
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CATALDO AGOSTINELLI

**Su un nuovo procedimento atto a
determinare il profilo della sezione retta di
un ghiacciaio.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 13
(1958), n.2, p. 202–213.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_202_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_202_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su un nuovo procedimento atto a determinare il profilo della sezione retta di un ghiacciaio.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino)

Sunto. - *Si considera il moto di un ghiacciaio in un canale cilindrico come quello di un fluido viscoso pesante e incompressibile, partendo dalla impostazione che il SOMIGLIANA aveva dato a questo problema. Ma con diverse ipotesi al contorno, supponendo cioè che lo sforzo tangenziale nel contatto tra ghiaccio e parete del canale sia determinato dalle leggi di COULOMB sull'attrito dinamico, con coefficiente di attrito in genere variabile con la profondità, si stabilisce l'equazione differenziale del profilo della sezione retta del canale in base al principio di minima resistenza, e si riduce la determinazione della velocità in ogni punto di essa alla risoluzione di un problema di NEUMANN.*

Summary. - *The motion of a glacier in cylindrical canal is considered as that of a heavy viscous and incompressible fluid, according to what SOMIGLIANA had established on this problem. But by different boundary conditions, supposing that the tangential stress in contact between the ice and the side of the canal is determined by the laws of COULOMB on the dynamic friction, with friction coefficient generally variable with the depth, we establish the differential equation of the profile of the right section of the canal for the principle of minimum resistance and the determination of the velocity in every point of the same is reduced to the resolution of one of NEUMANN's problems.*

1. È ben nota l'importanza che ha nella glaciologia la determinazione del profilo della sezione retta di un ghiacciaio, onde valutare la sua profondità e quindi la massa di ghiaccio. Un metodo tendente a stabilire teoricamente la forma di detto profilo mediante sole misure di velocità in superficie fu ideato come si sa da SOMIGLIANA (1), considerando un ghiacciaio come un fluido viscoso pesante e incompressibile in lento movimento. Una estensione di questa teoria, considerando invece il ghiaccio come una massa plastico-viscosa, fu successivamente fatta da UDESCHINI (2), mostrando come l'ipotesi della plasticità porta necessariamente alla presenza di un cuore che scorre rigidamente senza aderirvi

(1) C. SOMIGLIANA, *Sulla profondità dei ghiacciai*, « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », vol. 30, a. 1921.

(2) P. UDESCHINI, *Moto plastico-viscoso dei ghiacciai*, « Bollettino del Comitato Glaciologico Italiano », n. 25, a. 1948.

raggiungendo il fondo del ghiacciaio e provocando un'erosione del terreno che influenza il profilo.

In queste ricerche lo sforzo tangenziale Φ_τ al contorno viene supposto proporzionale, secondo un coefficiente di attrito ν , alla velocità v secondo l'asse del canale glaciale. E poichè in base a diverse ipotesi semplificative risulta $\Phi_\tau = \mu \frac{dv}{dn}$, essendo μ il coefficiente di viscosità del ghiaccio, ed n la normale alla parete, diretta verso l'interno, si ha la relazione

$$\mu \frac{dv}{dn} = \nu v.$$

Ora, sulla superficie libera, dove l'attrito tra ghiaccio ed aria si può ritenere nullo, viene posto

$$\frac{dv}{dn} = 0,$$

mentre lungo il profilo della parete del canale, supponendo che il ghiaccio aderisca alla parete, si pone $v = 0$, la qual cosa implica che il coefficiente di attrito ν sia infinitamente grande, altrimenti si avrebbe anche lungo la parete $\frac{dv}{dn} = 0$, ciò che è da escludere.

L'ipotesi di uno sforzo tangenziale al contorno proporzionale alla velocità e l'ipotesi di un coefficiente di attrito fra ghiaccio e terreno, estremamente grande, non sembrano evidentemente soddisfacenti.

L'esperienza ha dimostrato d'altra parte che, sebbene entro certi limiti il coefficiente di attrito sia indipendente dalla pressione fra le superfici a contatto, a pressioni molto elevate esso diminuisce col crescere della pressione.

A grandi profondità si farà sentire anche l'influenza dell'aumento di temperatura dovuto al flusso di calore geotermico e al calore prodotto per attrito e, avvicinandosi la temperatura al punto di fusione del ghiaccio, il coefficiente di attrito cinetico diminuirà fino a valori dell'ordine di 0,02 ⁽³⁾.

