Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Guglielmino

Sulle risoluzione del problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z)$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 308–318.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_308_0>

Sulla risoluzione del problema di Darboux per l' equazione $s = f(x, y, z)$.

Nota di FRANCESCO GUGLIELMINO (a Catania)

Sunto. - *In questa Nota l' Autore studia il problema di* DARBOUX *per l' equazione* $s = f(x, y, z)$ *in ipotesi di* CARATHÉODORY *(vedi n.* 1*) stabilendo un teorema di esistenza e uno di unicità e di convergenza delle approssimazioni successive.*

Summary. - *In this Note the Author studies the* DARBOUX' *s problem for the equation* $s = f(x, y, z)$ *in the extended sense (see Sec.* 1*). Theorems on the existence and uniqueness of solution and on the convergence of the successive approximations are established.*

1. Indichiamo con R il rettangolo

$$R : 0 \leq x \leq a, \qquad 0 \leq y \leq b \qquad (a, b > 0)$$

e con S lo strato

$$S : (x, y) \in R, \qquad |z| < +\infty.$$

Date tre funzioni $\sigma(x)$, $\tau(y)$, $f(x, y, z)$, definite rispettivamente in $0 \leq x \leq a$, in $0 \leq y \leq b$ e in S, e una costante z_0, consideriamo l' equazione integrale

$$(D) \qquad z(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0 + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, z(\xi, \eta)) d\xi d\eta \ \text{(1)}$$

nell' incognita $z(x, y)$. Diremo soluzione della (D) in R ogni funzione che la soddisfi in tutti i punti di R.

Esporremo alcune osservazioni e risultati circa la risoluzione della (D) nel caso in cui

a) $\sigma(x)$, $\tau(y)$ *siano due funzioni continue negli intervalli* $[0, a]$, $[0, b]$ *rispettivamente, tali che* $\sigma(0) = \tau(0) = z_0$,

b) $f(x, y, z)$, *definita in* S, *sia misurabile in* R *rispetto a* (x, y) *per ogni* z *e continua rispetto a* z *per ogni* $(x, y) \in R$; *risulti, poi, in* S:

$$|f(x, y, z)| \leq M(x, y, |z|),$$

(1) Tutti gli integrali che appaiono nella presente Nota sono integrali di LEBESGUE.

dove M(x, y. u) *è definita e non negativa per*

$$0 \leq x \leq a, \qquad 0 \leq y \leq b, \qquad u \geq 0,$$

non decrescente rispetto a u *per ogni* (x, y) ∈ R *ed è, inoltre, tale che esista almeno una funzione* $\tilde{u}$(x, y), *definita, non negativa in* R, *soddisfacente ivi la relazione*

$$\tilde{u}(x, y) \geq |\sigma(x) + \tau(y) - z_0| + \int_0^x \int_0^y M(\xi, \eta, \tilde{u}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \text{ (2)}.$$

Ogni soluzione $z(x, y)$ della (D) è, allora, continua e doppiamente assolutamente continua in R (3), quindi dotata quasi ovunque in R di derivata totale regolare $z'(x, y)$ e per essa si avrà

$$z'(x, y) = f(x, y, z(x, y))$$

quasi ovunque in R(4); inoltre

$$z(x, 0) = \sigma(x), \qquad z(0, y) = \tau(y)$$

sicchè può dirsi che la (D) è la traduzione integrale del classico problema di DARBOUX relativo all'equazione $s = f(x, y, z)$ (5).

2. Proviamo anzitutto il

TEOREMA I. – *Se le funzioni* f(x, y, z), σ(x) *e* τ(y) *soddisfano le ipotesi* a) *e* b), *allora la* (D) *ammette in* R *almeno una soluzione* (6).

(2) Queste ultime ipotesi sono ovviamente soddisfatte se risulta in S: $|f(x, y, z)| \leq M(x, y)$, essendo $M(x, y)$ definita, non negativa e sommabile in R.

