
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO VAONA

Sulla deformazione proiettiva delle trasformazioni puntuali di 1^a specie fra piani.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 13
(1958), n.2, p. 234–239.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_234_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_234_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla deformazione proiettiva delle trasformazioni puntuali di 1^a specie fra piani.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna)

Sunto. - *Si applicano alla teoria delle trasformazioni puntuali fra piani alcuni recenti risultati conseguiti nella teoria dell'applicabilità proiettiva dei tritessuti di curve piane*

Summary. - *Some recent results on the theory of projective applicability of three-web of plane curves are applied to the theory of punctual transformations.*

1. Introduzione.

In una recente ricerca ⁽¹⁾ sulla deformazione proiettiva dei tritessuti di curve piane ho ottenuto alcuni risultati dai quali conseguono delle applicazioni alla teoria delle trasformazioni puntuali di 1^a specie fra piani. Tali applicazioni costituiscono essenzialmente l'oggetto di questa Nota.

In particolare (nn. 3, 4) vengono qui determinate le trasformazioni puntuali di 1^a specie che ammettono ∞^h deformazioni proiettive per i valori $h = 4, 3, 2$. Vengono inoltre determinate le trasformazioni che ammettono la massima infinità (∞^3) di deformazioni proiettive in sè.

Nel n. 5 viene assegnato un significato geometrico dell'elemento lineare proiettivo di una trasformazione di 1^a specie fra piani, recentemente introdotto da M. VILLA e L. MURACCHINI ⁽²⁾.

2. Deformazione proiettiva di un tritessuto e deformazione proiettiva di una trasformazione puntuale.

Una trasformazione puntuale T , fra due piani π, π' , che trasformi un tritessuto di curve piane Δ in un tritessuto Δ' è una

⁽¹⁾ Si veda: G. VAONA, *Sulla deformazione proiettiva dei tritessuti di curve piane*, « Annali di Matematica », (IV), vol. XLVI, pp. 43-70 (1958).

⁽²⁾ Si veda: M. VILLA e L. MURACCHINI, *L'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali*. « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), X, pp. 313-327 (1955). Si veda anche: M. VILLA, *Dall'applicabilità delle superficie a quella delle trasformazioni*, « Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano », XXVII, pp. 1-12 (1955-56).

deformazione proiettiva di Δ, Δ' se, e solo se, Δ e Δ' sono i *tritessuti caratteristici* di T .

Ricordo che data una trasformazione T fra due piani π, π' e una trasformazione $\bar{T}$ fra $\bar{\pi}, \bar{\pi}'$, si dice che una corrispondenza γ fra $T, \bar{T}$ (consistente in una trasformazione U fra $\pi, \bar{\pi}$ e una trasformazione U' fra $\pi', \bar{\pi}'$) è un'applicabilità proiettiva se i tritessuti caratteristici di U e U' coincidono con i tritessuti caratteristici di T e $\bar{T}$ ⁽³⁾.

Per deformare proiettivamente una trasformazione T , quand'è possibile, basta pertanto considerare due deformazioni U, U' dei tritessuti caratteristici Δ, Δ' di T . La trasformazione $\bar{T}$ prodotto di $U \cdot T \cdot U'$ è una deformata proiettiva di T e la corrispondenza γ fra $T, \bar{T}$, individuata da U, U' è un'applicabilità proiettiva di $T, \bar{T}$.

Appare così come fra la teoria della deformazione proiettiva dei tritessuti e quella della deformazione proiettiva delle trasformazioni vi siano assai stretti legami; in particolare, l'elemento lineare proiettivo di una trasformazione dipende esclusivamente dai tritessuti caratteristici di T .

Se i tritessuti caratteristici di T sono deformabili in ∞^h modi, la trasformazione T ammette ∞^{2h} deformazioni proiettive. Ci si può chiedere inoltre se le trasformazioni $\bar{T}$, deformate proiettive di T , sono tutte omograficamente distinte oppure no. Si ha a tal riguardo:

Se i tritessuti caratteristici di una trasformazione T ammettono ∞^h deformazioni proiettive, affinchè delle ∞^{2h} deformate proiettive di T soltanto ∞^{2h-k} siano omograficamente distinte è necessario e sufficiente che i due tritessuti caratteristici di T posseggano ∞^k deformazioni proiettive in sè.

