Wilhelm Blaschke

Sulle geodetiche chiuse.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.2, p. 240–247.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_240_0>

Sulle geodetiche chiuse.

di Wilhelm Blaschke (*)

Sunto. - *Si espongono i principali risultati sul problema delle geodetiche chiuse.*

Summary. - *Fundamental results on the problem of closed geodesics are exposed.*

1. Per le geodetiche di una superficie S si dànno diverse definizioni fino ad un certo punto equivalenti tra loro.

I) *Le linee geodetiche realizzano sulla* S *la via più breve tra due punti.*

Sotto questo punto di vista il problema fu affrontato per la prima volta nel 1687 da Giovanni I. Bernoulli e diede inizio alla geometria differenziale ed al calcolo delle variazioni.

II) *Si consideri una striscia limitata da due rette parallele, per es. una striscia sottile di carta, formata pertanto da un materiale flessibile ma non estendibile. Applicando la striscia sulla superficie* S *essa ne realizza una geodetica.*

III) *La posizione di equilibrio di un filo pieghevole e mobile sulla* S, *disteso fra due suoi punti, è una geodetica.*

IV) *Un punto materiale mobile sulla superficie* S *liscia, senza azione di forze esterne, descrive una geodetica di* S.

Ne segue, come equazione del moto

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=\vec{N}. \tag{1}$$

Essendo la superficie S liscia, la pressione $\vec{N}$ della S sul punto è normale alla S. D'altra parte il vettore accelerazione giace nel piano osculatore della traiettoria descritta dal punto; e dalla (1) segue pertanto:

V) *Le geodetiche* G *della* S *godono della proprietà che il piano osculatore in ogni punto* P *della* G *contiene la normale alla* S *in* P.

(*) Conferenze tenute l'11 e il 12 aprile 1958 all'Istituto Matematico di Firenze, per il I Gruppo di Seminari ed Istituti Matematici Italiani.

Se si indicano con u^1, u^2 coordinate curvilinee sulla S e

$$ds^2 = G_{jk} du^j du^k \tag{2}$$

rappresenta la metrica di S, dalla (2) si calcolano i simboli Γ di CHRISTOFFEL. Dalla proprietà V seguono allora le equazioni differenziali delle geodetiche:

$$\frac{du^j}{ds^2} + \Gamma^j_{kl} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0. \tag{3}$$

Considerando un vettore $\vec{v}$ lungo una curva C della S si definisce il *parallelismo* (ovvero il *trasporto*) di $\vec{v}$ lungo la C, secondo LORD KELVIN e LEVI CIVITA, mediante le condizioni

$$\frac{dv^j}{ds} + \Gamma^j_{kl} v^k \frac{du^l}{ds} = 0. \tag{4}$$

Dal confronto di (3) e (4) segue:

VI) *Le tangenti ad una geodetica* G *sono parallele tra di loro lungo la* G.

Per es. dalla (3) si ha che, per un elemento lineare di S (cioè per un punto con direzione prescritta), passa una sola geodetica. Sia ora C una curva sulla S e P_1, P_2 due punti vicini della C con le geodetiche C_j tangenti a C in P_j, sia poi s la distanza dei punti P_j misurata sulla C, e τ l'angolo delle G_j; allora

$$\lim_{P_j \to P} \frac{\tau}{s} = g \tag{5}$$

definisce la *curvatura geodetica* della C in P.
Le geodetiche hanno dunque la curvatura geodetica

$$g = 0. \tag{6}$$

Le proprietà enunciate caratterizzano le geodetiche, e sono tra di loro equivalenti se si tiene conto di due restrizioni: In primo luogo si tratta di *proprietà locali*, che valgono cioè per regioni abbastanza ristrette della S. In secondo luogo è necessario supporre una certa *regolarità* della superficie S.

2. Passiamo ora a considerare *proprietà globali* delle geodetiche.

Sia G una geodetica orientata della superficie S e P un punto di G. Se le geodetiche passanti per P e vicine alla G ammettono un inviluppo I, e se P' è il primo punto di contatto (dopo P) della geodetica G con I, P' si chiama il *punto coniugato* di P. L'equazione di JACOBI (1836)

$$\frac{d^2t}{ds^2} + K(s)t = 0, \tag{7}$$

nella quale K rappresenta la curvatura di GAUSS nel punto s di G, definisce i punti coniugati nella maniera seguente: Se t è una soluzione della (7) con $t = 0$ in P. il successivo zero della t ci dà il punto P'.

