
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

I. BANDIĆ

Sur une classe d'équations différentielles quasi-homogènes du premier ordre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 13
(1958), n.2, p. 224–233.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_224_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sur une classe d'équations différentielles quasi-homogènes du premier ordre.

Nota di I. BANDIĆ (a Belgrado)

Sunto - Viene presa in esame l'equazione differenziale $u(x, y, y') = v(x, y, y')$ dove u e v sono funzioni omogenee rispetto ad x ed y , ma di gradi non necessariamente uguali. Si stabilisce un nuovo metodo che consente di trasformare la data equazione in un'altra del primo ordine nella quale la derivata della funzione incognita figura al primo grado.

Resumé - Voir l'Introduction.

On a l'équation différentielle

$$(1) \quad u(x, y, y') = v(x, y, y'),$$

où u et v sont des fonctions homogènes par rapport à x et à y , à savoir u du m -ième et v du n -ième degré.

L'équation (1) représente une *équation différentielle quasi-homogène du premier ordre par rapport à x et à y* .

On effectue ici la transformation de l'équation (1) en une autre équation du premier ordre dans laquelle la dérivée de la fonction inconnue n'apparaît qu'au premier degré.

En vertu de la transformation effectuée on trouve, ensuite, de nouvelles classes d'équations différentielles intégrables du premier ordre, ou bien on résout certains cas connus au moyen d'une nouvelle méthode.

1. La transformation même est exécutée par l'application des dérivées relatives de M. PETROVIĆ, [1].

La dérivée relative du n -ième ordre de la fonction $u(x)$ est introduite au moyen de la définition

$$\Delta_n(u) = \frac{u^{(n)}}{u}, \quad \left(u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n} \right)$$

d'où l'on trouve de nombreux rapports entre les dérivées relatives pour les diverses combinaisons de fonctions.

On utilise ici les rapports suivants

$$\begin{aligned} \Delta_1(u_1 u_2) &= \Delta_1(u_1) + \Delta_1(u_2); & \Delta_1\left(\frac{u_1}{u_2}\right) &= \Delta_1(u_1) - \Delta_1(u_2); \\ \Delta_1(u^n) &= n \Delta_1(u); & \Delta_2(u) &= \Delta_1'(u) + \Delta_1^2(u); & (u_v &\equiv u_v(x)). \end{aligned}$$

Il s'ensuit directement de la définition

$$\Delta_1(\exp \int u dx) = \exp \int \Delta_1(u) dx = u.$$

(1.1). La notion de la dérivée relative peut être étendue aussi sur la fonction à deux variables indépendantes $u(x_1, x_2)$, en introduisant la notion de la dérivée relative partielle

$$\Delta_1(u)_{x_v} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_v}, \quad (v = 1, 2).$$

Si x_2 est la fonction de x , on arrive à la dérivée relative totale

$$\nabla_1(u)_{x_1} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx_1} = \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot x_2' \right), \quad \left(x_2' = \frac{dx_2}{dx_1} \right)$$

ou bien, d'après la définition précédente

$$\nabla_1(u)_{x_1} = \Delta_1(u)_{x_1} + \Delta_1(u)_{x_2} \cdot x_2', \quad \left(x_2' = \frac{dx_2}{dx_1} \right)$$

2. Lorsqu'on applique la transformation double de LÉGENDRE à (1)

$$(2) \quad x = Y', \quad y = XY' - Y, \quad y' = X, \quad \left(Y' = \frac{dY}{dX} \right)$$

on obtient l'équation

$$(3) \quad u(Y', XY' - Y, X) = v(Y', XY' - Y, X),$$

dans laquelle u et v sont des fonctions homogènes du m -ième, resp. n -ième degré, par rapport à Y et à Y' .