(3) Nel senso di VITALI cioè: per ogni prefissato $\varepsilon > 0$ si lascia determinare un $\eta > 0$ in guisa tale che risulti minore di ε la somma dei valori assoluti degli incrementi doppi di $z(x, y)$ su di un qualsiasi gruppo di rettangoli (coi lati paralleli agli assi) di R non sovrapponentesi, la cui somma delle misure sia minore di η.

(4) Cfr. ad es.: L. M. GRAVES, *The theory of functions of real variables*, (New York, 1956), pag. 252.

(5) Per notizie bibliografiche sul problema di DARBOUX vedi: R. CONTI, *Sul problema di Darboux per l'equazione* $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$, Annali dell'Università di Ferrara, sez. VII, 2 (1952-1953), pp. 129-140; C. CILIBERTO, *Il problema di Darboux per una equazione di tipo iperbolico in due variabili*, Ricerche di Matematica, 4 (1955), pp. 15-29.

(6) Se $M(x, y, u)$ non contiene l'argomento u, il teorema analogo per l'equazione $z(x) = z_0 + \int_0^x f(\xi, z(\xi)) d\xi$ è quello, ben noto, di C. CARATHÉODORA

Per provarlo dividiamo la diagonale di R di estremi $(0,0)$ e (a,b) in n parti uguali $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ mediante i punti

$$(0,0),\quad \left(\frac{a}{n},\ \frac{b}{n}\right),\ \left(2\frac{a}{n},\ 2\frac{b}{n}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{n-1}{n}\,a,\ \frac{n-1}{n}\,b\right),\ (a,b)$$

a mandiamo per questi le semirette parallele ai semiassi coordinati positivi e dello stesso senso di tali semiassi. Esse dividono R in n parti che indicheremo con $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$, ..., $R_n^{(n)}$, nell'ordine.

Indi definiamo in R la funzione $z^{(n)}(x,y)$ ponendo

$$(1)\qquad \begin{cases} z^{(n)}(x,y)=\sigma(x)+\tau(y)-z_0 & \text{per } (x,\ y)\in R_n^{(1)}, \\ z^{(n)}(x,\ y)=\sigma(x)+\tau(y)-z_0+\displaystyle\int_0^{x_n}\int_0^{y_n} f(\xi,\ \eta,\ z^{(n)}(\xi,\ \eta))d\xi d\eta & \\ \qquad\qquad \text{per } (x,\ y)\in R-R_n^{(1)}, & \end{cases}$$

dove

$$x_n=x-\frac{a}{n},\qquad y_n=y-\frac{b}{n}.$$

Si osservi che le (1) definiscono effettivamente la funzione $z^{(n)}(x,y)$. Infatti, la prima delle (1) definisce $z^{(n)}(x,y)$ in $R_n^{(1)}$ e risulta ivi

$$(2)\qquad |\,z^{(n)}(x,y)\,|\leq|\,\sigma(x)+\tau(y)-z_0\,|+\int_0^x\int_0^y M(\xi,\ \eta,\ \tilde{u}(\xi,\eta))d\xi d\eta;$$

quindi, in $R_n^{(1)}$ si ha

$$(3)\qquad |\,f(x,\ y,\ z^{(n)}(x,y))\,|\leq M(x,\ y,\ \tilde{u}(x,y)).$$

Allora, la funzione $f(x,\ y,\ z^{(n)}(x,\ y))$ è sommabile in $R_n^{(1)}$ e la seconda delle (1) definisce $z^{(n)}(x,y)$ in $R_n^{(2)}$ in maniera da conservare la validità della (2) e, quindi, della (3). Ne segue la sommabilità di $f(x,\ y,\ z^{(n)}(x,y))$ in $R_n^{(1)}+R_n^{(2)}$ e perciò la seconda delle (1) definisce $z^{(n)}(x,\ y)$ in $R_n^{(3)}$ e così via, fino a raggiungere $R_n^{(n)}$. Resta, pure, acquisito che le (2) e (3) sono vere in tutto il rettangolo R.