Poichè la pressione cresce con la profondità, e così pure la temperatura, si può ritenere che il coefficiente di attrito diminuisca col crescere della profondità, almeno a partire da una certa quota.

Tenendo conto di queste considerazioni ho ammesso ancora che nel contatto tra ghiaccio e parete del canale valgano le leggi

⁽³⁾ Cfr. l'articolo di A. POCHETTINO, *Alcune recenti ricerche fisiche sui ghiacciai*, « Bollettino del Comitato Glaciologico Italiano », n. 20, a. 1940.

di COULOMB sull'attrito dinamico. In questa ipotesi lo sforzo tangenziale di attrito sarà proporzionale allo sforzo normale e diretto in senso contrario al movimento.

Poichè d'altra parte questo sforzo normale risulta uguale alla pressione p , sono stato indotto a porre

$$\Phi_{\tau} \equiv \mu \frac{dv}{dn} = \nu p,$$

dove tanto il coefficiente di attrito ν , come la pressione p sono funzioni della profondità del ghiaccio. Sulla superficie libera il coefficiente di attrito ν si può ritenere nullo e quindi si avrà ancora

$$\frac{dv}{dn} = 0$$

mentre sulla parete del canale si avrà

$$\frac{dv}{dn} = \frac{\nu}{\mu} p.$$

In base a queste nuove ipotesi al contorno, supponendo ν una funzione nota della profondità del ghiaccio, considerando il suo movimento come quello di un fluido viscoso pesante e incompressibile, e ammettendo il *principio di minima resistenza*, in questo lavoro dimostro come sia possibile determinare il profilo del ghiacciaio misurando la sola larghezza in superficie (supposta piana), mentre il metodo di SOMIGLIANA richiede come si sa la misura della velocità in superficie.

Dopo ciò la determinazione della velocità in ogni punto interno alla sezione retta del ghiacciaio viene ridotta alla risoluzione di un problema di NEUMANN.

2. Consideriamo un ghiacciaio che si muove in un canale che supporremo cilindrico e di sezione qualsiasi, la cui superficie libera sia piana ed abbia la stessa inclinazione α del canale. Nell'ipotesi più comunemente accettata di considerare il moto del ghiacciaio come quello di un fluido viscoso pesante e incompressibile, se si indica con \vec{v} il vettore velocità di un punto, con p la pressione, con ρ la densità e μ il coefficiente di viscosità (entrambi costanti), e con \vec{g} il vettore accelerazione di gravità, le equazioni del movimento, supposto stazionario, risultano come si sa

$$(1) \quad \rho \vec{g} + \mu \Delta_2 \vec{v} = \text{grad } p, \quad (2) \quad \text{div } \vec{v} = 0,$$

la seconda delle quali è l'equazione di continuità.

Assumeremo come origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali un punto della superficie libera, con l'asse x parallelo alla direzione del canale, nel senso del movimento, l'asse y orizzontale e appartenente alla superficie libera, e infine l'asse z diretto verso l'interno del ghiacciaio, in modo che il piano yz ne determini una sezione normale.

Indicando allora con v_x , v_y , v_z le componenti della velocità, e supponendo nulla la componente trasversale v_y , le equazioni (1) e (2) danno luogo alle seguenti equazioni scalari

$$(3) \quad \begin{aligned} \rho g \operatorname{sen} \alpha + \mu \Delta_z v_x &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho g \cos \alpha + \mu \Delta_z v_z &= \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

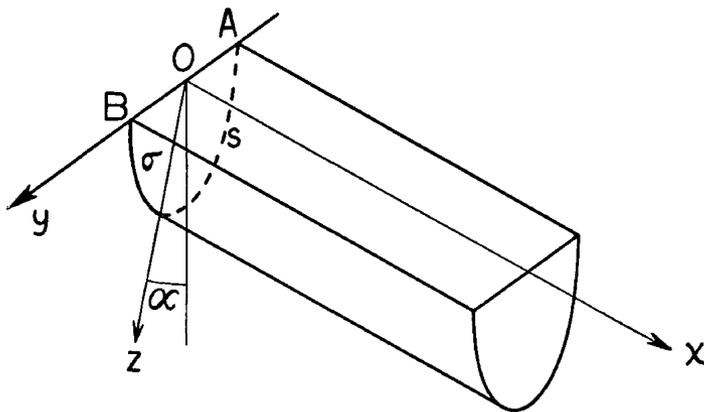


Fig. 1.

