UMI

Recensioni.

* J. Favard, Cours d'Analyse, Ecole Polytecnique, T. I, 1954-55 , T. II, 1955-56,(Giovanni Sansone)
* W. J. Trjitzinsky, Les problèmes de totalisation se rattachant aux laplaciens non sommables, Gauthiers-Villars, Paris, 1954 (Gianfranco Cimmino)
* E. S. Frisch, A. W. Timorewa, Lehrgang der allgemeinen Physik, Web Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (Giovanni Lampariello)
* W. Schmeidler, Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum, T. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Sttutgart, 1954 (Gianfranco Cimmino)
* J. Favard, Cours de géométrie différentielle locale, Gauthier-Villars, Paris, 1957 (Vittorio Dalla Volta)
* Kurt Reidemeister, Raum und Zhal, Springer Verlag, Berlin, 1957 (Lamberto Cattabriga)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.2, p. 261–270.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_261_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

RECENSIONI

J. Favard, *Cours d'Analyse,* Ecole Polytecnique, T. I, (1954-55), XXV + 501, T. II. (1955-56), VI + 710. (Edizione litografata).

I due volumi redatti pei giovani della Ecole Polytecnique di Parigi presuppongono la conoscenza di un corso di matematica generale che nell'ordinamento universitario francese precede l'insegnamento dell'analisi.

Il chiaro trattatista premette un'arguta prefazione nella quale sono dichiarati i motivi che hanno ispirato la redazione del suo corso.

È noto che in ogni tempo e in ogni paese alcuni tecnici, anche di grande valore, pensano di ridurre l'insegnamento superiore della matematica prevalentemente all'illustrazione di un repertorio di formule, comode per le applicazioni.

Questa opinione non è condivisa invece dai matematici e fortunatamente da quei tecnici che avendo funzioni di altissima responsabilità chiedono che i futuri ingegneri arrivino alle scuole di applicazione e alle professioni dotati di una severa preparazione scientifica.

Scrive il Nostro: « C'est parmi les anciens élèves de l'Ecole Polytecnique qu'en principe doivent se recruter les techniciens créateurs, et pas seulement ceux qui font marcher une usine qui, avant eux, tournait déjà toute seule. Les pays attend donc de certains d'entre eux qu'ils faissent progresser la technique, qu'ils la lancent sur des voies nouvelles; mais cela demande assez souvent l'élaboration d'une théorie construite avec des données du réel, dont elle est une image plus ou moins bonne. S'il n'est pas question alors de poursuivre très loin les conséquences d'une telle théorie, il est par contre toujours question de construire un édifice logique, si modeste qu'il soit, et c'est pourquoi il me semble important que les éleves aient appris, au cours de leur passage à l'Ecole, à préciser leur pensée, à ne pas se contenter d'à peu près, si séduisants soient-ils, si utiles qu'ils puissent paraître au premier abord ».

Le principali teorie classiche vengono quindi esposte dall'Autore nei due volumi con la dovuta ampiezza, col necessario rigore e collegate in moltissimi punti alle più recenti vedute che sono a base dell'analisi generale.

Il primo volume riguarda la teoria delle operazioni e quella della rappresentazione, il secondo la teoria delle funzioni analitiche e delle equazioni.

Quattro capitoli introduttivi sugli elementi della teoria degli insiemi, sulle nozioni di topologia, sugli algoritmi infiniti, sulle funzioni a variazione limitata e sulle funzioni convesse aprono il primo volume e contengono un complesso di fatti e di idee, che bene appresi, daranno al lettore la possibilità di continuare senza sforzo eccessivo.

Il primo volume è suddiviso in due parti. La prima « Operazioni » comprende due sezioni: Calcolo differenziale e Calcolo integrale.

Nella prima sezione si nota lo studio in grande della corrispondenza tra figure piane nel caso dell'jacobiano diverso da zero, e le nozioni di curva e di superficie in geometria differenziale. Nella seconda sezione sono da notare i seguenti argomenti: gli omeomorfismi che mutano le aree piane quadrabili in aree piane quadrabili; la quadratura delle superficie di Jordan; l'integrale di Stieltjes-Riemann rispetto ad una funzione determinante a variazione limitata; gli elementi del calcolo differenziale esterno e le formule di Riemann, di Stokes e di Ostrogradsky; la misura degli insiemi e l'integrale di Lebesgue.

La seconda parte « Rappresentazioni » è suddivisa in cinque capitoli riguardanti la funzione Γ, i potenziali, le funzioni armoniche, la rappresentazione lineare e il teorema di Weierstrass negli spazi (L) e (L^2), le serie trigonometriche e l'integrale di Fourier.

Il contenuto di questi cinque capitoli e in stretta relazione col fine di Favard di arrivare alla rappresentazione analitica degli elementi di certi spazi funzionali, campo al quale il Nostro ha dato notevoli contributi originali.