La (2) ci assicura che le funzioni della successione $\{z^{(n)}(x,y)\}$ sono equilimitate in R. D'altra parte esse sono anche equicontinue in R poichè, detti $(x',\ y')$ e $(x'',\ y'')$ due qualunque punti di R, abbiamo:

$$|z^{(n)}(x', y') - z^{(n)}(x'', y'')| \leq |\sigma(x') - \sigma(x'')| + |\tau(y') - \tau(y'')| +$$
$$+ \left| \int_0^a \int_{y_n''}^{y_n'} M(\xi, \eta, \tilde{u}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right| + \left| \int_{x_n''}^{x_n} \int_0^b M(\xi, \eta, \tilde{u}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right|,$$

dove $x_n' = x' - \frac{a}{n}$ se $x' \geq \frac{a}{n}$, $x_n' = 0$ se $x' < \frac{a}{n}$ e convenzioni analoghe valgono per x_n'', y_n', y_n''. Per il teorema di ASCOLI esiste, allora, una sottosuccessione $\{z^{(n_k)}(x, y)\}$ uniformemente convergente in R verso una funzione $\tilde{z}(x, y)$ continua e, per la (2),

$$|\tilde{z}(x, y)| \leq \tilde{u}(x, y);$$

quindi, $f(x, y, \tilde{z}(x, y))$ risulta sommabile in R.

Sia, ora, (x, y) un qualunque punto di R non appartenente agli assi; per k sufficientemente grande possiamo supporre $(x, y) \in R - R_{n_k}^{(1)}$. Avremo

$$\left| \tilde{z}(x, y) - \sigma(x) - \tau(y) + z_0 - \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, \tilde{z}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right| \leq$$

$$(4) \leq \left| \tilde{z}(x, y) - z^{(n_k)}(x, y) \right| + \int_0^x \int_0^y \left| f(\xi, \eta, z^{(n_k)}(\xi, \eta)) - f(\xi, \eta, \tilde{z}(\xi, \eta)) \right| d\xi d\eta +$$
$$+ \iint_{\Delta_{n_k}(x, y)} M(\xi, \eta, \tilde{u}(\xi, \eta)) d\xi d\eta,$$

avendo indicato con $\Delta_{n_k}(x, y)$ la differenza tra il rettangolo $(0 \leq \xi \leq x,\ 0 \leq \eta \leq y)$ e il rettangolo $(0 \leq \xi \leq x_{n_k},\ 0 \leq \eta \leq y_{n_k})$.

Dalla (4), applicando il teorema di passaggio al limite sotto il segno d'integrale dovuto a LEBESGUE, si deduce al divergere di n_k (tenuto conto che $z^{(n_k)}(x, y)$ tende a $\tilde{z}(x, y)$ e mis $\Delta_{n_k}(x, y)$ tende a zero) che il primo membro della (4) è zero. Ne segue che il primo membro della (4), essendo ovviamente nullo anche sui lati di R appartenenti agli assi, è identicamente nullo in R e resta così provato l'asserto.

3. Vogliamo, ora, esaminare cosa accade se, ferme restando le ipotesi a) e b) poste nel n. 1, in luogo delle funzioni approssimanti definite dalle (1) si considerano le *approssimazioni successive* costruite mediante le relazioni seguenti:

$$z_0(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0,$$

$$z_{n+1}(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0 + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, z_n(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Anche le funzioni della successione $\{ z_n(x, y) \}$ come già quelle della $\{ z^{(n)}(x, y) \}$ risultano equilimitate ed equicontinue in R perchè

$$| z_n(x, y) | \leq | \sigma(x) + \tau(y) - z_0 | + \int_0^x \int_0^y M(\xi, \eta, \tilde{u}(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

e, se (x', y') e (x'', y'') sono due qualunque punti di R,

$$| z_n(x', y') - z_n(x'', y'') | \leq | \sigma(x') - \sigma(x'') | + | \tau(y') - \tau(y'') | +$$
$$+ \left| \int_{x''}^{x'} \int_0^b M(\xi, \eta, \tilde{u}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right| + \left| \int_0^a \int_{y''}^{y'} M(\xi, \eta, \tilde{u}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right|.$$