Si l'on introduit la fonction inconnue z au moyen de la substitution

$$(4) \quad \Delta_1(Y) = \frac{1}{Z}$$

l'équation (3) devient

$$Y^m \cdot u \left(\frac{1}{Z}, \frac{X-Z}{Z}, X \right) = Y^n v \left(\frac{1}{Z}, \frac{X-Z}{Z}, X \right),$$

d'où

$$(5) \quad Y^{n-m} = \mathcal{F}; \quad \mathcal{F} = Z^{n-m} \cdot \frac{u(1, X-Z, X)}{v(1, X-Z, X)}.$$

En appliquant l'opérateur Δ_1 selon la variable X aux deux côtés de cette équation, on obtient

$$(6) \quad \nabla_1(\Phi)_x = \frac{(n-m)(1-Z')}{Z}; \quad \Phi \equiv \frac{u(1, X-Z, X)}{v(1, X-Z, X)}.$$

Finalement, en introduisant la nouvelle fonction $\mathfrak{z}$ par la substitution

$$(7) \quad X - Z = \mathfrak{z}$$

on trouve de (6)

$$(8) \quad \nabla_1(\Phi)_x = \frac{(n-m)\mathfrak{z}'}{X-\mathfrak{z}}, \quad \Phi \equiv \frac{u(1, \mathfrak{z}, X)}{v(1, \mathfrak{z}, X)}$$

ou bien

$$(9) \quad [(n-m) - (X-\mathfrak{z})\Delta_1(\Phi)_{\mathfrak{z}}]\mathfrak{z}' = (X-\mathfrak{z})\Delta_1(\Phi)_x,$$

d'où l'on voit que (1) est transformé en une équation du premier ordre dans laquelle la dérivée de la fonction inconnue ne figure qu'au premier degré.

Soit $\mathfrak{z} \equiv \mathfrak{z}(X, c)$ l'intégrale générale de l'équation (8). On trouve alors l'intégrale générale de l'équation (1) de (5), (6) et (7)

$$(10) \quad Y = (X - \mathfrak{z})^{\frac{n-m}{\mathfrak{z}'}} \Phi; \quad \Phi \equiv \frac{u(1, \mathfrak{z}, X)}{v(1, \mathfrak{z}, X)}$$

où $\mathfrak{z} \equiv \mathfrak{z}(X, c)$.

On obtient l'intégrale générale de l'équation (1), en vertu de (2), dans la forme paramétrique

$$(11) \quad x = Y', \quad y = XY' - Y$$

où X joue le rôle de paramètre, et Y est donné par la relation (10).

THEOREME. - À l'équation différentielle du premier ordre

$$u(x, y, y') = v(x, y, y')$$

dans laquelle u et v sont des fonctions homogènes par rapport à x et à y , du m ième resp. n -ième degré, correspond l'équation du premier ordre

$$[(n-m) - (X-\mathfrak{z})\Delta_1(\Phi)_{\mathfrak{z}}\Delta_1(\Phi)_{\mathfrak{z}}]\mathfrak{z}' = (X-\mathfrak{z})\Delta_1(\Phi)_x;$$

$$\Phi \equiv \frac{u(1, \mathfrak{z}, X)}{v(1, \mathfrak{z}, X)}, \quad \left(\mathfrak{z}' = \frac{d\mathfrak{z}}{dX} \right).$$

L'intégrale générale de l'équation donnée est exprimée dans la forme paramétrique

$$x = Y, \quad y = XY' - Y, \quad \left(Y' = \frac{dY}{d\bar{Y}} \right)$$

où X joue le rôle de paramètre, et Y est donné par la relation

$$Y = (X - \mathfrak{z})^{\frac{n-m}{n}} \sqrt[n]{\Phi},$$

dans laquelle $\mathfrak{z} \equiv \mathfrak{z}(X, c)$ représente l'intégrale générale de l'équation transformée.

3. Dans ce paragraphe sont exposées les applications du théorème énoncé à la formation de nouveaux types d'équations différentielles intégrables du premier ordre, ainsi qu'à la solution de certains cas connus au moyen de nouvelles méthodes.