Limitando le nostre considerazioni ad una porzione assai breve del canale, le variazioni di moto nella sua direzione saranno assai piccole e si può quindi supporre

$$(4) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0.$$

Dalla quarta delle equazioni (3) si deduce allora $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, e si avrà pertanto

$$(5) \quad v_x = v_x(y, z), \quad v_z = v_z(y).$$

Si ricava inoltre dalla prima e seconda delle (3)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} = 0,$$

e perciò la pressione p sarà una funzione lineare di x e di z . Indicando con p_0 la pressione in superficie (uguale a quella atmosferica) avremo dunque

$$(6) \quad p = p_0 + Ax + Bz.$$

con A , B costanti, e le equazioni (3) si ridurranno così alle seguenti

$$(7) \quad \mu \Delta_2 v_x = A - \rho g \sin \alpha, \quad \mu \Delta_2 v_z = B - \rho g \cos \alpha.$$

3. Per stabilire ora le condizioni ai limiti ricordiamo che in un fluido viscoso le componenti normali degli sforzi interni sono uguali alla pressione, cioè:

$$X_x = Y_y = Z_z = p,$$

mentre, se si indicano con

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, & \varepsilon_{23} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}, & \varepsilon_{13} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}, \end{aligned}$$

le componenti della *velocità di deformazione*, gli sforzi tangenziali dovuti alla viscosità risultano

$$X_y = -\mu \varepsilon_{12}, \quad Y_z = -\mu \varepsilon_{23}, \quad X_z = -\mu \varepsilon_{13}.$$

Nel nostro caso si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= 0 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial v_x}{\partial y}, & \varepsilon_{23} &= \frac{\partial v_z}{\partial y}, & \varepsilon_{13} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} \end{aligned}$$

e quindi

$$X_y = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad Y_z = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad X_z = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Ricordiamo ancora che se α , β , γ sono i coseni direttori della normale n a un elemento piano, e Φ_{nx} , Φ_{ny} , Φ_{nz} sono le compo-

menti dello sforzo specifico $\vec{\Phi}_n$, relativo a quell'elemento, si ha

$$\begin{aligned}\Phi_{nx} &= \alpha X_x + \beta X_y + \gamma X_z \\ \Phi_{ny} &= \alpha X_y + \beta Y_y + \gamma Y_z \\ \Phi_{nz} &= \alpha X_z + \beta Y_z + \gamma Z_z.\end{aligned}$$

Applicando queste formule a un elemento del contorno della sezione del ghiacciaio, la cui normale sarà orientata verso l'interno, poichè su questo contorno è $\alpha = \cos nx = 0$, in base ai risultati precedenti avremo

$$\begin{aligned}\Phi_{nx} &= -\mu \left(\beta \frac{\partial v_x}{\partial y} + \gamma \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\mu \frac{dv_x}{dn} \\ \Phi_{ny} &= \beta p - \mu \cdot \gamma \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \Phi_{nz} &= \gamma p - \mu \cdot \beta \frac{\partial v_z}{\partial y}.\end{aligned}$$

Ne segue che la componente normale Φ_{nn} , di $\vec{\Phi}_n$ è data da

$$\Phi_{nn} = p - 2\mu \cdot \beta\gamma \frac{\partial v_z}{\partial y},$$

e quindi le componenti dello sforzo tangenziale

$$\vec{\Phi}_\tau = \vec{\Phi}_n - \Phi_{nn} \cdot \vec{n},$$

relativo all'elemento considerato, risultano

$$\begin{aligned}\Phi_{\tau x} &= \Phi_{nx} = -\mu \frac{dv_x}{dn} \\ \Phi_{\tau y} &= \Phi_{ny} - \beta\Phi_{nn} = \mu\gamma(2\beta^2 - 1) \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \Phi_{\tau z} &= \Phi_{nz} - \gamma\Phi_{nn} = \mu\beta(2\gamma^2 - 1) \frac{\partial v_z}{\partial y}.\end{aligned}$$