Estratta, allora, una successione $\{ z_{n_k}(x, y) \}$ uniformemente convergente in R verso una funzione $z^*(x, y)$, si avrà:

$$z_{n_k+1}(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0 + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, z_{n_k}(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

e di qui, applicando ancora il teorema di LEBESGUE, segue che la successione $\{ z_{n_k+1}(x, y) \}$ al tendere di k a $+\infty$ converge (uniformemente) in R alla funzione $\bar{z}(x, y)$ data da

$$\bar{z}(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0 + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, z^*(\xi, \eta)) d\xi d\eta.$$

Non è detto però che sia $z^*(x, y) = \bar{z}(x, y)$.

Consideriamo, infatti, la funzione $f(x, y, z)$ definita nello strato

$$S_1 : 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1, \qquad |z| < +\infty$$

come segue

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 4xy & \text{se } \; 0 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq 1,\; -\infty < z \leq 0, \\ 4xy - 8\dfrac{z}{xy} & \text{se } \; 0 < x \leq 1,\; 0 < y \leq 1,\; 0 < z \leq x^2y^2, \\ -4xy & \text{se } \; 0 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq 1,\; x^2y^2 < z < +\infty. \end{cases}$$

Tale funzione è continua in S_1 e limitata ($|f(x, y, z)| \leq 4$); sono, quindi, soddisfatte le ipotesi b) comunque si assegnino le funzioni $\sigma(x)$ e $\tau(y)$ soddisfacenti le ipotesi a). Tuttavia, le approssimazioni successive nel caso attuale sono (se, per esempio, $\sigma(x) = 0$, $\tau(y) = 0$ identicamente in $[0, 1]$):

$$z_0(x, y) = 0, \quad z_{2n-1}(x, y) = x^2y^2, \quad z_{2n}(x, y) = -x^2y^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

e, quindi, $z^*(x, y) = x^2y^2$, $\bar{z}(x, y) = -x^2y^2$ (o viceversa).

4. È stato osservato (⁷) che, *se la* (D) *ha una sola soluzione* z(x, y) *e se, inoltre, per le approssimazioni successive è*

$$\lim_{n \to \infty} [z_{n+1}(x, y) - z_n(x, y)] = 0, \tag{5}$$

allora risulta

$$\lim_{n \to \infty} z_n(x, y) = z(x, y).$$

Infatti, riprendendo quanto si è detto nel n. precedente, con le stesse notazioni, si avrà:

$$\lim_{k \to \infty} [z_{n_k+1}(x, y) - z_{n_k}(x, y)] = 0;$$

quindi: $z^*(x,y) = \bar{z}(x, y)$ ossia la funzione $z^*(x, y)$ è soluzione della (D) e perciò $z^*(x, y) = z(x, y)$. Analogamente si prova che ogni successione estratta dalla $\{z_n(x, y)\}$ la quale sia (uniformemente) convergente in R ha per limite $z(x, y)$ e da questa osservazione si deduce facilmente che la successione $\{z_n(x, y)\}$ converge (uniformemente) a $z(x, y)$.

Una condizione che, in aggiunta alle ipotesi già dichiarate su $f(x, y, z)$, $\sigma(x)$, $\tau(y)$, è atta ad assicurare che la soluzione della (D) sia unica e valga la (5) è la seguente: *la* f(x, y, z) *soddisfi una condizione di Lipschitz rispetto a* z *uniformemente in* S [8] ossia esista una costante $L \geq 0$ tale da avere

$$|f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)| \leq L\,|z_1 - z_2|$$

per ogni coppia $(x, y, z_1) \in S$, $(x, y, z_2) \in S$.

(⁷) A. ALEXIEWICZ - W. ORLICZ, *Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, Studia Math., 15 (1956), pp. 201-215(214).

