Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Alcune notevoli classi di trasformazioni puntuali di uno spazio proiettivo in sé.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.2, p. 179–188.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_179_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Alcune notevoli classi di trasformazioni puntuali di uno spazio proiettivo in sé.

Nota di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna)

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni puntuali fra spazî sovrapposti che presentano particolarità proiettive relative all'intorno del 1° ordine di ogni coppia* A, $\bar{A}$ *di punti corrispondenti; viene approfondito l'esame dei casi in cui, nell'omografia subordinata dalla trasformazione fra le stelle* A, $\bar{A}$, *è unito rispettivamente un iperpiano od una retta: si assegna una costruzione geometrica dei vari sottocasi a cui danno luogo i due tipi indicati.*

Summary. - *Point-transformations between two superposed spaces, with projective particularities in the neighborood of first order of any couple of correspondent points* A, $\bar{A}$ *are studied, exspecially when in collineation induced by transformation between stars* A, $\bar{A}$ *there is a fixed hyperplane, or a fixed straight line: a geometric construction of cases in whose are subdivised these classes is given.*

1. Nella teoria delle trasformazioni puntuali fra spazî lineari, ha particolare interesse lo studio del caso in cui gli spazî sono sovrapposti, presentandosi, oltre ai ben noti enti relativi alle trasformazioni puntuali fra spazî distinti, delle nuove configurazioni (¹). In un precedente lavoro (²), ho dato una classificazione delle coppie di punti corrispondenti in una trasformazione puntuale T fra due S_r proiettivi sovrapposti, basata sulla considerazione dell' intorno

(¹) Per una bibliografia relativa alle trasformazioni puntuali fra spazî lineari, si veda: M. VILLA, *Transformations ponctuelles et transformations crémoniennes,* Deuxième Colloque de Géométrie algébrique du Centre belge de Recherches Mathématiques, Ed. G. Thone, Liège, 41-68 (1952); M. VILLA, *Recherche de types particuliers de transformations ponctuelles,* Colloque international de Géométrie différentielle du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 67-77 (1953).

Sulle trasformazioni puntuali fra spazî proiettivi sovrapposti, cfr.: L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti,* « Boll. U. M. I. » (3), **9**, 360-366 (1954); F. SPERANZA, *Sulle trasformazioni puntuali fra spazî proiettivi sovrapposti,* « Boll. U. M. I. » (3), **10**, 61-68 (1955); F. SPERANZA, *Le trasformazioni puntuali fra spazî sovrapposti nei casi particolari,* « Boll. U. M. I. » (3), **10**, 513-521 (1955).

(²) Cfr. l'ultimo lavoro cit. in (¹).

del 1° ordine della coppia A, $\bar{A}$ in esame: se indichiamo con Ω l'omografia subordinata da T fra le stelle A, $\bar{A}$, si dice che la coppia A, $\bar{A}$ è « di specie p » se lo spazio unito di minima dimensione (che è necessariamente unico) è un S_{r-p} (da questo punto di vista, una coppia generica si può considerare come una coppia di specie zero): naturalmente in una coppia di specie $p > 1$, vi saranno pure degli S_k (per ogni k tale che $r-p < k < r$) uniti nella relativa omografia Ω. Indicheremo, d'ora in poi, con T_p una trasformazione puntuale fra due S_r proiettivi sovrapposti, la cui coppia generica di elementi corrispondenti sia di specie p.

Nel presente lavoro si studiano le proprietà proiettive delle T_p: viene particolarmente approfondito lo studio delle T_1 e delle T_{r-1} (nn. 3 e 4 rispettivamente). In relazione alle T_1, si considera la varietà analonoma V degli iperpiani uniti nelle proiettività Ω, e, insieme ad altre proprietà, si dimostra che ciascuno di tali iperpiani è unito per infinite coppie, ed essi sono quindi al più ∞^{r-1}; a seconda del numero n dei parametri da cui dipende l'insieme degli iperpiani suddetti, si ottiene così un'ulteriore classificazione delle T_1. Per ognuno dei tipi indicati, si dà una costruzione geometrica della più generale trasformazione del tipo considerato, dalla quale risulta che la varietà V può essere assunta, fra quelle che posseggono ∞^n iperpiani, ad arbitrio; si prova infine che la varietà V è olonoma se $n = 1$, e solo allora, riducendosi, in tal caso, ad una famiglia ∞^1 d'iperpiani.