Da tale proposizione segue ovviamente:

Affinchè una trasformazione T ammetta ∞^k deformazioni proiettive in sè è necessario e sufficiente che ammettano ∞^k deformazioni proiettive in sè i tritessuti caratteristici di T .

Per dimostrare la prima delle due proposizioni, consideriamo la trasformazione puntuale T rappresentata dai due sistemi di equazioni differenziali completamente integrabili

$$\begin{aligned} x_{uu} &= -bx_u + \beta x_v + px & y_{uu} &= -b'y_u + \beta'x_v + p'y \\ (1) \quad x_{uv} &= ax_u + bx_v + cx & (1') \quad y_{uv} &= a'y_u + b'y_v + c'y \\ x_{vv} &= \gamma x_u - ax_v + qx, & y_{vv} &= \gamma y_u - a'y_v + q'y, \end{aligned}$$

⁽³⁾ Si veda op. cit. in ⁽²⁾.

ed avente per tritessuti caratteristici Δ , Δ' quelli rappresentati dall'equazione

$$(2) \quad dudv(dv - \lambda du) = 0, \quad \lambda = \frac{b' - b}{a' - a} \quad (4).$$

Supponiamo che Δ (e quindi Δ') ammetta ∞^h deformazioni proiettive e cioè esistano nuove funzioni $\bar{a}$, $\bar{b}$ (e $\bar{a}'$, $\bar{b}'$) tali che $\lambda = \frac{b - \bar{b}}{a - \bar{a}} \left(= \frac{b' - \bar{b}'}{a' - \bar{a}'} \right)$, dipendenti da h costanti arbitrarie per cui i sistemi di equazioni differenziali (1), (1') corrispondenti siano completamente integrabili. Le trasformazioni $\bar{T}$, deformate proiettive di T , sono rappresentate dai sistemi ottenuti da (1), (1') sostituendo a , b con $\bar{a}$, $\bar{b}$ ed a' , b' con $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ rispettivamente.

Le trasformazioni $\bar{T}$ dipendono in generale da $2h$ costanti arbitrarie (da quante dipendono le deformazioni di T). Affinchè il numero delle costanti arbitrarie da cui dipendono sia $2h - k$ è necessario e sufficiente che esista un cambiamento di parametri del tipo

$$(3) \quad U = U(u) \quad V = V(u)$$

mediante il quale il numero $2h$ delle costanti arbitrarie essenziali si abbassa di k unità.

Siccome tali cambiamenti, conservano tuttavia l'equazione (2) e lasciano invariate le funzioni β , γ , altro non sono che deformazioni proiettive dei tritessuti caratteristici in sè, onde l'asserto.

Le osservazioni precedenti riconducono numerose questioni riguardanti l'applicabilità proiettiva delle trasformazioni a quella, sotto certi aspetti più semplice, dei tritessuti.

È noto che una trasformazione puntuale T , in generale, è proiettivamente indeformabile e che le trasformazioni proiettivamente deformabili dipendono da una funzione arbitraria di due variabili ⁽⁵⁾. Ci si può quindi chiedere di determinare le trasformazioni T proiettivamente deformabili o per lo meno quelle che ammettono ∞^{2h} deformazioni per i più elevati valori di h . Nei nn. successivi, facendo uso dei risultati stabiliti sulla deformazione dei tritessuti, verrà data risposta a tale questione per $h = 4, 3, 2$.

(4) Per la rappresentazione analitica qui usata di una trasformazione e di un tritessuto si veda il mio lavoro cit. in (4).

(5) Questo risultato è dovuto ad L. MURACCHINI. Si veda L. MURACCHINI, *Osservazioni sull'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali fra piani*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), XII, pp. 176-182 (1957).