(⁸) Se si fanno su $f(x, y, z)$, $\sigma(x)$, $\tau(y)$ ipotesi più restrittive delle *a*) e *b*), quanto detto nel testo è noto. Cfr. per es.: E. KAMKE. *Differerential-gleichungen reeller Funktionen.* (Leipzig, 1956), pp. 402-405 e 408-410.

Nel n. 6 proveremo, più in generale, il seguente [9]

TEOREMA II. - *Sia* $\psi(x, y, u)$ *una funzione non negativa definita quando*

$$(x, y) \in R, \quad u \geq 0,$$

continua e non decrescente rispetto a u *comunque si fissi* (x. y) *in* R, *sommabile in* R *comunque si fissi* $u \geq 0$. *Supponiamo, inoltre, che per ogni* α, $0 < \alpha \leq a$, *l' unica soluzione dell' equazione integrale*

$$u(x, y) = \int_0^x \int_0^y \psi(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

nel rettangolo $(0 \leq x \leq \alpha,\ 0 \leq y \leq b)$ *sia la funzione identicamente nulla in tale rettangolo.*

Allora, se le funzioni f(x, y, z), $\sigma(x)$ *e* $\tau(y)$ *soddisfano le ipotesi* a) *e* b) *e se, comunque si prendono due punti* (x, y, z_1) *e* (x, y, z_2) *in* S, *risulta*:

$$|f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)| \leq \psi(x, y, |z_1 - z_2|), \tag{6}$$

l' equazione (D) *ammette una soluzione ed una sola e* (*vale la* (5) *cosicchè*) *essa è il limite delle approssimazioni successive.*

5. Alla dimostrazione del teorema ora enunciato conviene premettere il seguente

LEMMA. - *Se la funzione* $\psi(x, y, u)$ *soddisfa le ipotesi del teorema* II *e se* $\varphi(x, y)$ *è una funzione non negativa continua in* R *tale che*

$$\varphi(x, y) \leq \int_0^x \int_0^y \psi(\xi, \eta, \varphi(\xi, \eta)) d\xi d\eta \qquad [(x, y) \in R], \tag{7}$$

risulta $\varphi(x, y) = 0$ *in ogni punto di* R.

[9] Come vari Autori hanno osservato, esistono molte analogie tra il problema di risolvere la (*D*) e il problema di CAUCHY relativo ad una equazione differenziale ordinaria del primo ordine sotto forma normale. Per quel che riguarda l' argomento dei n. 3-6 della presente Nota nel caso delle equazioni ordinarie cfr.: E. A. CODDINGTON-N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, (New York, 1955), pp. 53-56.

Essendo, infatti, la funzione $\psi(x, y, 2)$ sommabile in R per ipotesi, si può determinare un numero positivo δ in maniera che risulti minore di uno l'integrale di $\psi(x, y, 2)$ esteso a un qualunque sottoinsieme di R di misura minore di δ; sia, allora, m un intero positivo tale che $\frac{ab}{m} < \delta$ e indichiamo con $R_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ il rettangolo

$$R_i : \frac{i-1}{m} a \leq x \leq \frac{i}{m} a, \; 0 \leq y \leq b \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Definiamo, poi, una funzione $\psi^*(x, y, u)$ ponendo

$$\psi^*(x, y, u) = \begin{cases} \psi(x, y, 0) & \text{se} \quad (x, y) \in R_1, \; -\infty < u < 0, \\ \psi(x, y, u) & \text{se} \quad (x, y) \in R_1, \; 0 \leq u \leq 2, \\ \psi(x, y, 2) & \text{se} \quad (x, y) \in R_1, \; 2 < u < +\infty. \end{cases}$$