Per quanto riguarda le T_{r-1}, dimostro che esse sono tutte e sole le trasformazioni puntuali fra spazî sovrapposti le cui *curve principali* [cioè le curve tangenti in ogni loro punto A ($\bar{A}$) alla direzione $A\bar{A}$ ($\bar{A}A$)] sono le rette di un unico sistema ∞^{r-1}, e che i piani uniti nelle proiettività Ω sono i piani focali di detto sistema. Ottengo così, in dipendenza dalla configurazione di tali piani, un'ulteriore classificazione delle T_{r-1}, e per ciascun tipo assegno una costruzione geometrica.

In quanto alle T_p, con p qualunque, ne determino la generalità. Do poi la costruzione di certe particolari T_p, dipendenti da $r-p$ funzioni arbitrarie di r variabili, tante quante le più generali T_p(n. 2). Infine, nel n. 5, indico alcune proprietà di queste ultime, che si ricollegano in parte a quelle delle T_1, fra le quali noto le seguenti: gli iperpiani uniti nelle omografie Ω sono tali per infinite coppie di punti corrispondenti; mentre gli S_{r-p} uniti nelle stesse omografie Ω possono essere ∞^r.

È opportuno osservare che, nel caso $r = 2$, l'unico valore possibile di p è 1; tali trasformazioni sono state già studiate da L. Muracchini (cfr. op. cit. in ([1])). Esse rientrano nelle T_{r-1}; ma, presentandosi per queste ultime, a volte, delle proprietà valevoli per $r > 2$, ma non $r = 2$, se ne farà, quando ciò accade, esplicito cenno [3].

Il lettore tenga inoltre presente che, tutte le volte che si fa riferimento allo spazio S_r, l'ente (o la proprietà geometrica) in esame può anche considerarsi soltanto in una regione di detto spazio.

2. Sia T_p una trasformazione fra due spazî proiettivi sovrapposti, S_r, $\bar{S}_r$, tale quindi che la generica coppia di elementi corrispondenti sia di specie p (cfr. n.1): tali trasformazioni si diranno anche *trasformazioni di specie* p. Le condizioni affinché la coppia A, $\bar{A}$ sia di specie p sono rappresentate da p relazioni nelle derivate prime delle funzioni che rappresentano la trasformazione; le T_p dipendono quindi da $r-p$ funzioni arbitrarie di r variabili [4].

Si noti che, in generale, il luogo dei punti che appartengono a coppie di specie q $(> p)$ per una T_p è una V_{r+p-q}; tali varietà possono però avere, in casi particolari, dimensione maggiore. Si noti infine che ogni T_q può ritenersi come un tipo particolare di T_p $(p < q)$.

Un esempio di trasformazioni di specie p è dato dalle *trasformazioni che posseggono* ∞^p S_{r-p} *uniti*; esse si indicheranno con $T_p{}^*$, e sono tutte e sole quelle che si possono cosí costruire: si consideri in S_r un sistema Σ ∞^p di S_{r-p} e si assegni, in ciascun S_{r-p}, una generica trasformazione $\mathcal{T}$ di tale spazio in sé; la trasformazione cercata è quella che ad un punto A di S_r fa corrispondere il suo omologo nella $\mathcal{T}$ relativa all' S_{r-p} passante per A. Le equazioni della piú generale $T_p{}^*$ si ottengono quindi elimi-

(3) Tali trasformazioni rientrano pure nelle $T_1{}^*$ (cfr. n. 2).