3. Le trasformazioni puntuali che ammettono ∞^8 deformazioni proiettive.

È noto che un tritessuto di curve piane ammette al più ∞^4 deformazioni proiettive e che i tritessuti che ammettono ∞^4 deformazioni sono soltanto i tritessuti formati con le tre famiglie di rette di un involuppo algebrico di 3^a classe (anche riducibile) ⁽⁶⁾. Siccome tali tritessuti sono ∞^1 e ciascuno ammette ∞^4 deformazioni, si ha che ognuno dei tritessuti precedenti ammette ∞^3 deformazioni proiettive in sé.

È altresì noto che non esistono tritessuti che posseggono ∞^3 deformazioni proiettive ⁽⁷⁾.

Da tali risultati e da quanto si è osservato nel n. precedente, segue:

Una trasformazione puntuale di 1^a specie fra piani ammette al più ∞^8 deformazioni proiettive e le trasformazioni deformabili in ∞^8 modi sono tutte e sole quelle aventi i tritessuti caratteristici formati dalle rette di un involuppo algebrico di 3^a classe ⁽⁸⁾.

Si ha inoltre:

Una trasformazione puntuale di 1^a specie fra piani ammette al più ∞^3 deformazioni proiettive in sé e le trasformazioni che ammettono ∞^3 deformazioni proiettive in sé sono tutte e sole quelle aventi i tritessuti caratteristici formati dalle rette di un involuppo algebrico di 3^a classe.

Pertanto ogni trasformazione del tipo indicato ammette soltanto ∞^5 deformate proiettive fra loro omograficamente distinte ⁽⁹⁾.

4. Le trasformazioni puntuali che ammettono ∞^4 deformazioni proiettive.

Poichè non esistono tritessuti deformabili in ∞^3 modi, si ha intanto:

Non esistono trasformazioni puntuali di 1^a specie che ammettono ∞^6 deformazioni proiettive.

Nel mio lavoro cit. in ⁽¹⁾ ho determinato i tritessuti che posseggono ∞^3 deformazioni proiettive e le relative deformazioni.

⁽⁶⁾ Si veda: op. cit. in ⁽⁴⁾.

⁽⁷⁾ Si veda: op. cit. n. ⁽⁴⁾.

⁽⁸⁾ Queste trasformazioni sono state diffusamente studiate da O. BORUWKA. Si veda: O. BORUWKA, *Sur les correspondences analytiques entre deux plans projectifs*, « Publ. Univ. Masaryk », n. 85, pp. 1-34 (1927).

⁽⁹⁾ Questo risultato, assieme ad altri, è stato rilevato anche da L. MURACCHINI al quale avevo comunicato oralmente alcuni dei risultati contenuti nel mio lavoro cit. in ⁽⁴⁾. Si veda: L. MURACCHINI, op. cit. in ⁽⁵⁾.

Tali tritessuti sono particolari tritessuti a configurazione esagonale aventi una schiera di curve formata da un fascio di rette. Alla costruzione di questi tritessuti si perviene considerando la classe di superficie proiettivamente deformabili, le superficie Σ , che posseggono una rete R costituita dalle curve sezione con i piani passanti per una retta r e dalle curve contorni apparenti dai punti di r . Proiettando da un punto S di r su un piano π le asintotiche della superficie e le curve sezione con i piani per r , si ottiene un tritessuto Δ_Σ che ammette ∞^1 deformazioni proiettive.

Tali tritessuti Δ_Σ , assieme a loro eventuali deformati proiettivi di tipo diverso, sono gli unici ad ammettere ∞^2 deformazioni.

Le ∞^2 deformazioni di un tritessuto Δ_Σ si ottengono deformando proiettivamente, negli ∞^1 modi possibili, la superficie Σ da cui proviene Δ_Σ in modo che le curve piane per r vengano mutate in curve giacenti nei piani per una retta r' ed associando quindi punti ottenuti proiettando, da un punto S di r e da un punto S' di r' , punti corrispondenti nella deformazione fra le due superficie.

Segue quindi:

Le trasformazioni precedenti, assieme a loro eventuali deformati di tipo diverso, sono le sole a possedere ∞^4 deformazioni proiettive.