La funzione $\psi^*(x, y, u)$ è sommabile in R_1 per ogni u, continua rispetto a u per ogni $(x, y) \in R_1$; inoltre, si ha:

$$\psi^*(x, y, u) \leq \psi(x, y, 2).$$

Allora, per il teorema I l'equazione integrale

$$u(x, y) = \frac{1}{q} + \int_0^x \int_0^y \psi^*(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

ammette, qualunque sia l'intero positivo q, una soluzione $u_q(x, y)$ continua in R_1 e soddisfacente le diseguaglianze:

$$0 < u_q(x, y) < 2 \qquad [(x, y) \in R_1].$$

Pertanto, la funzione $u_q(x, y)$ soddisfa in R_1 anche l'equazione integrale

$$u(x, y) = \frac{1}{q} + \int_0^x \int_0^y \psi(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta.$$

La successione $\{ u_q(x, y) \}$ è convergente in R_1 perchè le funzioni della successione sono positive e la successione è decrescente; risulta, cioè, in R_1

$$u_{q+1}(x, y) < u_q(x, y) \tag{8}$$

per ogni intero positivo q. Infatti, se così non fosse, l'insieme degli zeri di $u_q(x, y) - u_{q+1}(x, y)$ in R_1 sarebbe non vuoto e, poichè è chiuso, avrebbe distanza positiva r dall'origine del piano xy. Detto, allora, $(\bar{x}, \bar{y})$ uno zero avente distanza r dall'origine, avremmo:

$$u_{q+1}(\bar{x}, \bar{y}) = u_q(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{q} + \int_0^{\bar{x}}\int_0^{\bar{y}} \psi(\xi, \eta, u_q(\xi, \eta))d\xi d\eta >$$

$$> \frac{1}{q+1} + \int_0^{\bar{x}}\int_0^{\bar{y}} \psi(\xi, \eta, u_{q+1}(\xi, \eta))d\xi d\eta$$

e, quindi,

$$u_{q+1}(\bar{x}, \bar{y}) > u_{q+1}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Ciò è assurdo ed è perciò vera la (8).

Posto. allora, $u^*(x, y) = \lim\limits_{q \to +\infty} u_q(x, y)$, per la continuità di $\psi(x, y, u)$ rispetto a u, si ha in R_1:

$$\lim_{q \to +\infty} \psi(x, y, u_q(x, y)) = \psi(x, y, u^*(x, y));$$

dalla relazione

$$u_q(x, y) = \frac{1}{q} + \int_0^x\int_0^y \psi(\xi, \eta, u_q(\xi, \eta))d\xi d\eta \qquad [(x,y) \in R_1]$$

si deduce, quindi, facendo tendere q a $+\infty$ e applicando il teorema di LEBESGUE, che in R_1

$$u^*(x, y) = \int_0^x\int_0^y \psi(\xi, \eta, u^*(\xi, \eta))d\xi d\eta.$$

Ne segue, per una delle ipotesi fatte su $\psi(x, y, u)$, che $u^*(x, y)$ è identicamente nulla in R_1.

Con procedimento analogo a quello adoperato per stabilire la (8), si prova, tenendo conto della (7), che in R_1 risulta

$$\varphi(x, y) < u_q(x, y);$$

facendo tendere in questa q a $+\infty$, resta dimostrato che $\varphi(x, y)$ è (essendo per ipotesi non negativa) identicamente nulla in R_1.

La (7), allora, si scrive:

$$\varphi(x, y) \leq \int_{a/m}^{x} \int_{0}^{y} \psi(\xi, \eta, \varphi(\xi, \eta)) d\xi d\eta \qquad [(x, y) \in R - R_1]$$

e con un ragionamento analogo al precedente si può dimostrare che $\varphi(x, y)$ è identicamente nulla in R_2 e così via.