(4) Se $X^i(\bar{X}^i)$ sono coordinate proiettive non omogenee in $S_r(\bar{S}_r)$, una trasformazione si può rappresentare con le equazioni

$$\bar{X}^i = f^i(X^k) .$$

Per l'espressione esplicita di dette condizioni, cfr. F. SPERANZA, l'ultimo lavoro cit. nota (1); v. pure L. CANTONI, *Sulle trasformazioni puntuali fra spazî sovrapposti nell'intorno d'un punto unito*, «Boll. U.M.I.» (3), 10, 212-223 (1955). Tali condizioni sono senz'altro indipendenti; del resto, se così non fosse per un certo intero $p_0 < r-1$, non sarebbero indipendenti neppure le condizioni perchè la trasformazione sia una T_{r-1} — fra le quali vi sono le condizioni affinchè la trasformazione sia una T_{p_0} — , e le T_{r-1} dipenderebbero quindi da più d'una funzione di r variabili, contrariamente a quanto si vedrà nel n. 4. D'altra parte, la generalità delle T_p non può essere inferiore a quella indicata, in quanto se ne costruirà una sottoclasse $(T^*{}_p)$ dipendente appunto da $r-p$ funzioni di r variabili.

nando i parametri $\lambda^1, \ldots, \lambda^p$ fra le equazioni

$$X^i = \sum_{p+1}^{r}{}_k\, a_k{}^i(\lambda^j)X^k + \lambda^i, \qquad \overline{X}^i = \sum_{p+1}^{r}{}_k\, a_k{}^i(\lambda^j)\overline{X}^k + \lambda^i \qquad (1 \leq i \leq p)$$

$$\overline{X}^k = f^k(X^h, \lambda^j) \qquad (p+1 \leq h,\ k \leq r)$$

essendo X^α, $\overline{X}^\alpha$ coordinate proiettive non omogenee in S_r, $\bar{S}_r$ rispettivamente. Le $T_p{}^*$ dipendono quindi da $r-p$ funzioni arbitrarie di r variabili (le funzioni f^k che determinano l'insieme delle $\mathcal{C}$).

Una $T_p{}^*$ è certo di specie non inferiore a p, in quanto gli S_{r-p} del sistema Σ sono uniti in tutte le proiettività subordinate dalla trasformazione fra le stelle aventi centro in coppie di punti corrispondenti; se le $\mathcal{C}$ sono assunte genericamente, essa è esattamente di specie p (5).

Si noti infine che *la generalità della classe delle* $\mathrm{T}_p{}^*$ *è uguale a quella delle* T_p (mentre, escluso il caso $p = r-1$, le $T_p{}^*$ non esauriscono le T_p).

Nel seguito, sarà utile considerare, per una qualunque trasformazione, le curve di S_r che in ogni loro punto A sono tangenti alla retta che congiunge A con il corrispondente $\bar{A}$ (curve *principali*) (6); esse costituiscono un sistema ∞^{r-1}. Analogamente, si possono definire le curve principali in $\bar{S}_r$: esse non sono, in generale, le trasformate delle precedenti; *ciò accade se e solo se alla direzione* $\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}$ *corrisponde la* $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}$, *cioè, se la trasformazione è una* T_{r-1}. In tal caso, come si vedrà nel seguito, le curve principali dei due sistemi coincidono nelle rette di un unico sistema ∞^{r-1}. Se la trasformazione è una $T_p{}^*$, le curve principali appartengono agli S_{r-p} del sistema Σ.

3. Consideriamo, in questo numero, una generica trasformazione T_1; in relazione ad ogni coppia A, $\bar{A}$ di punti corrispondenti si ha quindi un iperpiano α, unito nella proiettività Ω, subordinata dalla trasformazione fra le stelle A, $\bar{A}$. Associando ad ogni punto $A(\bar{A})$ l'iperpiano α si ha così, in $S_r(\bar{S}_r)$, una *varietà* — ipersuperficie — *anolonoma* $V(\bar{V})$; le due varietà V, $\bar{V}$ si corrispondono in T_1.

(5) Una *generica* $T_p{}^*$ non può essere di specie $> p$ anche perchè, come si è visto, la generalità delle $T_p{}^*$ è di $r-p$ funzioni di r variabili, e quindi maggiore di quella delle T_q $(q > p)$.

(6) Cfr. L. MURACCHINI, op. cit.. Analogamente alla denominazione adottata nel lavoro cit. si dirà *direzione principale* la direzione $A\bar{A}$.