In generale le trasformazioni sopra considerate non ammettono deformazioni proiettive in sè. Esistono tuttavia classi di particolari trasformazioni del tipo suddetto che ammettono ∞^1 deformazioni proiettive in sè. Basta a tale scopo considerare una trasformazione puntuale i cui tritessuti caratteristici Δ_Σ provengano da superficie Σ che ammettono ∞^1 deformazioni in sè⁽¹⁰⁾. Ma su ciò non vogliamo insistere.

5. Elemento lineare proiettivo di una trasformazione puntuale.

M. VILLA ed L. MURACCHINI⁽¹¹⁾, introducendo la nozione di applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali hanno considerato l'elemento lineare proiettivo di una trasformazione che nella teoria delle trasformazioni svolge ufficio analogo a quello dell'elemento lineare proiettivo delle superficie nella relativa teoria. Il VILLA propose poi di dare un'interpretazione geometrica di tale elemento lineare proiettivo⁽¹²⁾. Vogliamo indicare in questo n. ap-

⁽¹⁰⁾ Esistono invero delle classi di superficie Σ siffatte. Si veda a tal riguardo: B. SEGRE, *Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili ed alle equazioni differenziali ad esse collegate*, « Memorie della Reale Acc. d'Italia », II n. 3, pp. 1-143 (1931).

⁽¹¹⁾ Si veda: op. cit. in ⁽²⁾.

⁽¹²⁾ Si veda: M. VILLA, il secondo lavoro cit. nella ⁽²⁾.

punto un significato geometrico dell'elemento lineare proiettivo per mezzo di un birapporto infinitesimo.

Sia T una trasformazione puntuale di 1^a specie fra due piani π, π' . Sia A un punto di π e siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ le tre curve caratteristiche di T uscenti da A . Sia Γ una delle ∞^2 quartiche aventi in A un punto triplo a tangenti distinte e contenente i tre E_2 di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e consideriamo il sistema lineare ∞^1 di quartiche individuato da Γ , dalla tangente t_1 in A a γ_1 contata quattro volte e dalle due tangenti t_2, t_3 a γ_2, γ_3 contate due volte. In tale sistema lineare v'è una sola quartica $\bar{\Gamma}$ spezzata nelle tre tangenti t_1, t_2, t_3 e una retta residua d . Se A' è un punto di π infinitamente vicino ad A e Q, D sono le intersezioni della retta AA' con Γ, d rispettivamente, si ha che *l'elemento lineare proiettivo di T è la parte principale del birapporto infinitesimo*

$$-2(ADA'Q).$$

Supponiamo infatti che la trasformazione T sia rappresentata dalle solite equazioni di FRÉNET, normalizzate nel modo indicato nella Nota di M. VILLA e L. MURACCHINI cit. in (2). L'elemento lineare di T è dato da

$$\Phi = \frac{\omega_2 \bar{\theta}_1 - \omega_1 \bar{\theta}_2}{2\omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2)},$$

dove

$$\bar{\theta}_1 = \alpha_{20} \omega_1^3 + 3\alpha_{21} \omega_1^2 \omega_2 + 3\alpha_{12} \omega_1 \omega_2^2 + \alpha_{03} \omega_2^3$$

$$\bar{\theta}_2 = \beta_{30} \omega_1^3 + \alpha_{30} \omega_1^2 \omega_2 + 3\beta_{12} \omega_1 \omega_2^2 + 3\alpha_{12} \omega_2^3.$$

Le equazioni dei tre E_2 appartenenti alle curve caratteristiche uscenti da un punto A , rispetto al riferimento proiettivo intrinseco relativo ad A , sono date da

$$y = \frac{\beta_{20}}{4} x^2, \quad x = \frac{\alpha_{03}}{4} y^2, \quad y = x + \nu x^2,$$

dove

$$\nu = \frac{1}{4} (3\alpha_{21} + \alpha_{03} - 3\beta_{12} - \beta_{03}) \quad (13).$$

Considerando poi un punto A' , prossimo ad A , di coordinate (ω_1, ω_2) , non offre difficoltà la verifica della proposizione enunciata.

(13) Per il calcolo delle equazioni dei tre E_2 ci si può servire della rappresentazione locale di T , che trovasi, ad es. nel lavoro di M. VILLA *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali*, «Compositio Math.», vol. XII, pp. 137-146 (1954).