Il secondo volume contiene anch'esso due parti, una sulle funzioni analitiche, l'altra sulla teoria delle equazioni.

Ampia è la trattazione della teoria delle funzioni analitiche: insieme alla parte classica comprendente la teoria delle famiglie normali, le funzioni analitiche, il prolungamento analitico, si trovano due capitali dedicati alle funzioni analitiche di più variabili e alle funzioni vettoriali analitiche.

La teoria delle equazioni, la quale forma la quarta parte del corso, tratta le equazioni differenziali ordinarie tanto nel campo reale che nel campo complesso, le equazioni alle derivate parziali del primo e del secondo ordine, le equazioni integrali, il calcolo delle variazioni.

Nella trattazione delle equazioni differenziali ordinarie si trovano tra l'altro la risolvente di Peano-Baker nel caso lineare, lo studio delle equazioni lineari secondo Fuchs-Riemann, l'equazione ipergeometrica di Gauss, le funzioni sferiche e quelle di Bessel.

I due capitoli sulle equazioni alle derivate parziali comprendono un'ampia trattazione dei problemi classici e l'impiego delle trasformazioni di Fourier e di Laplace e degli operatori di Heaviside per la soluzione dei problemi ai limiti per le equazioni del secondo ordine.

Estremamente ricco e moderno è il capitolo sulle equazioni integrali lineari con particolare riguardo ai nuclei Hermitiani e alle loro applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie e a certi problemi della fisica matematica.

Il volume termina con un capitolo sul calcolo delle variazioni e con una perspicua esposizione dei metodi diretti con applicazione al problema interno di Dirichlet e a quello di Plateau.

L'A. ha trasfuso nei due volumi i frutti della sua lunga esperienza di Maestro a Grenoble prima e successivamente alla Sorbonne e all'Ecole Polytecnique a Parigi. Egli ha redatto un vero e proprio trattato che avrà una grande influenza sulla formazione dei giovani sia che essi vogliano dedicarsi agli studi puri che alle applicazioni della matematica.

GIOVANNI SANSONE

W. J. TRJITZINSKY, *Les problèmes de totalisation se rattachant aux laplaciens non sommables*, Gauthier-Villars (Paris, 1954). pp. 92.

L'A. espone in questa monografia i primi risultati (ottenuti in massima parte da lui stesso), che si presentano nella questione di estendere i metodi di Denjoy per la costruzione di una primitiva di second'ordine di una derivata seconda generalizzata, dal caso delle funzioni di una a quello delle funzioni di due variabili. In luogo della derivata seconda generalizzata, si hanno qui dei laplaciani generalizzati in vari sensi, per esempio come minimi e massimi limiti di espressioni formate con rapporti incrementali di second'ordine. Viene anche studiata nelle ipotesi più larghe possibili la funzione di intervallo a due dimensioni che rappresenta il flusso di una funzione di due variabili attraverso alla frontiera dell'intervallo stesso. Largo riferimento vien fatto al noto trattato di Denjoy, Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique, per quanto riguarda in particolare i procedimenti di totalizzazione e le proprietà topologiche dei numeri derivati. L'opera dovrà necessariamente esser tenuta presente da chi voglia approfondire e continuare lo studio della difficile e importante questione trattata, e ricercare applicazioni analoghe a quella che, per il caso delle funzioni di una variabile, si ha nella teoria delle serie trigonometriche.

GIANFRANCO CIMMINO

E. S. FRISCH - A. W. TIMOREWA, *Lehrgang der allgemeinen Physik* (Corso di Fisica generale) Web Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, Teil I, II, III.

Gli Autori di questo « Corso di Fisica generale » hanno distribuito l'intero programma in otto parti che occupano tre volumi. Sebbene il Corso sia rivolto a studenti che studiano la Fisica come materia secondaria e non sia quindi sviluppato seguendo punti di vista rigorosamente sistematici, ma abbia piuttosto la tendenza a voler fornire allo studioso i mezzi per poter intendere la letteratura fisica moderna, pure la materia che contiene è sufficientemente vasta ed esposta, talvolta, con accurati e chiari dettagli, specialmente quando si tratta di mettere in evidenza i contributi che sono stati portati alla Fisica da fisici russi.

Nell'intera Opera gli Autori spesso accennano a idee filosofiche che traggono origine secondo il loro pensiero dalle conquiste della Fisica. Essi affermano che i progressi della Fisica e della Chimica hanno avuto un grande ruolo nell'affermazione della concezione materialistica dell'Universo, nella costituzione di una filosofia materialistica che, muovendo da una concezione materialistica elementare, si è evoluta verso il materialismo dialettico. Alla base di codesta filosofia sta il concetto di materia in un senso estremamente generale che oltrepassa di gran lunga quello tradizionale. Mentre, seguendo i filosofi idealisti, le scoperte della fisica moderna accennerebbero ad indicare il superamento della materia, gli Autori ispirandosi a Lenin ammettono che debbono essere aboliti i limiti entro i quali in passato si è tenuto il concetto di materia. Il materialismo dialettico considera la materia come un'entità inesauribile la cui forma di esistenza è il moto, inteso come mutabilità o modificazione; una realtà oggettiva al di fuori della nostra coscienza.