Ciò premesso, mentre il SOMIGLIANA nella sua teoria ammette che lo sforzo tangenziale al contorno sia proporzionale alla velocità, secondo un coefficiente di attrito, noi ammetteremo invece, in base alle leggi di COULOMB sull'attrito dinamico che lo sforzo tangenziale al contorno sia proporzionale allo sforzo normale Φ_{nn} e diretto in senso contrario alla velocità, porremo cioè

$$\vec{\Phi}_\tau = -\nu \Phi_{nn} \frac{\vec{v}}{\text{mod } v} = -\nu \left(p - 2\mu \cdot \beta\gamma \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \frac{\vec{v}}{\text{mod } v},$$

dove ν è il coefficiente di attrito. Prendendo le componenti secondo gli assi abbiamo

$$\begin{aligned}\mu \frac{dv_x}{dn} &= \nu \left(p - 2\mu \cdot \beta\gamma \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \frac{v_x}{\text{mod } v} \\ \mu\gamma(2\beta^2 - 1) \frac{\partial v_z}{\partial y} &= 0, \\ \mu\beta(2\gamma^2 - 1) \frac{\partial v_z}{\partial y} &= -\nu \left(p - 2\mu\beta\gamma \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \frac{v_z}{\text{mod } v}.\end{aligned}$$

La seconda di queste equazioni richiede che sia $\frac{\partial v_z}{\partial y} = 0$, e quindi per la terza sarà $v_z = 0$. Indicando allora con v l'unica componente non nulla della velocità, si ha al contorno del ghiaccio la condizione

$$(8) \quad \mu \frac{dv}{dn} = \nu p$$

la quale esprime anche che al contorno è, in valore assoluto

$$(8') \quad \Phi_\tau = \nu p.$$

Sulla superficie libera dove agisce la pressione atmosferica e il coefficiente di attrito tra aria e ghiaccio si può ritenere nullo, la relazione precedente si riduce alla

$$(9) \quad \frac{dv}{dn} \equiv \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \text{per } z = 0.$$

Dalla seconda delle (3), ricordando la (6), si ha ora

$$\frac{\partial p}{\partial z} = B = \rho g \cos \alpha,$$

e quindi

$$p = p_0 + Ax + \rho g \cos \alpha \cdot z.$$

Si può supporre anche che la pressione vari pochissimo nella direzione del movimento, almeno in prossimità della sezione che si considera. La pressione si riduce allora alla pressione idrostatica dovuta alla gravità, si ha cioè

$$(10) \quad p = p_0 + \rho g \cos \alpha \cdot z.$$

Sulla parete del canale sarà dunque verificata la condizione (8), dove la pressione p è definita dalla (10), e il coefficiente di attrito ν sarà in generale variabile con la profondità, cioè con z .

In conclusione si hanno le equazioni

$$(11) \quad \begin{aligned} \Delta_2 v &= -\rho g \operatorname{sen} \alpha \mid \mu \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, \quad \text{per } z = 0 \\ \frac{dv}{dn} &= \frac{\nu}{\mu} p, \end{aligned}$$

la prima delle quali deve essere verificata in ogni punto interno alla sezione del ghiacciaio, la seconda sulla superficie libera e la terza sulla parete del canale. Su queste equazioni, unitamente alla (10), é basata questa ricerca.

4. Le equazioni qui considerate permettono di ricavare facilmente l'equazione differenziale del profilo del canale presupponendo solo la conoscenza della legge di variazione del coefficiente di attrito ν con la profondità z , e ammettendo il principio della minima resistenza.

Invero, indicando con σ l'area della sezione retta del canale, con A, B i punti estremi della linea libera sull'asse y , e con s la lunghezza di arco di profilo del canale contata a partire dall'estremo B , per la formula di GREEN si ha

$$\int_{AB} \frac{\partial v}{\partial z} dy + \int_{BsA} \frac{dv}{dn} ds = - \int_{\sigma} \Delta_2 v \cdot d\sigma,$$

cioè, in virtù delle equazioni (11),

$$\int_{BsA} \frac{\nu}{\mu} p ds = \int_{\sigma} \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu} d\sigma.$$

Avendo supposto costanti il coefficiente di viscosità μ e la densità ρ del ghiaccio, se si osserva che

$$\int_{BsA} \nu p ds = \int_{AB} \nu p \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dy$$

e che

$$\int_{\sigma} d\sigma = \int_{AB} z dy$$

si ottiene

$$(12) \quad \int_{AB} v(z)p \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dy = \rho g \operatorname{sen} \alpha \int_{AB} z dy.$$

L'integrale a primo membro di questa equazione, in virtù della (8'), rappresenta la resistenza tangenziale risultante (riferita all'unità di lunghezza del canale), che incontra il ghiaccio nel suo movimento in contatto con la parete del canale.