Come esempio si prenda come superficie S la *sfera*. In tal caso il punto coniugato di un punto P di S è quello diametralmente opposto a P, indipendentemente dalla direzione della geodetica che passa per P.

Ne segue un problema che finora non è stato risolto:

Sia S un ovaloide, cioè una superficie convessa e chiusa abbastanza regolare. Chiameremo *opposti* due punti P_1, P_2 di S quando ogni geodetica passante per uno di essi passa necessariamente anche per l'altro. Il problema che si pone è il seguente: *È la sfera l'unico ovaloide che presenti una involuzione* $P_1 <\!\!-\!\!> P_2$ *di punti opposti?*

Si può dimostrare che la relazione $P_1 <\!\!-\!\!> P_2$ e isometrica e che l'ovaloide ha necessariamente un centro.

Nel 1923 P. FUNK [4] ha provato che non è possibile deformare la sfera conservando la proprietà dei punti opposti. C. CARATHEODORY [2] è riuscito a determinare delle superficie di LIOUVILLE, tali cioè che si abbia

$$ds^2 = (U(u) + V(v))(du^2 + dv^2), \tag{8}$$

contenenti coppie di punti opposti.

Lo stesso eminente geometra fece anche la congettura che ogni ovaloide debba contenere almeno una coppia di punti opposti. Per esempio su un ovaloide di rotazione, od anche su un ellissoide, la congettura si verifica, perchè si sa che ogni geodetica passante per un ombelico dell'ellissoide passa necessariamente anche per l'ombelico diametralmente opposto. Sembra però che in generale la congettura non sia vera. Difatti:

Sia S un ovaloide degenere in un ovale doppiamente coperto. Le geodetiche sulla S sono allora rette riflesse al contorno C di S. Si vede immediatamente che: condizione necessaria per l'esistenza di una coppia di punti opposti (punti focali) è che sia C un ellisse.

Supponiamo adesso che S sia un ovaloide di rotazione, e sia A il suo asse. L'equazione delle geodetiche si riduce in tal caso a

$$r \operatorname{sen} \omega = \text{cost.}\,, \tag{9}$$

ove r è la distanza del punto P della geodetica G dall'asse A, ed ω l'angolo della tangente alla G in P col piano che congiunge P con A. La (9) è una conseguenza immediata della definizione meccanica della G.

Mediante la (9) G. DARBOUX [3] è riuscito a determinare gli *ovaloidi di rotazione con tutte le geodetiche chiuse.* Sia M un meridiano della S, cioè l'intersezione della S con un piano E che contenga A. Perchè si verifichi la proprietà enunciata basta allora l'esistenza di un cerchio Z nel piano E, tale che la somma degli archi di M intercetti da due rette parallele all'asse A sia eguale alla somma dei corrispondenti archi intercetti sul cerchio Z.

Nel 1921 il mio amico G. THOMSEN [10] ha esteso questa bella costruzione a certe superficie non di rotazione. P. FUNK [5] ha poi determinato, mediante un'equazione integrale, le superficie a coppie di punti opposti infinitamente vicine alla sfera.

3. Darò adesso un ragionamento sintetico che giustifica *l'esistenza di una geodetica chiusa senza punti doppi di lunghezza minima* L_0 *su ogni ovaloide.*

Prendiamo un filo chiuso F formato da uno spago pieghevole ma non estendibile di lunghezza L. Se L è abbastanza grande rispetto al diametro D di S, sarà possibile far passare S attraverso l'anello F; mentre ciò non è certamente possibile se L è sufficientemente piccola. Ciò lascia prevedere l'esistenza di una lunghezza minima L_0 degli anelli attraversabili da S. Inoltre per questo anello minimo avremo una posizione critica sopra la superficie S formante la geodetica cercata.

È però difficile dedurre da un tale ragionamento una dimostrazione rigorosa.

Relativamente al problema dell'esistenza di una geodetica chiusa di lunghezza minima L_0 si ha un bel teorema dovuto al matematico russo POGORELOF [8]: *Se la curvatura di Gauss in ogni punto dell'ovaloide* S *soddisfa la condizione* $K \leqq 1$, *si ha* $L_0 \geqq 2\pi$.

Recentemente l'amico W. KLINGENBERG è riuscito ad estendere questa disuguaglianza a spazi compatti di RIEMANN.

Diamo ora un cenno di una *dimostrazione rigorosa dell'esistenza di una geodetica chiusa senza punti doppi su ogni ovaloide,* dovuta a H. POINCARÈ (1905) [9].