Per studiare le T_1, e le rispettive varietà V, $\bar{V}$, ci varremo del metodo del riferimento mobile di E. CARTAN [7]. Siano A_0, $A_1, \dots, A_r$ $r+1$ punti analitici indipendenti: per uno spostamento infinitesimo del loro $(r+1)$-edro valgono le formule di FRENET:

$$dA_i = \sum_0^r \omega_i^k A_k$$

essendo le ω_i^k forme di PFAFF nei differenziali dei parametri dai quali dipende il sistema di riferimento; esse soddisfano alle formule di struttura

$$[d\omega_i^k] = \sum_{j\,0}^{r} [\omega_i^j \omega_j^k].$$

Inoltre, posto

$$a^i = (-1)^{r+i}[A_0 A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_r]$$

per il riferimento duale valgono le formule

$$da^i = \sum_{k\,0}^{r} (-\omega_i^k + \delta_i^k \cdot \sum_0^r \omega_j^j) a^k \qquad (\delta_i^k \text{ è il simbolo di KRONECKER}).$$

Assumo i punti A_0 ed A_1 rispettivamente in A ed in $\bar{A}$; le coordinate omogenee nella stella A sono date da $\omega_0^1, \omega_0^2, \dots, \omega_0^r$ (che s'indicheranno, al solito, con $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r$: esse sono r forme indipendenti nei differenziali dei soli parametri *principali*); nella stella $\bar{A}$ sono invece coordinate omogenee le forme $\omega_1^0, \omega_1^2, \dots, \omega_1^r$ (esse pure forme indipendenti nei differenziali di cui sopra). Ciò posto, con una scelta opportuna del riferimento si può far sì [8] che valgano le

$$(1) \qquad \omega_1^2 = \alpha\omega^2, \quad \omega_1^3 = \omega^1, \quad \omega_1^k = \omega^{k-1}, \quad \omega_1^0 = \omega^r \qquad (4 \leq k \leq r).$$

La $V(\bar{V})$ è rappresentata dall'equazione $\omega^2 = 0$ $(\omega_1^2 = 0)$; le equazioni della Ω sono le (1).

(7) Cfr. E. CARTAN, *Sur les variétés de courbure constante d'une espace euclidien ou non euclidien*, «Bull. Soc. Math. France», 47, 125-160 (1919); 48, 132-208 (1920).

(8) La normalizzazione del riferimento qui adottata è pressoché equivalente a quella che trovasi nell'ultimo lavoro cit. nella (1), formula (4) l'unica differenza consiste nel fatto che, per r pari, si è assunto in modo diverso il punto unità (per semplificare le equazioni canoniche). Voglio qui citare le identità che permettono il passaggio dalle equazioni di PFAFF agli sviluppi locali, e viceversa: se X^k sono le coordinate non omogenee nel riferimento considerato, si ha

$$dX^k = -\omega^k + \sum_{i\,0}^{r} \{ (\delta_i^k \omega_0^0 - \omega_i^k) X^i + \omega_i^0 X^i X^k \},$$

essendo δ_i^k il simbolo di KRONECKER. Per $r = 2$, cfr. M. VILLA, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali*, «Compositio Math.» 12, 137-146 (1954).

Per differenziazione esterna, dalla prima delle (1) si ricava:

$$[d\alpha+\alpha(\omega_0{}^0-\omega_1{}^1)+(\alpha)^2\omega^1-\omega^r\ \omega^2]+[\omega_3{}^2\ \omega^1-\alpha\omega^3]+\sum_4^r{}_k\,[\omega_k{}^2\ \ \omega^{k-1}-\alpha\omega^k]=0.$$

In virtù di un lemma di CARTAN esistono quindi $\frac{r(r-1)}{2}$ coefficienti λ, λ_i, λ_{ij} tali che

$$(2_1)\qquad d\alpha+\alpha(\omega_0{}^0-\omega_1{}^1)+(\alpha)^2\omega^1-\omega^r=$$

$$=\lambda\omega^2+\lambda_3(\omega^1-\alpha\omega^3)+\sum_4^r{}_k\,\lambda_k(\omega^{k-1}-\alpha\omega^k)$$

$$(2_2)\qquad \omega_i{}^2=\lambda_i\omega^2+\lambda_{i3}(\omega^1-\alpha\omega^3)+\sum_4^r{}_k\,\lambda_{ik}(\omega^{k-1}-\alpha\omega^k)\qquad(3\leq i\leq r).$$