6. Acquisito così il lemma, passiamo alla dimostrazione del teorema II.

Che l'equazione (D) ammetta almeno una soluzione risulta dal teorema I essendo soddisfatte le ipotesi a) e b). D'altra parte, due soluzioni $\tilde{z}_1(x, y)$ e $\tilde{z}_2(x, y)$ della (D) sono sempre identicamente eguali in R. Infatti, si ha:

$$|\tilde{z}_1(x, y) - \tilde{z}_2(x, y)| \leq \int_0^x \int_0^y |f(\xi, \eta, \tilde{z}_1(\xi, \eta)) - f(\xi, \eta, \tilde{z}_2(\xi, \eta))| d\xi d\eta$$

e, per la (6),

$$|\tilde{z}_1(x, y) - \tilde{z}_2(x, y)| \leq \int_0^x \int_0^y \psi(\xi, \eta, |\tilde{z}_1(\xi, \eta) - \tilde{z}_2(\xi, \eta)|) d\xi d\eta.$$

Per quanto dimostrato nel lemma è, allora, in R: $\tilde{z}_1(x, y) = \tilde{z}_2(x, y)$.

Per completare la dimostrazione del teorema basterà, quindi, provare che, considerata la successione $\{z_n(x, y)\}$ delle approssimazioni successive, risulta vera la (5).

Posto $w_n(x, y) = z_{n+1}(x, y) - z_n(x, y)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ e denotato con $v(x, y)$ il limite massimo della successione $\{|w_n(x, y)|\}$, la validità della (5) in R sarà provata se dimostreremo che $v(x, y)$ è identicamente nulla in R e a tale scopo, essendo $v(x, y)$ ovviamente continua in R, basterà far vedere, in virtù del lemma, che in R

(9) $$v(x, y) \leq \int_0^x \int_0^y \psi(\xi, \eta, v(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

Cominciamo col dimostrare che, assegnato un intero positivo ν, ne esiste un altro N_ν tale che

(10) $$|w_n(x, y)| < v(x, y) + \frac{1}{\nu} \qquad [(x, y) \in R, \ n > N_\nu].$$

Per provare la (10) si osservi che $v(x, y)$ è uniformemente continua in R e le funzioni della successione $\{w_n(x, y)\}$ sono equicontinue in R. Allora, in corrispondenza al numero $\frac{1}{\nu}$ esiste un numero positivo δ_ν tale che, se (x', y') e (x'', y'') sono due punti di R la cui distanza è minore di δ_ν, si ha:

$$(11) \qquad |v(x', y') - v(x'', y'')| < \frac{1}{3\nu}, \qquad |w_n(x', y') - w_n(x'', y'')| < \frac{1}{3\nu}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si consideri, ora, un reticolo di R di massima diagonale minore di δ_ν e, detto s il numero delle maglie di tale reticolo, si associ ad ogni maglia $M_i (i = 1, 2, \ldots . s)$ un punto (x_i, y_i) in essa contenuto. Esiste un intero positivo N_ν tale che

$$(12) \qquad |w_n(x_i, y_i)| < v(x_i, y_i) + \frac{1}{3\nu} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s;\ n > N_\nu).$$

Dalle (11) e (12) segue facilmente la (10).

D'altra parte, per la definizione delle approssimazioni successive si ha in R:

$$|w_{n+1}(x,y)| \leq \int_0^x \int_0^y |f(\xi, \eta, z_{n+1}(\xi, \eta)) - f(\xi, \eta, z_n(\xi, \eta))| \, d\xi d\eta$$
$$(n = 0, 1, 2. \ldots);$$

quindi, per la (6)

$$|w_{n+1}(x, y)| \leq \int_0^x \int_0^y \psi(\xi, \eta, |w_n(\xi, \eta)|) d\xi d\eta$$

e, per la (10):

$$|w_{n+1}(x, y)| \leq \int_0^x \int_0^y \psi\left(\xi, \eta, v(\xi, \eta) + \frac{1}{\nu}\right) d\xi d\eta \qquad [(x, y) \in R,\ n > N_\nu].$$

Ne segue:

$$v(x, y) \leq \int_0^x \int_0^y \psi\left(\xi, \eta, v(\xi, \eta) + \frac{1}{\nu}\right) d\xi d\eta \qquad [(x, y) \in R]$$

e, al divergere di ν, la (9), come appunto volevamo dimostrare.