Le teorie fisiche tendono a guadagnare un'interpretazione sempre più profonda di codesta realtà e quindi, anche se sono approssimate, hanno grande valore.

Poichè le proprietà della materia sono inesauribili, nessuno dei concetti fisici ci permette di caratterizzare completamente la materia.

Il primo volume è diviso in tre parti:

Parte 1ª: Fondamenti fisici della meccanica.
Parte 2ª: Fisica molecolare.
Parte 3ª: Vibrazioni e onde.

Gli Autori attribuiscono ad Engels l'interpretazione del lavoro come cambiamento di forma del moto, considerato dal punto di vista quantitativo.

In grande risalto è posta nell'intera opera la figura di Lomonossow, scienziato russo del secolo XVIII, fondatore della Fisica e della Chimica in Russia.

Nel 1744 Lomonossow ha pubblicato un lavoro sulle cause del caldo e del freddo in cui sostiene l'idea che il calore di un corpo sia provocato da moto rotatorio delle molecole. Solo il moto rotatorio molecolare sarebbe comune a tutti gli stati di aggregazione della materia.

Come principale argomento a favore della teoria cinetico-molecolare del calore fu scelto il riscaldamento di un corpo mediante attrito.

Le prime misurazioni calorimetriche risalgono, secondo gli Autori, al fisico russo G. W. Richmann, contemporaneo di Lomonossow.

Il concetto di temperatura critica è attribuito a Mendelejeff (1861). Interessanti accenni alle teorie del fisico sovietico J. I. Frenkel sui fenomeni molecolari dello stato liquido e dello stato solido si trovano nella Parte 2ª.

Al fisico russo Umow si deve (secondo gli Autori) il concetto di corrente di energia (che gli Autori occidentali attribuiscono a Poynting e ad Heaviside) nella Parte 3ª, e precisamente in Acustica, viene illustrato codesto concetto.

La Parte 2ª occupa quasi la metà del volume. I Cap. VII, VIII, IX, X sono dedicati rispettivamente alle proprietà dei gas, ai fondamenti della Termodinamica, ai fenomeni molecolari nei liquidi, alle proprietà molecolari dei corpi solidi (struttura cristallina e materia amorfa).

Lo studio dei gas reali, seguendo Van der Waals, è sviluppato più di quanto non si faccia ordinariamente.

Nella Parte 3ª gli Autori esprimono molto chiaramente i concetti fondamentali della teoria delle vibrazioni e delle onde, facendone una prima applicazione all'acustica.

Volume secondo.

Questo secondo volume del «Corso di Fisica generale» è dedicato allo studio dei fenomeni elettrici e magnetici. È diviso in tre Parti dedicate la 1ª all'Elettrostatica, la 2ª alle correnti elettriche continue, la 3ª al campo elettromagnetico. Qui ancora in maggior misura che nel volume primo viene posta in rilievo l'opera dei ricercatori russi. Gli Autori non esitano a dichiarare che la potenza sovietica e costituita dal comunismo più l'elettrificazione dell'intero territorio russo. Al progresso delle conoscenze nel dominio dei fenomeni elettrici e magnetici i russi hanno contribuito notevolmente.

Già il Lomonossow nel 1753 ha sostenuto quasi precorrendo le teorie del sec. XIX del campo che l'elettricità fosse un moto rotatorio estremamente rapido delle particelle di etere.

Lo stesso anno l'Accademia delle Scienze di Pietroburgo promosse un concorso internazionale sul tema « La natura delle forze elettriche ».

Il premio fu vinto da Euler nel 1755: Euler spiegò l'interazione tra particelle elettricamente cariche mediante fenomeni di tensione dell'etere. Questa concezione euleriana precede dunque la teoria di Faraday-Maxwell ed ha in comune con questa la veduta opposta a quella delle azioni a distanza secondo cui il mezzo ambiente ha un ruolo nell'interpretazione dei fenomeni elettrici.

Gli Autori seguono Lenin nell'interpretazione della natura del campo elettrico e dell'elettrone. Essi considerano il campo elettromagnetico come una particolare forma di materia, avente proprietà diverse da quelle a noi conosciute della materia meccanica Differisce da questa perchè non può servire come sistema di riferimento. Mentre la complessa natura dell'elettrone e una delle più brillanti conferme della dichiarazione del materialismo dialettico secondo cui l'universo, esistente oggettivamente è di una molteplicità inesauribile. L'elettrone è altrettanto inesauribile quanto l'atomo (Lenin).