(3.1) L'équation différentielle

$$(12) \quad u(x, y, y') = v(x, y, y'),$$

dans laquelle u et v sont des fonctions homogènes, en même temps par rapport à x et à y que par rapport à y et à y' , est résolue au moyen des quadratures.

Soit u du m -ième degré selon x et y , et du p -ième degré selon y et y' ; v du n -ième degré selon x et y , et du q -ième degré selon y et y' .

De la supposition que l'on vient d'introduire il résulte que $u \equiv u(1, \mathfrak{z}, X)$ et $v \equiv v(1, \mathfrak{z}, X)$ sont aussi des fonctions homogènes selon $\mathfrak{z}$ et X , à savoir u du p -ième et v du q -ième degré, et par conséquent la fonction

$$\Phi \equiv \frac{u(1, \mathfrak{z}, X)}{v(1, \mathfrak{z}, X)}$$

est aussi homogène par rapport à $\mathfrak{z}$ et X , du degré $p - q$.

Mais dans ce cas-là $\Delta_1(\Phi)_x$ et $\Delta_1(\Phi)_y$ sont des fonctions homogènes du degré (-1) selon $\mathfrak{z}$ et X , ce qui signifie que (9) est réduit à l'équation homogène selon $\mathfrak{z}$ et X .

Si l'on introduit dans (9), outre la supposition précitée, la nouvelle fonction inconnue η par la substitution

$$(13) \quad \mathfrak{z} = X\eta,$$

on arrive à l'équation

$$(14) \quad [(n - m) - (1 - \eta)\Delta_1(\varphi)_\eta](\eta + X\eta') = (p - q)(1 - \eta), \quad \varphi \equiv \frac{u(1, \eta, 1)}{v(1, \eta, 1)}$$

dont l'intégrale générale est donnée par la relation

$$(15) \quad \int \frac{(n-m) - (1-\eta)\Delta_1(\varphi)_\eta}{(p-q)(1-\eta) - [(n-m) - (1-\eta)\Delta_1(\varphi)_\eta]\eta} d\eta = \ln cX, \quad (c = \text{const.}).$$

On trouve l'intégrale générale de l'équation (12) de (11)

$$(16) \quad x = Y'; \quad y = XY' - Y$$

où X joue le rôle de paramètre et Y est donné, en vertu de (10) et (13), par la relation

$$(17) \quad Y = X(1-\eta)^{n-m} \sqrt[n]{\Phi}; \quad \Phi = X^{p-q} \frac{u(1, \eta, 1)}{v(1, \eta, 1)}$$

dans laquelle η est donné par l'égalité (15).

EXEMPLE. - On a l'équation

$$y - xy' = 2x^2y'^2 - 3xyy' = y^2,$$

dans laquelle $m = p = 1$, $n = q = 2$.

L'intégrale générale de l'équation donnée est

$$x = Y', \quad y = XY' - Y, \quad \left(Y' = \frac{dY}{dX} \right)$$

où, en vertu de (17) et (15)

$$Y = \frac{\operatorname{tgln} \frac{c}{X}}{1 - \operatorname{tgln} \frac{c}{X}}.$$

(3.2). À l'équation différentielle affectant la forme

$$(18) \quad y'P(x, y) + Q(x, y) = y'R(x, y) + S(x, y),$$

dans laquelle P , Q , R et S sont des fonctions homogènes par rapport à x et à y , à savoir P et Q du m -ième, et R et S du n -ième degré, correspond, en vertu de (8), l'équation

$$(19) \quad \nabla_1(\Phi)_x = \frac{(n-m)\mathfrak{z}'}{X-\mathfrak{z}}; \quad \Phi = \frac{XP(1, \mathfrak{z}) + Q(1, \mathfrak{z})}{XR(1, \mathfrak{z}) + S(1, \mathfrak{z})}.$$