Se ora ragionevolmente ammettiamo il principio di minima resistenza, la variazione di detto integrale, dovuta ad un incremento virtuale arbitrario δz della z (che si annulli nei punti estremi A, B), sarà nulla. Allora, posto

$$(13) \quad F(z, z') = v(z)p(z)\sqrt{1 + z'^2}, \quad \text{con } z' = \frac{dz}{dy}$$

applicando i noti principi variazionali, avremo l'equazione (di EULERO)

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0,$$

che come si sa ammette l'integrale

$$F(z, z') - \frac{\partial F}{\partial z'} z' = C,$$

con C costante arbitraria. Sostituendo alla F il valore (13) si ha

$$(14) \quad \frac{v(z)p(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = C,$$

che è l'equazione differenziale del profilo del canale.

Ponendo

$$(15) \quad z_0 = p_0/(\rho g \cos \alpha)$$

si ha

$$p = \rho g \cos \alpha (z + z_0)$$

e la (14) porge

$$(17) \quad dy = \frac{C dz}{\pm \sqrt{v^2(z) \cdot (z + z_0)^2 - C^2}},$$

con C ancora costante arbitraria.

Supponendo che il profilo del canale sia simmetrico rispetto all'asse z e di larghezza $2L$ in superficie, si ricava in termini finiti

$$(18) \quad L - y = \int_0^z \frac{Cdz}{\sqrt{v^2(z + z_0)^2 - C^2}}$$

e detto z_1 il valore di z per $y = 0$ (profondità massima), si ha

$$(19) \quad L = \int_0^{z_1} \frac{Cdz}{\sqrt{v^2(z + z_0)^2 - C^2}}.$$

Inoltre la (12) si trasforma nella seguente

$$(20) \quad \int_0^{z_1} \frac{v^2(z + z_0)^2}{\sqrt{v^2(z + z_0)^2 - C^2}} dz = \tan \alpha \int_0^{z_1} \frac{Czdz}{\sqrt{v^2(z + z_0)^2 - C^2}}.$$

Allora, essendo nota la semilarghezza L del canale in superficie le equazioni (19) e (20) permettono di determinare la costante C e la profondità z_1 nel centro. La (18) dà quindi l'equazione del profilo.

5. Nel caso particolare in cui il coefficiente di attrito v è costante ed uguale a v_0 , posto

$$\gamma_0 = C/v_0$$

si ha

$$L - y = \gamma_0 \log \frac{z + z_0 + \sqrt{(z + z_0)^2 - \gamma_0^2}}{z_0 + \sqrt{z_0^2 - \gamma_0^2}}$$

e invertendo risulta

$$z = 2 \sinh \frac{L - y}{2\gamma_0} \left(z_0 \sinh \frac{L - y}{2\gamma_0} + \sqrt{z_0^2 - \gamma_0^2} \cosh \frac{L - y}{2\gamma_0} \right).$$

Da questa si ricava

$$z_1 = 2 \sinh \frac{L}{2\gamma_0} \left(z_0 \sinh \frac{L}{2\gamma_0} + \sqrt{z_0^2 - \gamma_0^2} \cosh \frac{L}{2\gamma_0} \right),$$

mentre dalla (20) si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} v_0 [(z_1 + z_0) \sqrt{(z_1 + z_0)^2 - \gamma_0^2} - z_0 \sqrt{z_0^2 - \gamma_0^2}] = \\ & = \gamma_0 \tan \alpha (\sqrt{(z_1 + z_0)^2 - \gamma_0^2} - \sqrt{z_0^2 - \gamma_0^2}) - L \left(\frac{1}{2} v_0 \gamma_0 + z_0 \tan \alpha \right). \end{aligned}$$

Eliminando z_1 si ha per la determinazione della costante γ_0 l'equazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \nu_0 \operatorname{senh} \frac{L}{\gamma_0} \cdot [(z_0 + \sqrt{z_0^2 - \gamma_0^2})^2 e^{L/\gamma_0} + (z_0 - \sqrt{z_0^2 - \gamma_0^2})^2 e^{-L/\gamma_0}] = \\ = 2\gamma_0 \tan \alpha \cdot \operatorname{senh} \frac{L}{2\gamma_0} \left(z_0 \cosh \frac{L}{2\gamma_0} + \sqrt{z_0^2 - \gamma_0^2} \operatorname{senh} \frac{L}{2\gamma_0} \right) - \\ - L \left(\frac{1}{2} \nu_0 \gamma_0 + z_0 \tan \alpha \right). \end{aligned}$$

Il profilo della sezione retta del canale risulta in questo caso composto di due archi di curva esponenziale simmetrici rispetto all'asse z e volgenti la concavità verso il basso (direzione positiva di z).