Al fisico russo Lenz è attribuita, oltre la legge nota col suo nome nell'interpretazione del fenomeno dell'induzione elettromagnetica, anche la scoperta della legge dell'effetto termico della corrente, fatta contemporaneamente da Joule.

Interessante è l'indicazione di un effetto elettrico scoperto dai fisici russi L. I. Mandelstam e N. D. Papalexi negli anni 1913-14, consistente nella creazione di una corrente elettrica in un conduttore in moto accelerato. Ponendo in rapida rotazione intorno all'asse di simmetria un solenoide con molte spire ai cui estremi venga inserito un telefono, si avverte un tono in conseguenza della corrente generata nel solenoide.

Le ricerche dei fisici russi intorno al ferromagnetismo e alla superconduzione sono state indicate ai luoghi opportuni.

La dipendenza della massa dalla velocità dà lo spunto agli Autori, ancora una volta, per criticare il pensiero dei fisici borghesi.

Secondo questi, codesta variabilità sarebbe una prova della dottrina secondo cui la materia in qualche modo scompare. Invece nel pensiero dei fisici sovietici la proprietà è una conferma delle dichiarazioni del materialismo dialettico.

Interessanti sono le considerazioni che si trovano sulla conducibilità elettrolitica dei corpi solidi al § 174. Vi sono esposti i fondamenti della teoria dei fisici sovietici N. N. Semenow e W. A. Fock.

I nomi di Stoletow, Popow, Lebedew sono associati alle ricerche intorno all'effetto fotoelettrico, alla radiotelegrafia, alla pressione di radiazione; numerosi altri nomi di ricercatori russi e sovietici vengono citati nel dominio dell'elettrotecnica. Così ad es. l'arco elettrico e la lampadina elettrica vengono attribuiti a P. N. Jablotschkow e ad A. N. Lodygin (1874).

Volume terzo.

Questo terzo ed ultimo volume del Corso di fisica generale di Frisch e Timorewa è diviso in due Parti, la prima dedicata all'ottica, (più di 350 pagine), la seconda alla fisica atomica (circa 200 pagine).

A Lomonossow gli Autori attribuiscono l'adesione alla teoria ondulatoria della luce. Nell'anno 1753 quel ricercatore espresse la speranza che attraverso esperienze sulle oscillazioni di una corda nel vuoto si potesse stabilire che queste danno luogo ad emissione di luce. Sebbene i risultati siano stati negativi, codeste esperienze hanno un significato storico perchè tendenti a dare una dimostrazione diretta della teoria ondulatoria della luce. Il Lomonossow in una conferenza tenuta nel 1756 all'Accademia delle Scienze sull'origine della luce e su di una nuova teoria dei colori criticò la teoria corpuscolare della luce.

Gli Autori, seguendo Lenin, affermano che la luce è una realtà oggettiva, esistente al di fuori della nostra coscienza, ed è dunque una forma concreta di materia.

Le ricerche dei fisici russi e sovietici nel dominio dell'ottica sono inquadrate nei luoghi opportuni. Per es. sono interessanti le ricerche di Wawilow intorno alla fluttuazione di deboli correnti luminose in appoggio alla teoria della luce di Einstein.

I principi fondamentali della teoria della relatività di Einstein sono esposti nella parte dedicata all'ottica.

A pag. 163 si legge: È da osservare che Einstein, come anche altri fisici borghesi, interpretano falsamente la teoria della relatività, poichè essi legano il suo contenuto ad una filosofia idealistica relativistica. Il vero contenuto della teoria della relatività sta nello stabilire leggi oggettive di natura, mediante le quali vengono determinate le formule per il passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, quando l'un sistema si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto all'altro.

L'ultima parte del Corso è dedicata alla fisica atomica. Gli Autori citano i più importanti lavori dei fisici sovietici in questo grande ramo della fisica moderna. Naturalmente non mancano anche qui i riferimenti alla filosofia materialistico-dialettica. Essi dichiarano che da una comunicazione dell'agenzia Tass del 5-9-1949 risulta che l'Unione sovietica conosceva già dal 1947 « il mistero dell'arma atomica ».

Il Corso termina con un'esposizione delle ricerche intorno alla radiazione cosmica.

Non può essere passato sotto silenzio il commento degli Autori all'interpretazione che generalmente viene data dai fisici dell'Occidente del principio di indeterminazione di Heisenberg.

Gli Autori confutano la veduta degli idealisti secondo cui l'Universo non sarebbe riconoscibile a causa dell'impossibilità di determinare esattamente simultaneamente la posizione e l'impulso di una particella. Invece un'analisi scientifica delle relazioni di E. Heisenberg non limita la possibilità di riconoscere le proprietà oggettive delle particelle. Esse costituiscono solo una misura per l'applicabilità del modello classico alla descrizione del microcosmo.