La corrispondenza che ad ogni punto A di S, associa l'iperpiano $\boldsymbol{a}$ ivi tangente alla varietà anolonoma V è una corrispondenza dualistica *di tipo nullo* $\mathfrak{V}$; la proiettività K subordinata da $\mathfrak{V}$ fra la stella A e l'iperpiano $\boldsymbol{a}$ si dice *proiettività di cella* relativa al punto A di V. Poichè ad una direzione (per A), appartenente ad $\boldsymbol{a}$, corrisponde un S_{r-2} (di $\boldsymbol{a}$) passante per A, la K subordina, nella stella A, una correlazione K' (*proiettività di calotta*) ([9]). Le coordinate omogenee di S_{r-2} in $\boldsymbol{a}$ sono ω^2, $\omega_1{}^2$, $\omega_3{}^2,\ldots,\omega_r{}^2$ (gli S_{r-2} passanti per A soddisfacendo alla $\omega^2=0$), le equazioni di K sono quindi, nel nostro caso,

$$(3)\quad \omega^2=\omega^2\quad \omega_1{}^2=\alpha\omega^2\quad \omega_i{}^2=\lambda_i\omega^2+\lambda_{i3}(\omega^1-\alpha\omega^3)+\sum_4^r{}_k\,\lambda_{ik}(\omega^{k-1}-\alpha\omega^k),$$

mentre quelle di K' si ottengono ponendo, nelle (3), $\omega^2=0$; analogamente per le proiettività $\bar{K}$, $\bar{K}'$ relative a $\bar{V}$, che sono le trasformate delle precedenti nella Ω, nel senso che, a due direzioni corrispondenti in Ω, K e $\bar{K}$ associano lo stesso S_{r-2}.

Si constata che *le proiettività di cella e di calotta relative a V, $\bar{V}$ sono sempre singolari*; se la matrice $\|\lambda_{ij}\|$ è di caratteristica $r-m-2$, esse sono singolari $m+1$ volte $(1\leq m\leq r-2)$.

Limitandoci, per ora, al caso generale ($|\lambda_{ij}|\neq 0$, e quindi K singolare una volta sola), si constata che *ad una direzione generica corrisponde*, in K, *un* S_{r-2} *passante sempre per il punto* P (che si dirà *singolare*) di coordinate omogenee $(1, 0,\ldots,0, -\alpha)$, *appartenente* quindi *alla direzione principale* relativa ad A; mentre l'S_{r-2} *corrispondente alla direzione* ξ

$$\omega^2=0\quad \omega^1=\alpha\omega^3=(\alpha)^2\omega^4=\ldots=(\alpha)^{r-2}\omega^r,$$

([9]) Cfr. E. BOMPIANI, *Sulle varietà anolonome*, I, II, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (6) **27**, 37-45 e 45-52 (1938_1). Cfr. pure ENEA BORTOLOTTI, *Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualistiche*, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (6) 28, 224-230 (1938_2). n. 4

che si dirà pure *singolare, è indeterminato. Il punto singolare di* $\bar{K}$ *è ancora il punto* P; *la direzione singolare* ξ *di* K *è* invece *la corrispondente in* Ω *della* $\bar{\xi}$. Per $K'(\bar{K}')$ le direzioni singolari sono la $\xi(\bar{\xi})$ e la direzione principale; entrambe fanno parte del cono asintotico relativo al punto $A(\bar{A})$ di $V(\bar{V})$: per $r=3$, anzi, il cono asintotico si riduce a queste due rette. Si diranno *curve singolari* di $S_r(\bar{S}_r)$ quelle ∞^{r-1} curve che in ogni loro punto $A(\bar{A})$ sono tangenti alla relativa direzione singolare.

D'altronde, essendo K sempre singolare, tale è la corrispondenza $\mathfrak{V}$: *gli iperpiani* a *sono quindi al più* ∞^{r-1}: ciascuno di essi resta fisso quando A descrive la curva singolare che vi passa ([10]). *Le curve singolari appartengono quindi agli iperpiani* a (ciascun iperpiano ne contiene una di ciascun sistema, e queste si corrispondono in T_1).