Prenant X pour la fonction de l'argument $\mathfrak{z}$, et tenant compte du fait que $\nabla_1(\Phi)_x = \frac{1}{X'} \nabla_1(\Phi)_\mathfrak{z}$; $\left(X' = \frac{dX}{d\mathfrak{z}} \right)$, on trouve de (19)

$$\nabla_1(\Phi)_\mathfrak{z} = \frac{n-m}{X-\mathfrak{z}}.$$

Puisque, ensuite, il résulte de (19)

$$(20) \quad X = \frac{\Phi S - Q}{P - \Phi R}.$$

la dernière équation apparaît sous la forme d'équation d'ABEL par rapport à la fonction inconnue Φ

$$(21) \quad [(S+Rz)\Phi - (Q+Pz)]\Phi' = (n-m)\Phi(P-R\Phi); \quad \left(\Phi' = \frac{d\Phi}{dz} \right).$$

Soit $\Phi \equiv \Phi(z, c)$ l'intégrale générale de cette équation. On obtient alors de (16) et de (20)

$$(22) \quad \left. \begin{aligned} X &= \frac{\Phi S - Q}{P - \Phi R}, \\ Y &= \left(\frac{\Phi S - Q}{P - \Phi R} - z \right)^{n-m} \sqrt[n-m]{\Phi} \end{aligned} \right\}.$$

L'intégrale générale de l'équation (18) est dans ce cas

$$(23) \quad x = Y', \quad y = XY' - Y, \quad \left(Y' = \frac{dY}{dX} \right)$$

où X et Y sont donnés par les équations (22), dans lesquelles $\Phi \equiv \Phi(z, c)$ et z joue le rôle de paramètre.

Les résultats obtenus mènent directement aux équations généralisées bien connues du premier ordre.

(3.2.1). Lorsqu'on insère dans (18)

$$Q(x, y) = -T(x, y); \quad R(x, y) = -xU(x, y); \quad S(x, y) = yU(x, y)$$

où T et U sont des fonctions homogènes par rapport à x et à y , du m -ième resp. n -ième degré, on arrive à l'équation spéciale de DARBOUX, [2]

$$[P(x, y) + xU(x, y)]y' = T(x, y) + yU(x, y),$$

que l'on résout au moyen des quadratures, puisque, en vertu de (21), il lui correspond l'équation de BERNOULLI

$$(zP - T)\Phi' = (n - m)(P + U\Phi)\Phi,$$

où

$$P = P(1, z), \quad Q = Q(1, z), \quad U = U(1, z), \quad \Phi' = \frac{d\Phi}{dz}$$

(3.2.2). En supposant que

$$P(x, y) = f(x, y), \quad Q(x, y) = -g(x, y), \quad R(x, y) = -x^m h(x, y),$$

$$S(x, y) = x^{m-1} y h(x, y),$$

où f , g et h sont des fonctions homogènes par rapport à x et à y , à savoir f et g du m -ième degré et h du degré α , l'équation (18) devient, [3]

$$(24) \quad \left[f\left(\frac{y}{x}\right) + x^\alpha h\left(\frac{y}{x}\right) \right] y' = g\left(\frac{y}{x}\right) y x^{\alpha-1} h\left(\frac{y}{x}\right).$$

À cette équation correspond, en vertu de (21) l'équation de BERNOUILLI

$$(g - \alpha f)\Phi' = \Phi \left\{ h \triangle_1 \left(\frac{f}{h} \right) \Phi + \left[g \triangle_1 \left(\frac{g}{f} \right) + (\alpha - 1)f \right] \right\},$$

où

$$f = f(1, \alpha), \quad g = g(1, \alpha), \quad h = h(1, \alpha).$$

Par conséquent, l'équation de forme (24) se résout aussi au moyen des quadratures.

(3.2.3). En utilisant les résultats de (3.2) on peut former de nouvelles équations intégrables de forme (18) lorsqu'on y introduit la condition que (21) est une équation exacte.