Mediante la formula di GAUSS - BONNET si trasforma il problema in uno isoperimetrico. Questa formula dà una connessione tra la «curvatura totale» d'una regione R semplicemente connessa della S e la «curvatura totale geodetica» del contorno C orientato della R:

$$\int_R K dR + \int_C g ds = 2\pi. \tag{10}$$

Nel caso di una geodetica chiusa C abbiamo $g = 0$, e perciò

$$\int_R K dR = 2\pi. \tag{11}$$

Essendo dR l'elemento d'area di R e dR' l'elemento corrispondente d'area della rappresentazione sferica S' di S, la (11) esprime che

$$\int_R dR' = 2\pi, \qquad K = \frac{dS'}{dS}, \tag{12}$$

cioè l'immagine sferica C' di C divide la sfera S' in due parti, R' e $S' - R'$, della stessa area 2π.

Viceversa, mediante i metodi del calcolo delle variazioni, si dimostra: Fra tutte le curve chiuse C di S, tali che l'immagine sferica C' di C divida la sfera in due parti uguali, la più corta è una geodetica. L'esistenza del minimo in questo problema isoperimetrico si dimostra mediante i metodi della scuola di D. HILBERT.

Studiando un po' da vicino questo ragionamento si riconosce *l'esistenza di tre geodetiche chiuse sulla* S. Basta aggiungere ad ogni curva chiusa C della S l'integrale vettoriale

$$\vec{v} = \int_C [\vec{x}, d\vec{x}] \tag{13}$$

e cercare in primo luogo tra le curve C con direzione prescritta $\vec{v}$ quella di lunghezza L minima. Considerando poi a partire dall'origine O nella direzione $\vec{v}$ questa lunghezza $L = \overline{OP}$, al variare di $\vec{v}$ il punto P descrive una superficie (P) col centro in O.

Sulla (P) si trova una coppia di punti diametrali corrispondenti ad una lunghezza massima L, un'altra coppia di punti corrispondenti ad un valore minimo di L, ed infine una terza con valore massi-minimo di L. Queste tre coppie corrispondono ad altrettante geodetiche chiuse senza punti doppi sulla S.

Ma vi è di più. Se invece della (13) s'impone la condizione

$$\int_R K dR = 2\pi n; \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{14}$$

si riconosce l'esistenza di geodetiche chiuse con punti doppi sulla S. Ovviamente queste possono coincidere colle geodetiche corrispondenti al caso $n = 1$ (più volte percorse), come si vede sulla sfera.

Questo metodo si estende anche ai casi di una superficie chiusa S (orientabile o non orientabile) di genere superiore.

4. Abbandoniamo ora lo studio delle geodetiche chiuse per trattare di un' altra questione globale sulle geodetiche.

Ovviamente lo studio delle geodetiche su una superficie S dipende unicamente dalla metrica interna (2) della S e non dalla realizzazione della S nello spazio ambiente.

Questo studio interno delle superficie fu iniziato da Gauss e generalizzato da Riemann.

Consideriamo prima il caso semplice di una metrica euclidea

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{15}$$

e chiudiamo questa superficie S considerando le coordinate x, y soltanto modulo 1. Allora ogni equazione lineare

$$y = ax + b \tag{16}$$

rappresenta una geodetica della S. Essa sarà chiusa per ogni valore razionale di a. Per a irrazionale la geodetica approssima arbitrariamente ogni punto di S [11].

In secondo luogo consideriamo una metrica iperbolica nel semipiano di Poincaré $y > 0$ del piano della variabile complessa $z = x + iy$, ponendo

$$ds = \frac{|dz|}{y}. \tag{17}$$

Definiamo inoltre equivalenti due punti z, z^* del semipiano se z^* si ottiene da z mediante una sostituzione lineare

$$z^* = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = +1, \tag{18}$$

dove a, b, c. d, sono numeri interi. Questo *gruppo modulare* (18) si genera mediante le due sostituzioni

$$z^* = z + 1, \qquad z^* = -1/z. \tag{19}$$

Ne segue secondo Gauss che il «triangolo» R

$$|x| \leqq 1/2, \qquad |z| \geqq 1 \tag{20}$$

è una regione fondamentale del gruppo (18), cioè ogni punto z nel semipiano $y > 0$ ha un punto equivalente z^* in R, e due punti di R sono equivalenti se e solo se sono sul contorno di R con $\bar{z} + z^* = 0$ $(\bar{z} = x - iy)$.