Tutti i fenomeni microfisici si svolgono nello spazio e nel tempo ma diversamente dai fenomeni macrofisici. La fisica del microcosmo (fisica quantitativa) è caratterizzata da ciò che essa ricerca le proprietà degli oggetti dell'osservazione sotto le specifiche condizioni dell'interazione col mondo circostante.

Questo fatto è un esempio per il principio fondamentale del materialismo dialettico intorno alle relazioni generali e alle interazioni di tutti i fenomeni della natura. Non deve far meraviglia che le concezioni intuitive che sono nate in noi attraverso l'esperienza del mondo macroscopico non possono essere trasportate nel microcosmo.

GIOVANNI LAMPARIELLO

W. SCHMEIDLER, *Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum*, T. G. Teubner Verlagsgesellschaft (Stuttgart, 1954), pp. VI + 89.

Questo volumetto fornisce un'ottima guida per il discente che voglia acquistare le prime nozioni di analisi funzionale. Esso dà, con una esposizione breve e chiara, le nozioni fondamentali relative allo spazio hilbertiano, agli operatori lineari in esso definiti, alla teoria spettrale degli operatori hermitiani limitati e non limitati. Complementi vari opportunamente chiariscono il significato delle teorie svolte, ne indicano alcune delle più notevoli estensioni e accennano altresì a qualche importante applicazione (calcolo delle probabilità, reticoli cristallini, meccanica quantica).

GIANFRANCO CIMMINO

J. FAVARD, *Cours de géométrie différentielle locale*. Paris, Gauthier-Villars, 1957 - pp. VIII + 553.

È ben noto a chiunque abbia anche un minimo di esperienza d'insegnamento della matematica nelle nostre università quali difficoltà si incontrino nell'esporre agli studenti appena usciti dal primo biennio un corso superiore con qualche pretesa di modernità: si è costretti invero a cominciare col presentare nozioni di carattere generale, eventualmente comuni a diverse discipline, col risultato di giungere alla fine dell'anno accademico senza che si siano potute presentare le cose più interessanti. Tanto più questo è vero per la Geometria Differenziale — specialmente globale — la quale, oramai, presuppone nozioni anche profonde di Topologia e Algebra. Un lungo discorso sui possibili mezzi per superare tali inconvenienti ci porterebbe troppo lontano: quello che però è certo che essi non sono affatto una prerogativa dell'insegnamento universitario italiano; anche un paese come la Francia, dove pure gli studi di geometria differenziale hanno avuto anche recentemente uno sviluppo così largo, non pare esserne esente, e una prova ne è data dall'opera in esame.

Con essa, infatti, l'A. — come egli stesso afferma nella prefazione — ha voluto « devant la crise que traverse l'enseignement fondamental des mathématiques » apportare il suo contributo « à l'oeuvre de rajustement de l'enseignement à la recherche », cominciando precisamente dalla geometria differenziale. E a tale scopo, J. Favard ha voluto scrivere un'opera di transizione che, pur non abolendo gli argomenti tradizionali della nostra disciplina, permetta allo studente — cui il libro è destinato — di accostarsi senza troppa difficoltà ad opere scritte con altro stile.

Il compito che l'Autore si era prefissato era certamente molto arduo: il libro, di più di 500 pagine, e ricco di cose interessanti — pur non contenendo nulla di essenzialmente nuovo — esposte con eleganza e — in generale — con chiarezza [benchè al recensore qualche aspetto della teoria del « paramétrage » non sia riuscito limpidissimo], e non suppone a chi legge conoscenze superiori a quelle impartite anche nei nostri corsi di Geometria Analitica e Analisi; a partire da queste si perviene a nozioni abbastanza elevate di topologia e di geometria differenziale (p. es., è forse la prima volta che in un corso introduttivo appare uno studio abbastanza profondo della teoria delle connessioni e dei trasporti). Ci pare tuttavia che l'A. abbia preso un po' troppo alla lettera l'aggettivo « locale », soprattutto nelle tre parti successive all'introduzione: in questa, come del resto diremo meglio più sotto, sono esposte nozioni generali di topologia, necessarie all'A. per giungere alla definizione di varietà differenziabile, nozione questa che ormai non si può più ignorare: in tutto il resto del volume, però, non si studia in sostanza che una sola carta di un atlante ricoprente la varietà: ne segue che al lettore, specie se inesperto, può restare qualche dubbio sulla portata e sulla necessità delle definizioni più generali: ci sembra che non sarebbe stato inopportuno qualche esempio atto a chiarire: per es. come si possa definire un campo di tensori su tutta una varietà differenziabile, assegnata mediante un atlante.