Cette condition est conçue dans les termes suivants

$$(S' + R'\alpha + R)\Phi - (Q' + P'\alpha + P) \equiv (m - n)P - 2R\Phi,$$

d'où il résulte

$$\left. \begin{aligned} Q' + P'\alpha + P &= (n - m)P \\ S' + R'\alpha + R &= 2(n - m)R \end{aligned} \right\}.$$

De ces équations on trouve

$$(25) \quad Q = (n - m) \int P d\alpha - P\alpha$$

$$(26) \quad S = 2(n - m) \int R d\alpha - R\alpha.$$

Dans ce cas-là l'intégrale générale de l'équation (21) est donnée par l'équation

$$(27) \quad \Phi^2 \int R d\alpha - \Phi \int P d\alpha + c = 0, \quad (c = \text{const.}).$$

On obtient l'intégrale générale de l'équation (18) de (22) et (23). où Φ est donné par la relation (27).

EXEMPLE. - Soit $m = 1$, $n = 2$, par exemple

$$P(x, y) = \alpha_0 x + \alpha_1 y; \quad R(x, y) = \beta_0 x^2 + \beta_1 xy, \quad (\alpha_\nu = \text{const.}, \beta_\nu = \text{const.}),$$

Il s'ensuit de là

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 \mathfrak{z}, \quad R = \beta_0 + \beta_1 \mathfrak{z}.$$

On trouve alors de (25) et (26)

$$Q = -\frac{\alpha_1}{2} \mathfrak{z}', \quad S = \beta_0 \mathfrak{z}.$$

ou plutôt

$$Q(x, y) = -\frac{\alpha_1}{2} \frac{y^2}{x}, \quad S(x, y) = \beta_0 xy$$

de sorte que l'équation intégrable (18) devient

$$x(\alpha_0 x + \alpha_1 y)y' - \frac{\alpha_1}{2} y^2 = x(\beta_0 x^2 + \beta_1 xy)y' + \beta_0 x'y.$$

(3.2.4). Au moyen de la méthode exposée en (3.2) on résout aussi l'équation de JACOBI

$$(Bxy + Ax^2 + C_1x + C_2y + C_3)y' = By^2 + Axy + D_1x + D_2y + D_3.$$

après l'avoir précédemment, par la substitution connue

$$x = p + t, \quad y = q + z,$$

où t est la nouvelle variable indépendante et z la nouvelle fonction inconnue, réduite à la forme plus simple

$$(Btz + Az^2 + at + bz)z' = Bz^2 + Atz + \alpha t + \beta z.$$

Cette équation peut être exprimée sous la forme (18)

$$(Az^2 + Btz)z' - (Bz^2 + Atz) = -(at + bz)z' + (\alpha t + \beta z),$$

et il lui correspond, en vertu de (21), l'équation linéaire

$$[b\mathfrak{z}' + (a - \beta)\mathfrak{z} - \alpha]\Phi' = (b\mathfrak{z} + a)\Phi + (\beta\mathfrak{z} + A), \quad \left(\Phi' = \frac{d\Phi}{d\mathfrak{z}}\right)$$

de laquelle on obtient aussi, par le procédé exposé en (3.2), l'intégrale générale de l'équation même de JACOBI.

(3.3). On a l'équation

$$(28) \quad \alpha_0 x^{\lambda_0} y' = \alpha_1 x^{\lambda_1} + \alpha_2 y^{\lambda_2}, \quad (\alpha_\nu = \text{cost.}, \lambda_\nu = \text{const.})$$

laquelle, par la substitution

$$y = z^{\lambda_1/\lambda_2},$$

où z est la nouvelle fonction inconnue, est transformée en une équation quasi-homogène de forme (18)

$$\alpha_0 \lambda_1 x^{\lambda_0} z^{\lambda_1/\lambda_2 - 1} z' = \lambda_2 (\alpha_1 x^{\lambda_1} + \alpha_2 z^{\lambda_1}).$$

À cette équation correspond, en vertu de (21), l'équation d'ABEL

$$[\lambda_2(z_1 + \alpha_2 z^{\lambda_1})\Phi - \alpha_0 \lambda_1 z^{\lambda_1/\lambda_2}] \Phi' = \left(\lambda_1 - \lambda_0 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 \right) \alpha_0 \lambda_1 z^{\lambda_1/\lambda_2 - 1} \Phi,$$

que l'on résout au moyen des quadratures, entre autres, aussi sous la condition

$$(29) \quad \lambda_0 = \lambda_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1.$$

Un nombre assez considérable d'équations intégrables affectant la forme (28), connues dans la littérature, sont résolues par la méthode exposée d'une façon uniforme, puisqu'elles satisfont à la condition (29).