Supponendo invece che il coefficiente di attrito ν varia secondo la legge

$$(21) \quad \nu = \nu_0 \left/ \left(1 + \frac{z}{z_0} \right) \left(1 + \frac{z}{c} \right) \right.$$

con c costante positiva, e dove ν_0 è il valore di ν per $z = 0$, posto

$$R = \nu_0 z_0 c / C$$

la (18) porge l'integrale

$$(y - L + \sqrt{R^2 - c^2})^2 + (z + c)^2 = R^2.$$

Il profilo sarà costituito di due archi di circonferenza di raggio R . Questi due archi apparterranno alla stessa circonferenza di centro $(0, -c)$, quando

$$L = \sqrt{R^2 - c^2}, \quad \text{cioè} \quad c = \sqrt{R^2 - L^2}.$$

In questa caso è

$$z_1 = R - c = R - \sqrt{R^2 - L^2}$$

e la (20), dopo averla integrata ed eliminato z_1 , porge

$$\begin{aligned} \nu_0 z_0 \sqrt{R^2 - L^2} \log \left| \sqrt{\frac{R+L}{R-L}} \right| = \\ = \frac{1}{2} \tan \alpha \left[R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{R^2 - L^2}}{R} \right) - L \sqrt{R^2 - L^2} \right], \end{aligned}$$

dalla quale si ricava il raggio R .

I due casi a cui ho accennato si possono considerare due casi estremi. Presumibilmente fino a una certa quota il coefficiente ν sarà costante, e poi decrescerà con una legge che non sarà lontana

da quella espressa dalla (21). Il profilo sarà allora costituito da archi di curva di minima resistenza raccordati fra di loro che inizialmente volgeranno la concavità verso il basso, e poi la concavità verso l'alto.

6. Determinato il profilo del ghiacciaio, e quindi l'area σ della sezione normale, il calcolo della velocità in ogni punto interno si riduce alla risoluzione di un problema di NEUMANN.

Infatti, la prima delle (11) è soddisfatta ponendo

$$(22) \quad v = U - \frac{1}{2} \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu} z^2$$

con $U(y, z)$ funzione armonica che dovrà soddisfare alle condizioni al contorno

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{dU}{dn} - \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu} z \frac{dz}{dn} &= \frac{v(z)}{\mu} p, \quad (\text{sopra } s) \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= 0, \quad \text{per } z = 0. \end{aligned}$$

Essendo $\psi(y, z) = 0$ l'equazione del profilo si ha

$$\frac{dz}{dn} = \frac{\partial \psi}{\partial z} / \Delta, \quad \text{con } \Delta = \operatorname{mod} \operatorname{grad} \psi = \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}$$

e le condizioni (23) porgono

$$(23') \quad \begin{aligned} \frac{dU}{dn} &= \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu} z \frac{\partial \psi}{\partial z} / \Delta + \frac{v(z)}{\mu} (p_0 + \rho g \cos \alpha \cdot z), \quad \text{sopra } s, \\ \frac{dU}{dn} &= \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \text{per } z = 0. \end{aligned}$$

Il problema è allora ridotto a determinare una funzione armonica U nell'area σ essendo noti i valori della derivata normale al contorno, è ridotto cioè a un problema di NEUMANN (4).

La possibilità della risoluzione del problema proposto secondo il procedimento qui indicato richiede ovviamente la conoscenza della legge di variazione del coefficiente di attrito v con la profondità z .

In un'altra nota mostrerò come misurando, secondo l'idea di SOMIGLIANA, le velocità in superficie, si può assegnare l'equazione differenziale del profilo della sezione retta del canale, e dedurre quindi l'espressione del coefficiente di attrito v in funzione della profondità z .

(4) È opportuno osservare come dalle (23), tenuto conto della (12) si deduce facilmente che la condizione che sia nullo l'integrale della derivata normale $\frac{dU}{dn}$, esteso a tutto il contorno della sezione σ è identicamente verificata.