Le geodetiche del semipiano sono i semicerchi che tagliano ortogonalmente l'asse $y = 0$. Una tale geodetica, incontrando il contorno di R nel punto z, prosegue dal punto simmetrico $z^* = -\bar{z}$ con tangente parallela, cioè $dz = dz^*$.

Una geodetica si può fissare mediante le coordinate x, x' dei suoi punti sull'asse $y = 0$, e si vede abbastanza facilmente, mediante le (19), che basta limitarsi alle geodetiche con

$$1 < x, \qquad -1 < x' < 0. \tag{21}$$

Sviluppando ora x, x' in frazioni continue

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}\,, \qquad -x' = \cfrac{1}{a_{-1} + \cfrac{1}{a_{-2} + \ddots}} \tag{22}$$

con a_j numeri interi $\geqq 0$, ogni geodetica si può rappresentare mediante la « catena »

$$\dots a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2, \dots . \tag{23}$$

Ad ogni tale catena corrisponde una geodetica del nostro semipiano; viceversa le due trasformazioni: la « simmetria »

$$a_k^* = a_{-k-1}, \tag{24}$$

e la « traslazione »

$$a_k^* = a_{k+2n}, \tag{25}$$

della nostra catena (23) conducono ad una geodetica equivalente per il gruppo (18), come si dimostra mediante le (19).

Ne segue: Ogni catena periodica, cioè con

$$a_{k+m} = a_k, \tag{26}$$

rappresenta una geodetica chiusa.

D'altra parte: *Si può trovare una geodetica che approssima arbitrariamente ogni altra geodetica.* In primo luogo si dimostra che due catene a_k, a_k^* coincidenti in una subcatena abbastanza lunga

$$a_{k_1+m} = a_{k_2}; \qquad m = 1, 2, \dots, l \tag{27}$$

(con l sufficientemente grande), si avvicinano arbitrariamente. Basta allora costruire una catena (23) che contenga ogni subcatena finita. A questo scopo si ordinano le catene finite lessicograficamente, e, congiungendo queste, si ottiene la catena desiderata rappresentante la geodetica che approssima ogni altra.

Questo risultato, che è in connessione con un problema della fisica, è contenuto in un lavoro di E. ARTIN [1], iniziato da G. HERGLOTZ.

Sull'argomento di queste conferenze, da POINCARÉ in poi, molti matematici hanno portato il loro contributo, e specialmente in quest'ultimo periodo, matematici della scuola russa.

In questa breve esposizione sul problema delle geodetiche chiuse non ho potuto parlare di tutti i risultati ottenuti, ma desidero terminare ricordando ancora il contributo di A. D. BIRKHOFF, L. A. LUSTERNIK, F. LÖBELL, MARSTON MORSE, A. W. POGORELOF e H. WEYL. [6, 7, 8, 11].

BIBLIOGRAFIA

[1] E. ARTIN, *Ein mechaniches System mit quasiergodischen Bahnen*, «Hamb. Math. Abh.», 3 (1924), 170-177.

[2] C. CARATHEODORY, *Ueber Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien und konjugierten Gegenpunkten*, «Hamb. Math. Abh.», 4 (1926), 297-317. Cfr. anche *Ges. math. Schriften*, V, 3-21.

[3] G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, III (1894), p. 9.

[4] P. FUNK, *Ueber Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien*, «Math. Ann.», 74 (1913), 278-300.

[5] P. FUNK, *Ueber Flächen mit einem festen Abstand der konjugierten Punkte*, «Math. Zeitschr.», 16 (1923), 159-162.

[6] L. A. LUSTERNIK, *A new proof of the theorem about the three geodesics*, «C. R. (Dokladi) Acad. Sci. URSS (N. S.)», 41(1943), 3-4.

[7] MARSTON MORSE, cfr. W. BLASCHKE, *Einführung in die Differentialgeometrie*, Berlin (1950), p. 114.

[8] A. W. POGORELOF, *A theorem regarding geodesics on closed convex surfaces*, «Rec. Math. (Mat. Sbornik), N. S.», 18 (60) (1946), 181-183.

[9] H. POINCARÉ, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, «Trans. Am. math. Soc.», 6 (1905), 237-274. Cfr. anche Oeuvres, VI, 38-84.

[10] G. THOMSEN, cfr. W. BLASCHKE, *Vorlesungen ueber Differentialgeometrie*, I, Berlin (1930), p. 233.

[11] H. WEYL, *Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann., 77 (1916), 313-352. Cfr. anche Selecta, 11-147.