Più in generale, supponiamo che K — e quindi anche K', nonchè le analoghe proiettività relative a V — sia $r-n$ volte singolare $(1 \leq n \leq r-1)$: K' possiede due spazî singolari, che s'indicheranno rispettivamente con S_{r-n}, S'_{r-n}: quest'ultimo è il luogo delle direzioni che hanno (spazio) corrispondente indeterminato; l'altro è sostegno della stella degli S_{r-2} corrispondenti alle direzioni per A, appartenenti ad a; analogamente in $\bar{S}_r$.

Nell'ipotesi fatta, la corrispondenza $\mathfrak{V}$ è $r-n$ volte singolare, e la $V(\bar{V})$ possiede ∞^n iperpiani tangenti; considerato un punto $A(\bar{A})$ di $S_r(\bar{S}_r)$, l'iperpiano a ad esso associato resta quindi fisso al variare di $A(\bar{A})$ su una varietà ad $r-n$ dimensioni $V_{r-n}(\bar{V}_{r-n})$, passante per $A(\bar{A})$ e giacente in a. Tali varietà — che si diranno *varietà singolari* della trasformazione — si corrispondono in T_1; esse sono inviluppate dagli S'_{r-n} singolari di K', $\bar{K}'$ (*il sistema degli* S'_{r-n} *è quindi sempre organizzabile*, il che può dimostrarsi direttamente per via analitica).

Le considerazioni precedenti permettono di assegnare una costruzione di una qualsiasi T_1, le cui ipersuperficie V, $\bar{V}$ posseggono ∞^n iperpiani: per $n=r-1$, si ha la costruzione della più generale T_1. *Costruiamo* anzitutto *una qualunque ipersuperficie anolonoma del tipo richiesto, il che si ottiene assumendo in* S_r *un sistema* ∞^n *d'iperpiani* (il quale dipende da $r-n$ funzioni di n variabili), *ed in ciascuno di tali iperpiani una varietà* V_{r-n} (in modo che l'insieme delle V_{r-n} riempia S_r; per assegnare le V_{r-n}, occorre dare $n-1$ funzioni di r variabili); *l'ipersuperficie anolonoma cercata si ottiene associando ad ogni punto* A *l'iperpiano cui appartiene la* V_{r-n} *pas-*

([10]) Ciò si può dedurre direttamente dalle (2_2).

sante per A*:* la sua generalità è quindi di $n-1$ funzioni di r variabili.

Ottenuta in tal modo l'ipersuperficie anolonoma, *si possono costruire le infinite* T_1 - dipendenti da $r-n$ funzioni di r variabili - *che l'ammettono come varietà* V, *assumendo, per ogni punto* A, *un arbitrario punto* $\bar{\mathrm{A}}$ *dell'* S_{r-n} *singolare relativo ad* A: *si constata senza difficoltà che la corrispondenza che ad* A *associa* $\bar{\mathrm{A}}$ *è una* T_1 *la cui varietà* V *è l'ipersuperficie considerata,* anzi, *ogni* T_1 *con* ∞^n *iperpiani a può così costruirsi.*

Si noti come la varietà V possa assumersi ad arbitrio, purchè possegga al più ∞^{r-1} iperpiani tangenti; se però gli spazî singolari S_{r-n}, S'_{r-n} coincidono in ogni punto, la trasformazione T_1 risulta singolare. Si noti pure che *la generalità delle* T_1 *con* ∞^n *iperpiani a è sempre di* r − 1 *funzioni di* r *variabili, indipendentemente da* n: *dipende invece da* n, *e cresce al crescere di questo, la generalità della configurazione degli iperpiani a* (da non confondersi con la V), e quella della V stessa.

