Bollettino
Unione Matematica Italiana

F. Marcus

Sopra i risultati di Fubini sull'inversione del teorema di permutabilità di Bianchi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.2, p. 189–195.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_189_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Sopra i risultati di Fubini sull'inversione del teorema di permutabilità di Bianchi.

Nota di F. MARCUS (a Iași)

Sunto. - *Si dimostra in questo lavoro che i risultati di* FUBINI [1] *sul problema dell'inversione del teorema di permutabilità di* BIANCHI, *che gli parevano non risolvere completamente il problema, sono invece sufficienti a questo scopo, e possono condurre al medesimo risultato stabilito altrimenti in* [2].

Summary. - FUBINI *thought that the problem of the converse of* BIANCHI'*s permutability theorem was not completely resolved by the results contained in his paper* [1]. *In the present paper it is proved that, on the contrary, those results are sufficient to get the solution which has been given in different way in* [2].

La convinzione della possibilità di dare una inversione del teorema di permutabilità di BIANCHI, ha condotto il Maestro ad occuparsi di questo problema, nel lavoro [1] inserito negli « Annals of Mathematics » del 1940, ove però egli afferma di porre un problema che non viene completamente risolto. I risultati di [1] mi hanno suggerito l'idea di cercare una soluzione completa di questo problema. A ciò sono giunto nella mia Nota [2] del 1948 pubblicata pure negli « Annals of Mathematics ». I risultati di [2] sollevarono però una domanda alla quale si doveva dare una risposta, così come si vedrà in questo lavoro, ed alla quale avevo da tempo rinunciato, avendo incontrato non lievi difficoltà. È stata la lettura recente della bella conferenza sulle congruenze W del Prof. A. TERRACINI [3] nella quale si fa anche cenno dei risultati di [2], che mi ha determinato ad occuparmi di nuovo di questa domanda, alla quale diamo qua la risposta.

Tenendo presente i risultati di [2] si tratta di esaminare, se i risultati che parevano al FUBINI non risolvere completamente il problema di cui si occupava in [1], sono veramente insufficienti a questo scopo. La risposta è negativa, cioè, così come faremo vedere, i risultati di [1] sono sufficienti a dimostrare completamente il reciproco del teorema di permutabilità di BIANCHI. Per chiarezza riporteremo quei risultati di [1] e [2] che sono necessari alla dimostrazione.

Siano x, y, due punti corrispondenti di due superficie Σ_x e Σ_y trasformate per congruenza [1] delle superficie Σ_z, Σ_t, Σ_η, generate rispettivamente dai punti z, t, η. Se le curve inviluppate su Σ_x dalle tangenti (x, z) (x, t) e (x, η)[2] corrispondono a quelle inviluppate sulla Σ_y dalle rette (y, z) (y, t) e (y, η), allora FUBINI dimostra in [1] che tutte le superficie descritte dai punti $\eta = z + \rho t$ ($\rho =$ costante) saranno trasformate per congruenza delle due superficie Σ_x e Σ_y, mentre tutte le congruenze generate dalle rette (x, η) e (y, η) saranno congruenze W e la retta (x, y) passerà per un punto fisso. In questo caso, FUBINI dimostra completamente il reciproco del teorema di permutabilità di BIANCHI.

Nel paragrafo 2 di [1] si suppone che soltanto due delle tangenti (x, z) (x, t) (x, η) corrispondano alle analoghe rette (y, z) (y, t) e (y, η), per esempio (x, z) con (y, z) ((x, t) con (y, t)). Allora FUBINI fa vedere che si può fare a meno di questo caso, cioè ci si può limitare a supporre che non si corrispondono le rette di alcuna coppia.

Supponendo dunque per esempio che la tangente (x, z) alla superficie Σ_x non si corrisponda colla tangente (y, z) nel punto y di Σ_y, FUBINI fa vedere al paragrafo 3 di [1] che si possono cambiare i parametri u e v e trovare 22 funzioni di (u, v) tali che

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x_u = ax + bz & y_u = Cy + Fz + Gt \\ x_v = cx + fz + gt & y_v = Ay + Bz \\ & \\ z_u = kz + sx + wy & t_u = ht + mx + ny \\ z_v = Kz + Wx + Sy & t_v = Ht + Nx + My \end{array} \right. .$$

Siccome le rette (x, t) e (y, t) non si corrispondono, si ha $bB - fF \neq 0$. Si possono in questo caso, [1] pag. 624, trovare ∞^1 superficie $\eta = z + \rho t$ trasformate per congruenza delle superficie Σ_x e Σ_y, con $\rho =$ costante, e si può porre

$$(2) \qquad K = H; \quad h = k = 0.$$

(1) Secondo FUBINI due superficie sono trasformate per congruenza, se le due superficie sono falde focali della congruenza di rette che uniscono due punti corrispondenti di queste superficie.

(2) Con (x, z), (x, η) si indica la retta che unisce il punto x con z, oppure con η ecc. Queste rette sono tangenti alle superficie Σ_x, Σ_z, Σ_t.

