cdot\frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1}\ldots\partial x_r^{\tau_r}}\right|d\sigma.$$

Se si assume $M=M'+M''$ resta così provata la (3).

Nel caso $n=1$, ove si assuma per $\mathcal{E}$ un operatore di tipo ellittico positivo e si ponga: $q=1$, $L_1(u)=\alpha\frac{\partial u}{\partial\nu}+\beta u$ (con $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ indichiamo la derivata conormale rispetto all'operatore $\mathcal{E}$) tutte le ipotesi 1°), 2°), 3°), 4°) qui fatte per $\mathcal{E}$ sono soddisfatte, quale si sia la funzione $\mathfrak{I}$, positiva e lipschitziana in $A+\mathfrak{F}A$, purchè i coefficienti di $\mathcal{E}$ e di L_1 e la frontiera $\mathfrak{F}A$ di A verifichino le condizioni per l'esistenza della funzione di Green [5].

---

[5] Cfr. M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 1940, p. 821.