Consideriamo infine il caso in cui la varietà V è olonoma; affinchè ciò accada dev'essere integrabile l'equazione $\omega^2=0$ di V, e quindi

$$(4) \qquad [\omega^2 d\omega^2] \equiv \sum_{1}^{r}{}_k\, [\omega^2 \omega^k \omega_k^2] = 0.$$

Si constata facilmente, confrontando la (4) con la (2_2), che in tal caso le forme ω_k^2 $(k \neq 2)$ non dipendono che da ω^2, e quindi K è *singolare* r − 1 *volte* (viceversa, se ciò accade, la (4) è soddisfatta). In tal caso, si hanno ∞^1 iperpiani *a*, ed al variare di A su uno di questi, esso resta fisso; la T_1 è quindi una T_1^* (e viceversa). Se ne conclude che, *se è verificata una delle seguenti ipotesi*

I) V(*o* $\bar{\mathrm{V}}$) *è olonoma,*

II) K(*o* $\bar{\mathrm{K}}$) *è* r − 1 *volte singolare,*

III) T_1 *è una* T_1^*,

sono verificate anche le rimanenti, e V, $\bar{\mathrm{V}}$ *si riducono ad un sistema* ∞^1 *di iperpiani.*

Nel caso $r=3$, le T_1^* possono caratterizzarsi anche come *le trasformazioni* T_1 *le cui curve principali sono piane, ma non rette.* Infatti, ciò accade se e solo se $[A\, dA\, d^2A\, d^3A] = 0$ per $\omega^2 = \omega^3 = 0$, cioè se ω_3^2 non dipende da ω^1; allora $\omega_3^2 = \lambda_3 \omega^2$, e, per quanto si è visto, quest'è la condizione affinchè la T_1 sia del tipo T_1^*.

4. In questo numero si studieranno le T_{r-1}: dimostriamo anzitutto che *esse sono tutte e sole le trasformazioni di uno spazio in sè le cui curve principali sono rette* (di un unico sistema).

Sia infatti A, $\bar{A}$ una coppia di punti corrispondenti in T_{r-1}; sia $A + dA$ il punto infinitamente prossimo ad A sulla $A\bar{A}$, e sia $\bar{A} + d\bar{A}$ il suo corrispondente, che è, per ipotesi, allineato anch'esso con A, $\bar{A}$. Si hanno quindi le relazioni:

$$dA = (A, \bar{A})\,;\; d\bar{A} = (A, \bar{A}),$$

con le quali si esprime il fatto che le coordinate omogenee del punto al primo membro sono combinazioni lineari delle coordinate omogenee dei punti che figurano fra parentesi. Differenziando si ha

$$d^2A = (A, dA)\,;\; d^2\bar{A} = (\bar{A}, d\bar{A}),$$

le quali assicurano che le curve principali, sia in S_r che in $\bar{S}_r$, sono rette. È poi manifesto che le rette del 1° sistema coincidono con quelle del 2° sistema.

Viceversa, sia T una trasformazione le cui curve principali sono rette, e sia A, $\bar{A}$ una coppia di punti corrispondenti. Le curve principali passanti per A, $\bar{A}$ coincidono nella $A\bar{A}$, e questa è unita nell'omografia Ω relativa alla coppia considerata: T è quindi una T_{r-1} (c. v. d.).

È quindi evidente che *ogni* T_{r-1} *è una* T_{r-1}^* e che perciò dipende da una funzione di r variabili (cfr. (4)); *essa si può quindi costruire e rappresentare analiticamente come nel n.* 2. Basta assegnare nello spazio S_r un sistema ∞^{r-1} di rette, ed un'arbitraria corrispondenza su ogni retta del sistema.

Un'ulteriore classificazione delle T_{r-1} si può ottenere in base al tipo dell'omografia γ che Ω subordina nella stella $A\bar{A}$. Si può considerare quindi un tipo di T_{r-1} per ogni tipo di omografia fra S_{r-2} sovrapposti.