Dalle condizioni d'integrabilità di (1) si trova

$$bS = fw + gn \tag{3}$$

$$Bs = FW + GN \tag{4}$$

$$sg = SG \tag{5}$$

$$mf + nB = MF + Nb \tag{6}$$

$$\begin{cases} sf + wB = SF + Wb + H_u \\ mg = MG + H_u \end{cases} \tag{7}$$

ed eliminando H_u

$$j = bW - fs - GM = Bw - FS - gm \tag{8}$$

essendo j, secondo FUBINI, il valore comune del secondo e terzo membro.

Denotando poi con Σ_z e Σ_t due qualsiasi delle ∞^1 superficie Σ_η, FUBINI dimostra che se una delle congruenze (x, z), (x, t), (y, z), (y, t) è W, allora tutte sono W, e questo può accadere soltanto se

$$j = 0 \tag{9}$$

(cfr. [1] pag. 625-628).

Ma, osserva di nuovo FUBINI, questo risultato non dimostra che è sempre $j = 0$; è per questo, che FUBINI afferma nella introduzione del Suo lavoro, di porre un problema che non viene completamente risolto.

Se però, Egli osserva, si pone la condizione supplementare che le ∞^1 superficie descritte dai punti

$$x + \sigma y \tag{10}$$

siano trasformate per congruenza delle superficie Σ_z e Σ_t, allora è sempre $j = 0$.

In [2] ho risolto in modo completo il problema, ottenendo il seguente Teorema. *Se una famiglia di ∞^1 superficie M^ρ sono trasformate per congruenza di due superficie fisse M_0, M_2, allora tutte le congruenze $(M^\rho M_0)$ e $(M^\rho M_2)$ sono congruenze W.*

La dimostrazione si fa utilizzando il metodo di CARTAN, scegliendo un tetraedro mobile che dipende soltanto dai parametri u, v, determinato dai punti fissi M_0, M_2 e da due degli ∞^1 punti $M^\rho = M_1 + \rho_j M_3$ per esempio M_1 e M_3. Allora può scriversi, cfr. [2],

$$dM_i = \omega_{ih} M_h \qquad\qquad (i, h, r, s = 0, 1, 2, 3)$$
$$\omega'_{rs} = \sum_0^3 [\omega_{rk}\omega_{ks}]$$

con

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_{02}=\omega_{20}=\omega_{13}=\omega_{31}=0\\ \omega_{11}=\omega_{33}\end{array}\right. \tag{12}$$

In conseguenza $\rho_j =$ costante.

Osservando che i pfaffiani ω_{01} e ω_{03} sono linearmente indipendenti, e che gli altri pfaffiani sono una loro combinazione lineare, abbiamo posto

$$\omega_{ik}=a_{ik}du+b_{ik}dv$$

ed in particolare

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_{23}=l\omega_{01}+m\omega_{03}\\ \omega_{21}=n\omega_{01}+p\omega_{03}\end{array}\right. \tag{13}$$

con

$$m+n\neq 0. \tag{14}$$

In questa ultima ipotesi riuscii a dimostrare il teorema.

Ora si osserva che tanto in [1] quanto in [2] si suppone l'esistenza di una sola famiglia di ∞^1 superficie, trasformate per congruenza di due superficie fisse. In [2] l'ipotesi è sufficiente a dimostrare l'inverso del teorema di permutabilità di BIANCHI, mentre in [1] si afferma di porre un problema non completamente risolto. Sorge allora la seguente domanda:

Sono i risultati di [1] *veramente insufficienti a dimostrare la inversione del teorema di permutabilità di Bianchi?*

Noi faremo vedere qua che le formole (3), (4), (5), (6) e (8) sono sufficienti a dimostrare completamente il teorema, cioè, dimostreremo che nella stessa ipotesi di [2], i risultati di FUBINI dimostrano, che è sempre $j=0$. Per questo preciseremo prima di tutto dal punto di vista geometrico l'ipotesi sotto la quale è stata fatta la dimostrazione in [2].

Consideriamo la congruenza descritta dalla retta (M_0M_2). I punti focali di ogni raggio della congruenza si trovano scrivendo

$$d(M_0+\sigma M_2)=\mu M_0+(\lambda+d\sigma)M_2. \tag{15}$$

Tenendo presente (11), (12) e (13) si trova

$$\left\{\begin{array}{l}\mu=\omega_{00};\ \lambda=\sigma\omega_{22}\\ \dfrac{\omega_{01}}{\omega_{03}}=\dfrac{-p\sigma}{1+n\sigma}\\ \dfrac{\omega_{03}}{\omega_{01}}=\dfrac{-l\sigma}{1+m\sigma}\end{array}\right. \tag{16}$$

Eliminando $\frac{\omega_{01}}{\omega_{03}}$ risulta per σ l'equazione

$$\sigma^2(mn - pl) + \sigma(m + n) + 1 = 0. \tag{17}$$

L'ipotesi $m + n \neq 0$ significa che i due punti M_0 e M_2 che descrivono le due superficie fisse M_0 e M_2, non debbono essere coniugati rispetto ai punti focali di ogni raggio della congruenza $(M_0 M_2)$.