Telles sont, par exemple, les équation suivantes:

L'équation de RICCATI, [4]

$$x^n y' = ay^2 + bx^{n-2},$$

l'équation de CHINI, [4]

$$x^{m(n-1)+n} y' = ay^n + bx^{(m+1)n}$$

l'équation d'ABEL, [5]

$$x^{2n+1} y' = ay^3 + bx^{3n}.$$

(3.4). Afin d'illustrer plus complètement les possibilités de l'application du théorème exposé sous 2°, on cite ici encore un certain nombre d'équations affectant la forme (1), contenues dans le recueil de KAMKE, lesquelles sont résolues, du reste, par des méthodes les plus variées.

Les équations particulières sont numérotées de la même façon que dans le recueil cité, et l'auteur y a ajouté certaines remarques sur les équations mêmes.

(3.4.1). À l'équation différentielle

$$(1-560) \quad ay\sqrt{y'^2 + 1} = 2xyy' - y^2 + x^2,$$

[J. E. WRIGHT, « Bulletin Americ. Math. Soc. », 11, 1905, 180-182] correspond, en vertu de (9)

$$(Xz' + 2z - X)[(X + 1)z' + z(X - z)] = 0.$$

On en trouve une solution de l'équation algébrique

$$Xz^2 + 2z - X = 0$$

et l'intégrale générale de l'équation de BERNOULLI

$$(X^2 + 1)z' + z(X - z) = 0.$$

(3.4.2). À l'équation

$$(1-485) \quad axyy'^2 - (ay^2 + bx^2 + c)y' + bxy = 0,$$

[SERRET-SCHEFFERS, « Differential und Integral Rechnung III », S. 401-403] laquelle, du reste, représente l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$; $a = AB(C - B)$, $b = AB(A - C)$, $c = C(B - A)$, correspond, en vertu de (9), l'équation de BERNOULLI

$$X(b - aX^2)z' = a(X - 1)z^2 + (aX - b)z.$$

(3.4.3). On a l'équation quasi-homogène

$$(1-507) \quad (y^4 - a^2x^2)y'^2 + 2a^2xyy' + y^2(y^2 - a^2) = 0,$$

[CH. E. WILDER, « Americ. Math. Monthly », 38, (1931), 17-25] que l'on applique à un problème de cinématique.

En vertu de (9), à l'équation donnée correspond l'équation aux variables disjointes

$$z(1 + z) = 2X(1 + X) \cdot \frac{dz}{dX}.$$

(3.4.4). À l'équation

$$(1-538) \quad 2(xy' + y)^3 - yy' = 0,$$

[FORSYTH-JACOBSSTAL, « Differentialgleichungen », S. 54, 678] correspond l'équation homogène

$$x^2(X - 5z)z' = z(z - X)(z - 2X).$$

LITTÉRATURE

- [1] M. PETROVIC, *Jedan diferencijalni algoritam i njegove primene* [Un algorithme différentiel et ses applications, en serbe]. Posabne izdanja SAN [Monographies de l'Académie Serbe des Sciences] Vol. CXI, Beograd, 1936.
- [2] G. DARBOUX, *Sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré* « Bulletin des Sciences mathématiques » 1878.
- [3] E. KAMKE, *Differentialgleichungen*, I, S. 20. Leipzig, 1943.
- [4] M. CHINI, « Rendiconti Istituto Lombardo », 57, 504, 1924.
- [5] E. KAMKE, *Differentialgleichungen*, I, S. 326, Leipzig, 1943.