Sia L il sistema delle ∞^{r-1} rette $A\bar{A}$ (congiungenti cioè punti corrispondenti); dimostro che *i piani uniti nell'omografia* γ *relativa alla coppia* A, $\bar{A}$ *sono i piani focali della retta* $A\bar{A}$ *di* L. Infatti, se A', $\bar{A}'$, sono due punti corrispondenti, infinitamente prossimi ai precedenti, il piano $A\bar{A}A'$ è unito in γ se e solo se AA' è incidente ad $\bar{A}\bar{A}'$; cioè quando AA' ed $\bar{A}\bar{A}'$ sono incidenti, e quindi allorchè detto piano è piano focale di L (11) (c. v. d.). (Ricordo qui che la configurazione dei piani focali passanti per una retta di

(11) In particolare, per $r > 2$, se in ogni coppia γ è l'identità (e quindi Ω una prospettività), il sistema L si riduce ad una stella di rette. Infatti le rette AA', $\bar{A}'A'$, e quindi anche $A\bar{A}$, $A'\bar{A}'$ risultano sempre incidenti, e perciò [cfr. C. SEGRE, *Preliminari ad una teoria delle varietà luoghi di*

un sistema ∞^{r-1} sia la configurazione dei piani uniti in una omografia σ nella stella A, $\bar{A}$ ([12])). Le omografie γ e σ hanno gli stessi piani uniti, ma, in generale, sono distinte; infatti γ, a differenza di σ, varia, in generale, al variare della coppia A, $\bar{A}$ sulla retta $A\bar{A}$: se γ è fissa, $\mathcal{T}$ (cfr. n. 2) è una proiettività, ma ciò può accadere solo se $A\bar{A}$ non ha più di due fuochi.

Per costruire una qualsiasi T_{r-1}, quando sia prefissata la *caratteristica* dell'omografia γ relativa ad una generica coppia di punti corrispondenti, basta assumere, in S_r, un sistema ∞^{r-1} di rette, la cui configurazione dei piani focali abbia la stessa caratteristica, ed assegnare un'arbitraria corrispondenza sulla generica retta del sistema: si noti come la generalità di tali trasformazioni sia, per qualsiasi caratteristica, di *una funzione di* r *variabili* (e quindi coincida con quella di tutte le T_{r-1}) ([13]).

5. Termino indicando alcune proprietà delle T_p ($p \geq 2$). La seguente generalizza un'analoga proprietà delle T_1, e si dimostra nello stesso modo: in una T_p, esistono, per ogni coppia di elementi corrispondenti degli iperpiani (in generale in numero di p) uniti nell'omografia Ω. Si dimostra che ciascuno di essi resta fisso quando il punto $A(\bar{A})$ varia su una curva ([14]), o, in casi più particolari, su una V_k ($k \leq r-p$) che vi giace; quindi, se in ogni coppia v'è un numero finito d'iperpiani uniti, in tutto S_r ve n'è al piú ∞^{r-1}. Se poi in una coppia generica d'elementi corrispondenti vi sono esattamente p iperpiani uniti, anche ciascuno degli S_{r-p+1} uniti nelle omografie Ω è tale per infinite coppie. Gli S_{r-p} uniti in Ω sono invece, in generale, ∞^r.

Quando gli iperpiani uniti sono ∞^1 in tutto S_r, la T_p è una T_p^*; ma non viceversa.

Noto infine che, in una T_p^* ($p \leq r-2$), gli iperpiani uniti nelle omografie Ω variano, in generale, al variare della coppia A, $\bar{A}$ in uno degli S_{r-p} uniti in T_p^*; mentre, per $p = r-1$, s'è visto che essi dipendono solo dall'S_1 $A\bar{A}$.

spazî, « Rend. Circ. Mat. Palermo » **30**, 87-121 (1910), p. 111] L è una stella (e viceversa). Tale risultato non vale per $r = 2$, in quanto (cfr. L. Muracchini, op. cit., n. 2), per ogni T_1 di S_2, Ω è una prospettività.

([12]) Cfr. C. Segre, *Osservazioni sopra i sistemi di rette degli spazî superiori*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », 2, 148-149 (1888).

([13]) Gli invarianti assoluti di T_{r-1}, nella coppia A, $\bar{A}$, sono $r-1$ (cfr. op. cit. in ([2])), ciascuno essendo associato ad uno dei fuochi di $A\bar{A}$; il birapporto di A, $\bar{A}$ e di due fuochi della loro congiungente è uguale al rapporto degli invarianti pertinenti a quei fuochi (cioè, in altri termini, ad uno degli invarianti di γ).

([14]) Per $p = r-1$ tale curva è la curva (retta) principale.