Ma veniamo ora a un'analisi più dettagliata del contenuto del volume, dalla quale chi legge potrà rendersi conto dei limiti dell'opera. Questa è divisa in un'introduzione e in tre parti, che passeremo successivamente in rassegna.

L'introduzione è suddivisa a sua volta in tre capitoli. Il primo di questi contiene anzitutto le principali nozioni topologiche necessarie alla geometria differenziale: spazi topologici (definiti con gli aperti), sottospazi, funzioni continue, omeomorfismi, spazi metrici, completi, nozione di compattezza, di connessione, fino a giungere alle varietà differenziabili; seguono alcune generalità sui gruppi, in particolare sui gruppi topologici e di Lie, e lo studio dei gruppi dei movimenti e dei gruppi affine e proiettivo. Si considera poi il gruppo della geometria differenziale diretta, cioè il gruppo delle trasformazioni $x'^h = \varphi^h(x^1, \dots, x^n)$ di classe almeno C^1, biunivocamente invertibili nell'intorno di un punto. A partire da tale gruppo si introduce lo spazio tangente in un punto a una varietà differenziabile, come lo spazio dei differenziali.

Il capitolo successivo è dedicato all'algebra tensoriale: si definiscono prima i vettori contro- e covarianti in uno spazio centro-affine C^n, e poi i tensori (affini) mediante il prodotto tensoriale di due o più copie di C^n e del suo duale C^{*n}. Si studiano poi i tensori emisimmetrici covarianti (forme esterne), e i tensori euclidei, definiti a partire da un tensore doppio simmetrico o, ciò che è lo stesso, definiti non più in uno spazio centro-affine, ma in uno centro-euclideo, nel quale ossia si considerino le rotazioni attorno all'origine.

Passiamo al Cap. III, nel quale troviamo anzitutto le nozioni, essenziali per il seguito, sul calcolo esterno, fino ai teoremi di Cartan-Frobenius, che si applicano poi nei nn. seguenti, ove viene trattata la parte più importante della teoria dei gruppi di Lie, seguendo la linea di E. Cartan nel suo classico trattato « La théorie des groupes finis et la géométrie différentielle traitée par la méthode du repére mobile ». Il capitolo si conclude poi con lo studio del metodo del riferimento mobile, che sarà sistematicamente applicato nelle parti successive.

A questa introduzione, che occupa circa 170 pagine (approssimativamente un terzo dell'intero volume) segue una prima parte, dedicata alla « Geometria differenziale diretta » che è molto vicina a ciò che E. Bompiani ha denominato « topologia differenziale »: si studiano invero le proprietà di una varietà differenziabile la quale non sia dotata di alcuna struttura particolare (p. es. di varietà riemanniana, o di spazio a connessione, ecc.). Questa parte è divisa in tre capitoli, il primo dei quali è dedicato allo studio delle varietà immerse, e alla ricerca di parametri « adeguati ». Il cap. II si occupa invece della « teoria dei contatti », ossia dello studio degli elementi differenziali e delle calotte: il linguaggio usato è quello dello spazio euclideo a due o tre dimensioni, ma è ben messo in luce il fatto che gli argomenti trattati appartengono in realtà alla topologia: lo stesso si può dire del capitolo terzo, nel quale è esposta con chiarezza e rigore, come non sempre si trova in libri di geometria, la teoria degli inviluppi pel caso delle famiglie semplicemente infinite di curve piane, delle famiglie ∞^1 o ∞^2 di superficie, e, infine si espone la teoria delle congruenze di curve in E^3 Infine, il cap. IV tratta delle trasformazioni di contatto, un argomento spesso, e a torto, trascurato.

E veniamo alla p. III: Geometrie classiche, nella quale si presentano successivamente la geometria euclidea delle curve e superficie, la geometria affine unimodulare e la geometria proiettiva, sempre per le due e tre dimensioni. Su questa parte non c'è molto da dire: essa non si distacca, invero, dalle trattazioni classiche francesi, ed è svolta sempre col metodo del riferimento mobile che, del resto, superate le iniziali difficoltà, presenta notevolissimi vantaggi di brevità e chiarezza, che non sempre si riscontrano in altri metodi. D'altra parte in diversi punti è indicato come dal metodo di E. Cartan si passi agli altri. Maggior sviluppo è dato alla geometria euclidea, della quale si sono soppressi alcuni lunghi sviluppi, p. es. sulle asintotiche e sulle linee di curvatura, che appaiono al Favard — e al recensore — ormai sorpassati. È poi particolarmente notevole uno studio approfondito del trasporto parallelo (con qualche cenno di calcolo tensoriale) su una superficie di E^3 euclideo, studio che viene ripreso ed esteso nella p. IV.