Ritorniamo adesso ai risultati di [1]. Sia (x, y) un raggio della congruenza descritta dalla retta che unisce due punti corrispondenti delle superficie Σ_x e Σ_y. I fuochi della retta (x, y) si determineranno colla

$$d(x + \sigma y) = \mu x + (\lambda + d\sigma) y. \tag{18}$$

Osservando che $(x, y, z, t) \neq 0$ si ottiene tenendo presente (1):

$$\begin{cases} \mu = adu + cdv\,; \ \lambda = \sigma Cdu + Adv \\ bdu + fdv + \sigma Fdu + \sigma Bdv = 0 \\ gdv + \sigma Gdu = 0 \end{cases} . \tag{19}$$

Osservando poi che da (1) $sg = SG$, risulta

$$\sigma^2 Bs + \sigma(fs - FS) - bS = 0. \tag{20}$$

Non dovendo i punti essere coniugati rispetto ai punti focali, necessariamente

$$fs \neq FS. \tag{21}$$

In conseguenza da (8) risulta che le quantità

$$bW - GM;\ Bw - gm \tag{22}$$

non possono essere simultaneamente uguali a zero. Possiamo supporre ad esempio

$$bW - GM \neq 0. \tag{23}$$

Dalle (4) e (6) avremo in questo caso

$$F = \frac{Bsb - G(mf + nB)}{bW - GM}. \tag{24}$$

Con questo valore di F risulterà da (8),

$$j = Bw - gm - S\frac{Bsb - G(mf + nB)}{bW - GM}. \tag{25}$$

Ma

$$\begin{cases} bW - GM = j + fs \\ fw - Sb + gn = 0 \\ sg = SG \end{cases} \tag{25'}$$

Dunque

$$j^2 + j(fs + gm - Bw) = 0. \tag{26}$$

Cioè

$$\begin{cases} j = 0 \\ j = Bw - gm - fs \end{cases}. \tag{27}$$

La seconda soluzione si deve escludere.

Infatti nell'ipotesi che fosse $j = Bw - gm - fs$ risulterebbe tenendo presente (8), che $fs = FS$, ciò che si esclude per (2). Resta dunque solo la soluzione $j = 0$. Ciò che si doveva dimostrare. Se fosse per esempio $bW - GM = 0$, siccome non può essere $Bw - - gm = 0$ si potrebbe dalle (3) e (6) ottenere

$$f = \frac{BbS - g(MF + Nb)}{Bw - gm} \tag{24'}$$

e da (8)

$$j = bW - GM - s\frac{BbS - g(MF + Nb)}{Bw - gm = j + FS} \tag{26'}$$

si troverebbe

$$\begin{cases} j = 0 \\ j = bW - GM - FS \end{cases} \tag{27'}$$

la seconda soluzione dovendosi escludere come sopra, rimane soltanto la soluzione $j = 0$.

Alla condizione (2) si può dare un'altra interpretazione che si deduce da un teorema di FUBINI [4].

Supponiamo come si fa in [1] pag. 622, che la tangente che unisce x con $x_u du + x_v dv$ incontri, nel punto z, la retta che passa per i punti y e $y_u \delta u + y_v \delta v$. Dunque

$$(x,\ y,\ dx,\ \delta y) = 0. \tag{28}$$

Sviluppando, otteniamo

$$\left\{\begin{array}{l}(x, y, x_u, y_u)du\delta u + (x, y, x_u, y_v)du\delta v + (x, y, x_v, y_u)dv\delta u + \\ + (x, y, x_v, y_v)dv\delta v = 0\,,\end{array}\right. \tag{29}$$

ciò che definisce una collineazione fra i due fasci di rette tangenti t_x, T_y. Questa collineazione è un'involuzione se

$$(x,\ y,\ x_u,\ y_v) = (x,\ y,\ x_v,\ y_u). \tag{30}$$

Siccome da (1) risulta $(x, x_u, y, y_v) = 0$, deve essere in questo caso

$$(x,\ y,\ x_v,\ y_u) = 0. \tag{31}$$

Tenendo presente (1) e (5) ed osservando che $(x, z, t, y) \neq 0$, risulta

$$fs - FS = 0 \tag{32}$$

e, secondo il sopracitato teorema di FUBINI [4], risulta che in questo caso i punti x e y sarebbero coniugati rispetto ai fuochi della retta (x, y). Ciò che in [1] non si deve supporre, così come si fa in [2]. Dunque la collineazione (29) non potrà essere una involuzione. Vogliamo infine osservare che al medesimo risultato si giungerebbe, utilizzando il ragionamento del FUBINI, pag. 624 di [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. FUBINI, *On Bianchi's permutability theorem and the theory of W congruences*, « Annals of Matematics » Vol. 41 N 3, 1940 pp. 620-638.

[2] F. MARCUS, *On the converse of Bianchi's theorem*, « Annals of Matematics » Vol. 49 N. 3, 1948 pp. 710-713.

[3] A. TERRACINI, *Le congruenze W*, « Rendiconti del Seminario matematico e Fisico di Milano » Vol. XXI, 1950 pp. 1-15.

[4] G. FUBINI, *On a property of W congruences*, « Annals of Matematics » Vol. 41, 1940 pp. 356-364.