Questa è dedicata alla teoria dei trasporti e delle connessioni, ed e la più interessante, giacché — come già si è detto — è forse la prima volta che tali argomenti vengono presentati in un libro per studenti.

L'impostazione è sostanzialmente quella dovuta a E. Cartan, basata sull'idea di sviluppo, ma è data in forma più generale di quella usuale, anche se ai casi classici sono poi limitati gli sviluppi successivi, dai quali il lettore può poi passare a casi più complicati. La definizione dell'A. parte infatti da uno spazio fibrato, di base una varietà differenziabile V, e le cui fibre sono pure varietà differenziabili $F(m)$ $(m \varepsilon V)$, omeomorfe a una fibra standard F, su cui agisce un gruppo G di Lie: le trasformazioni in $F(m)$ sono poi definite a partire da un riferimento $R(m)$; siano ora: m_0 un punto fisso di V, ed m un punto variabile, Γ una curva — differenziabile a tratti — di V che congiunge m ad m_0: diamo una trasformazione $\theta(m_0, \Gamma)$ che fa corrispondere a $R(m)$ un riferimento $TR(m_0)$ di $F(m_0)$ dedotto da $R(m_0)$ per una trasformazione $T(m_0, \Gamma)$ del gruppo $G(m)$ operante su $F(m)$. Si ha così una legge di connessione che trasporta la geometria di $F(m_0)$ nella geometria di $F(m)$. Si aggiungono poi ipotesi di differenziabilità per ragioni di comodità. È subito visto che se lo spazio fibrato è il fibrato tangenziale di $V[F(m)$ è lo spazio tangente a V in $m]$ e G è un gruppo di collineazioni, si hanno le varietà a connessione affine, proiettiva, metrica (non necessariamente lineari). Poichè anche questa definizione — che ci sembra veramente ottima, specie sotto l'aspetto didattico — appare troppo generale, l'A. si limita alle connessioni lineari (escludendo quindi gli spazi di Finsler e quelli di Kawaguchi che, come osserva argutamente l'A. nella prefazione, sono ancora in rodaggio). Queste vengono studiate essenzialmente con i metodi di E. Cartan; ma è sempre mostrato il modo di trattare le questioni anche con il calcolo tensoriale.

Questa parte è divisa in due capitoli: il primo è sugli spazi a connessione affine, e si studiano i tensori di curvatura e torsione, le autoparallele, e si dà qualche cenno sul gruppo di olonomia e sulle connessioni proiettive, nonchè sugli spazi riducibili. Il cap. II contiene invece i fondamenti della geometria degli spazi di Riemann; la connessione di Levi-Civita appare qui come connessione affine metrica e senza torsione. Il capitolo è diviso in otto paragrafi dedicati alle formule fondamentali, geodetiche, curvatura secondo una faccetta piana (spazi a curvatura costante), tensore di curvatura conforme, movimenti (equazioni di Killing), spazi riducibili, teoria delle curve, varietà immerse.

Il volume, che è corredato da numerosi esercizi, in alcuni dei quali sono svolte o accennate teorie lasciate in ombra nel testo, per non appesantirlo troppo, si legge volentieri e con notevole interesse: si vede il lodevole intento dell'A. di avvicinare il giovane non ancora esperto alle teorie astratte più moderne, senza peraltro perdere di vista lo sviluppo storico delle idee: p. es. quella del parallelismo, che troppo spesso viene oggi — al pari di altre — fatta cadere dal cielo, mentre ha avuto un'origine ben concreta: e chi scrive dubita — per restare nell'esempio fatto — che la moderna teoria delle connessioni, quale ad esempio è sviluppata nel bel libro di A. Lichnerowicz « Théorie globale des connexions, etc. » avrebbe potuto nascere senza i lavori di Levi-Civita, che, forse, mancano del perfetto rigore delle moderne definizioni, ma riflettono una visione geometrica dei problemi.

E concludo con le parole stesse con le quali J. Favard termina la prefazione:

« ..., mon but sera atteint si je réussis à faire naître chez le lecteur un « sentiment d'insatisfaction, à lui donner une impression d'inachevé, éveil- « lant, du même coup, et son intérêt et sa curiosité ».

VITTORIO DALLA VOLTA

KURT REIDEMEISTER, *Raum und Zahl.* Springer Verlag, Berlin, 1957; pp. VII + 151, 31 fig., D.M. 19, 80.

Questo libro riunisce, in un gruppo invero non sempre omogeneo, l'esame di alcune questioni riguardanti i fondamenti della Geometria e dell'Algebra, al fine di illustrare le relazioni fra pensiero matematico e riflessione critica (Gedanken über das Denken), e fra intuizione (Anschauung) e pensiero. L'A. mira a confutare l'opinione secondo cui la nuova matematica trascura la intuizione come sorgente della conoscenza matematica e la « leggenda », che sembra trovare credito soprattutto fra i non matematici con inclinazioni filosofiche, secondo cui il pensiero matematico moderno è essenzialmente diverso dall'antico.

I capitoli I (Vom Ursprung des geometrischen Denken) e III (Analytische Geometrie) sono dedicati alla presentazione assiomatica della Geometria secondo il consueto indirizzo moderno. Nel Cap. I si esamina più particolarmente la geometria euclidea piana, mentre nel Cap. III, dopo aver sommariamente discusso le proprietà e le relazioni delle geometrie euclidea, affine e proiettiva ed aver illustrato un esempio di geometria non euclidea, l'A. passa alla confutazione delle tre tesi, sulle quali Kant fondò la cosiddetta deduzione trascendentale della intuizione a priori. Esse sono: 1) i giudizi della Geometria sono apodittici; 2) i giudizi della Geometria sono sintetici; 3) i giudizi della Geometria valgono nello spazio dei sensi e della realtà effettuate (Wirklichkeit); ove con Geometria si intende la geometria euclidea. In accordo con la concezione della Geometria esposta e fondandosi sulla convinzione che la mutata concezione dello spazio, seguita alla moderna visione della scienza, non fornisca più alcun appoggio alla teoria della conoscenza di Kant, l'A. contrappone alle tre tesi di Kant le seguenti: 1) i giudizi della Geometria, per quanto si riferiscono allo spazio della realtà effettuale, non sono apodittici e possono essere fondati soltanto mediante l'esperienza; 2) i giudizi della Geometria, come teoremi di pura matematica, non sono sintetici; 3) lo spazio delle percezioni e lo spazio della Fisica non coincidono. Queste tesi tolgono contemporaneamente fondamento alla deduzione trascendentale della affermazione, che lo spazio delle percezioni sia a priori uno spazio euclideo (p. 52).

Anche il Cap. IV (Über den Unterschied der Gegenden im Raum) è dedicato alla confutazione di una tesi di Kant sulla esistenza dello spazio assoluto, secondo cui deve essere ascritta realtà allo spazio, in quanto capace di conferire proprietà reali agli oggetti. La falsità della tesi di Kant è dovuta, secondo l'A. al fatto che la ontologia adottata da Kant è in contraddizione con certi fatti geometrici e ciò perchè in essa è riconosciuto come vero che tutte le relazioni fra oggetti si possono ricondurre a proprietà di oggetti. Seguendo Leibniz, l'A. afferma invece che tutte le proprietà geometriche degli oggetti derivano dalle posizioni delle parti degli oggetti stessi.

Dei rapporti fra intuizione e pensiero si occupa il Cap. V (Anschauung und Begriff), in cui trova posto anche un paragrafo sulla topologia combinatoria, mentre nel Cap. VI (Geometrie und Logik) si prosegue la costruzione assiomatica della Geometria, affrontando fra l'altro la questione della possibilità di portare la Geometria allo stesso grado di astrazione dell'algebra dei corpi e ciò che questa possibilità significhi per la Geometria.

La istituzione di calcolo infinitesimale elaborata nel Cap. VII (Eine Begründung der Infinitesimalrechnung) è costruita su di un corpo astratto ordinato di numeri, che si suppone contenga i numeri razionali. La integrabilità delle funzioni continue deve essere introdotta come ipotesi assiomatica, per ottenere il teorema fondamentale del calcolo integrale. La presentazione propugnata dall'A., peraltro non priva di oscurità, ha per scopo dichiarato di separare il calcolo infinitesimale dal campo in cui è essenziale la operazione di limite per le successioni, rendendolo indipendente dalla « problematica definizione del campo dei numeri reali » (p. 116).

Come la teoria dei numeri algebrici fornisca condizioni necessarie e sufficienti per la costruibilità delle figure con riga e compasso, è mostrato nel Cap. IX (Geometrie und Zahlentheorie). Ogni problema di costruibilità è tradotto in un corrispondente problema di teoria dei numeri. Si prova così la irresolubilità di alcuni celebri problemi di costruibilità con riga e compasso posti dalla antichità.

Il libro si chiude con il Cap. X (Prolegomena einer kritischen Philosophie), in cui si stabilisce un confronto fra le posizioni del positivismo e dell'esistenzialismo riguardo al problema della conoscenza e si riafferma la unità inscindibile del pensiero analitico critico e del rigoroso pensiero matematico.

L'opera si presenta come si vede, piuttosto frammentaria; non appare poi chiaramente quali siano in essa le funzioni del Cap. II (Über Mechanismen), dedicato alla descrizione di strumenti per la trisezione dell'angolo, e del Cap. VIII (Carl Friedrich Gauss). Sarebbe stato utile poi, che la trattazione fosse stata corredata di una essenziale bibliografia.

LAMBERTO CATTABRIGA